Karlsruher Institut für Technologie

Theoretische Grundlagen der Informatik

Informationstheorie

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und
nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft

Thema dieses Kapitels

Karlsruher Institut für Technologie

Informationstheorie hat Anwendungen in

- Quellkodierung
- Kanalkodierung
- Kryptographie

Thema dieses Kapitels

Informationstheorie hat Anwendungen in

- Quellkodierung
  - Reduktion von Redundanz/Irrelevanz am Ausgang einer Informationsquelle
  - Hauptaufgabe: Datenkompression
  - Unterscheidung: Verlustfrei vs. verlustbehaftete Kompression
  - Hohe wirtschaftliche Bedeutung
- Kanalkodierung
- Kryptographie

Thema dieses Kapitels

Informationstheorie hat Anwendungen in

- Quellkodierung
- Kanalkodierung
  - Übertragung von digitalen Daten über gestörte Kanäle
  - Schutz vor Übertragungsfehlern durch Redundanz
  - Fehlerkorrektur
- Kryptographie

Thema dieses Kapitels

Informationstheorie hat Anwendungen in

- Quellkodierung
- Kanalkodierung
- Kryptographie
  - Informationssicherheit:
  - Konzeption, Definition und Konstruktion von Informationssystemen, die widerstandsfähig gegen unbefugtes Lesen und Verändern sind
  - Kryptographie bildet zusammen mit Kryptoanalyse die Kryptologie.

Material für Informationstheorie

- Vorlesungsfolien
- TGI-Skript von Prof. Müller-Quade aus dem WS 08/09
  (auf der TGI-Homepage verlinkt)
- Martin Werner: Information und Codierung, VIEWEG TEUBNER, 2008

Information

- Sei $\Sigma = \{1, \dots, n\}$ eine Menge von Zeichen mit Wahrscheinlichkeiten $\{p_1, \dots, p_n\}$.
- Wir betrachten eine Informationsquelle X, die Zeichen $i \in \Sigma$ mit Wahrscheinlichkeit p_i liefert.
- Bemerkung: X wird auch diskrete, endliche Zufallsvariable genannt.

Information

- Sei $\Sigma = \{1, \dots, n\}$ eine Menge von Zeichen mit Wahrscheinlichkeiten $\{p_1, \dots, p_n\}$.
- Wir betrachten eine Informationsquelle X, die Zeichen $i \in \Sigma$ mit Wahrscheinlichkeit p_i liefert.
- Bemerkung: X wird auch diskrete, endliche Zufallsvariable genannt.

Beispiel

- Ein idealer Würfel wird durch die Wahrscheinlichkeiten $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ dargestellt.
- Das Ergebnis des idealen Würfels ist schwer vorherzusagen.
- Der Erkenntnisgewinn nach Ausgang des Experiments ist deshalb groß.

Information

- Sei $\Sigma = \{1, \ldots, n\}$ eine Menge von Zeichen mit Wahrscheinlichkeiten $\{p_1, \ldots, p_n\}$.
- Wir betrachten eine Informationsquelle X, die Zeichen $i \in \Sigma$ mit Wahrscheinlichkeit p_i liefert.
- Bemerkung: X wird auch diskrete, endliche Zufallsvariable genannt.

Beispiel

- Betrachte den gezinkten Würfel mit Wahrscheinlichkeiten $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{2}\right)$.
- Hier ist schon klarer, welche Zahl als nächstes gewürfelt wird.
- Der Erkenntnisgewinn ist also kleiner.

Information

- Sei $\Sigma = \{1, \ldots, n\}$ eine Menge von Zeichen mit Wahrscheinlichkeiten $\{p_1, \ldots, p_n\}$.
- Wir betrachten eine Informationsquelle X, die Zeichen $i \in \Sigma$ mit Wahrscheinlichkeit p_i liefert.
- Bemerkung: X wird auch diskrete, endliche Zufallsvariable genannt.

Frage

- Wir suchen ein Maß für den Erkenntnisgewinn nach Ausgang k mit Wahrscheinlichkeit p_k.
- Wir bezeichnen diesen Erkenntnisgewinn als **Information** I_{p_k}

Information

- Sei $\Sigma = \{1, \dots, n\}$ eine Menge von Zeichen mit Wahrscheinlichkeiten $\{p_1, \dots, p_n\}$.
- Wir betrachten eine Informationsquelle X, die Zeichen $i \in \Sigma$ mit Wahrscheinlichkeit p_i liefert.
- Bemerkung: X wird auch diskrete, endliche Zufallsvariable genannt.

Wünsche an die Definition von Information

- Information soll nicht negativ sein. In Formeln: $I_{p_i} \geq 0$
- Ein sicheres Ereignis (also $p_i = 1$) soll keine Information liefern.
- Kleine Änderungen an der Wahrscheinlichkeit sollen nur kleine Änderungen an der Information bewirken.
  Etwas mathematischer ausgedrückt: Information soll stetig sein.

Information

- Sei $\Sigma = \{1, \ldots, n\}$ eine Menge von Zeichen mit Wahrscheinlichkeiten $\{p_1, \ldots, p_n\}$.
- Wir betrachten eine Informationsquelle X, die Zeichen $i \in \Sigma$ mit Wahrscheinlichkeit p_i liefert.
- Bemerkung: X wird auch diskrete, endliche Zufallsvariable genannt.

Wünsche an die Definition von Information

- Wunsch: Eine doppelt so lange Zeichenkette soll doppelte Information enthalten können
- Deshalb fordern wir, dass $I_{p_i \cdot p_j} = I_{p_i} + I_{p_j}$
- Dies soll später sicherstellen, dass die Information einer (unabhängigen) Zeichenkette gleich der Summe der Einzelinformationen ist.

Information

- Sei $\Sigma = \{1, \ldots, n\}$ eine Menge von Zeichen mit Wahrscheinlichkeiten $\{p_1, \ldots, p_n\}$.
- Wir betrachten eine Informationsquelle X, die Zeichen $i \in \Sigma$ mit Wahrscheinlichkeit p_i liefert.
- Bemerkung: X wird auch diskrete, endliche Zufallsvariable genannt.

Definition Information

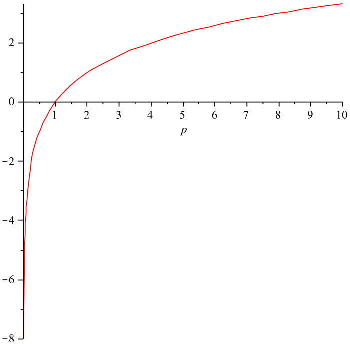
Sei p eine Wahrscheinlichkeit. Die Information von p (zur Basis b) ist

$$I_p = \log_b\left(\frac{1}{p}\right) = -\log_b(p)$$

Im folgenden verwenden wir immer die Basis $b = 2$.

Wiederholung: Rechenregeln Logarithmus

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(x)$
- $\log_a(1/x) = -\log_a(x)$
- Basiswechsel: $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$



Information

Karlsruher Institut für Technologie

Definition Information

Sei p eine Wahrscheinlichkeit. Die Information von p (zur Basis b) ist

$$I_p = \log_b(\frac{1}{p}) = -\log_b(p)$$

Im folgenden verwenden wir immer die Basis $b = 2$.

Beispiel 2:

- Betrachte einen Münze mit Seiten $0, 1$ und Wkten $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$.
- Die Information eines Münzwurfs ist $\log(1/\frac{1}{2}) = \log(2) = 1$
- Werfen wir die Münze k mal, so ist die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmen Ausgang gleich $\frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$.
- Die Information ist dann $-\log(\frac{1}{2^k}) = \log(2^k) = k$

Entropie

Anschaulich formuliert

- Entropie ist ein Maß für den mittleren Informationsgehalt pro Zeichen einer Quelle

Interessante andere Sichtweise

- Entropie eines Strings bezeichnet die Länge unter der ein String nicht komprimiert werden kann.
- Die Kolmogorov-Komplexität eines String ist die Länge des kürzesten Programms, das diesen String ausgibt.
- Damit ist Entropie eine untere Schranke für die Kolmogorov-Komplexität.

Entropie

Karlsruher Institut für Technologie

Entropie

Die Entropie (zur Basis 2) einer diskreten Zufallsvariable mit Ereignissen (Zeichen) X und Wahrscheinlichkeiten $p(x)$ für $x \in X$, ist definiert durch

$$H(X) = \sum_{x \in X} p(x) \log_2\left(\frac{1}{p(x)}\right)$$

dabei gelten die folgenden Konventionen

$$0 \cdot \log 0 := 0, \quad 0 \cdot \log \frac{0}{0} := 0, \quad a \cdot \log \frac{a}{0} := \infty$$

Bemerkung

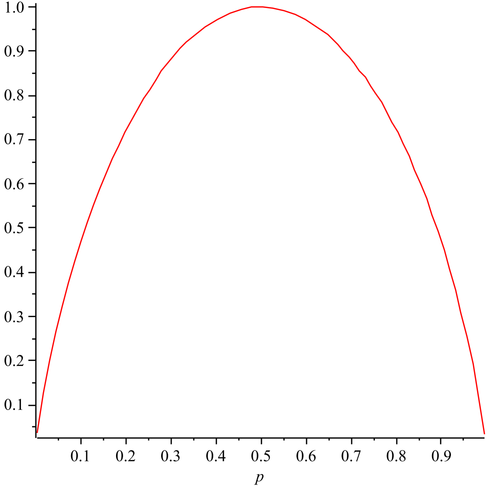
- Es gilt immer $H(X) \geq 0$.

Bemerkungen zur Entropie

$$H(X) = \sum_{x \in X} p(x) \log_2\left(\frac{1}{p(x)}\right)$$

- Die Entropie einer diskreten, endlichen Zufallsvariable mit n Zeichen wird maximal, wenn alle Zeichen gleichwahrscheinlich sind.
- Die maximale Entropie beträgt dann $\log_2(n)$.
- Die Entropie der deutsche Sprache liegt etwa bei $4,1$.
- Bei 26 Buchstaben ergibt sich eine maximale Entropie von $\log_2(26) \approx 4,7$.

Entropie einer Münze mit Wkt p für Zahl



$$H(X) = \sum_{x \in X} p(x) \log_2(\frac{1}{p(x)}) = -p \log_2(p) - (1-p) \log_2(1-p)$$

(Platzsparende) Codierungen

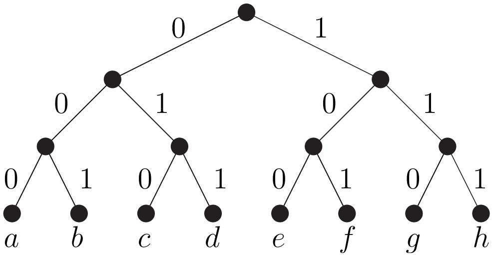
- Wir betrachten eine Informationsquelle X, die Zeichen $i \in \Sigma$ mit Wahrscheinlichkeit p_i liefert.
- Zum Codieren der Zeichen aus Σ haben wir aber nur Zeichenketten aus $\{0, 1\}^*$ zur Verfügung.
- Wie können wir Σ ohne Informationsverlust codieren, dass die erwartete Länge der Ausgabe möglichst klein wird?

Formal

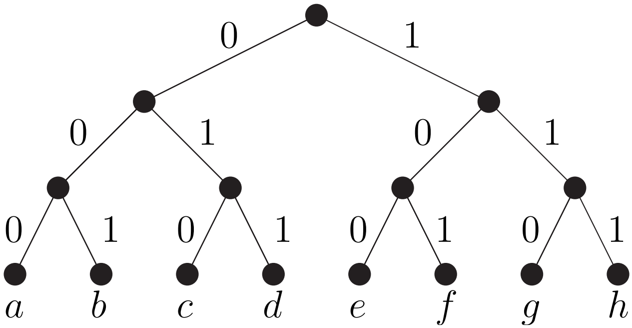
- Wir ordnen jedem Zeichen $i \in \Sigma$ ein Codewort $z_i \in \{0, 1\}^*$ mit n_i Zeichen zu.
- Die mittlere Codewortlänge ist $\overline{n} = \sum_{i \in \Sigma} p_i n_i$.

Codierungsbäume

- Wir codieren im folgenden binär.
- Sei $\Sigma = \{1, \ldots n\}$ ein Alphabet mit Präfix-Code $C = \{c_1, \ldots c_n\}$.
- Der Codierungsbaum T von (Σ, C) ist ein gerichteter, binärer Baum so dass
  - jede Kante mit 0 oder 1 annotiert ist,
  - ausgehend von einem Knoten höchstens eine Kante mit 0 und höchstens eine Kante mit 1 annotiert ist,
  - die Blätter von T genau die Elemente in Σ sind,
  - der Weg von der Wurzel zu $i \in \Sigma$ mit c_i annotiert ist.



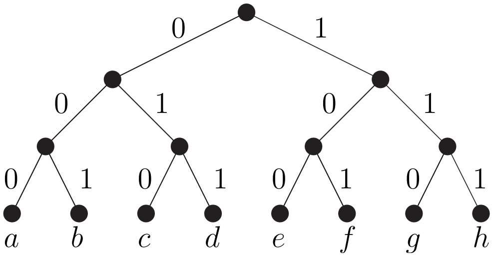
Codierungsbäume



Beispiele

- Zeichen c hat Code 010
- Zeichen f hat Code 101
- Zeichen h hat Code 111

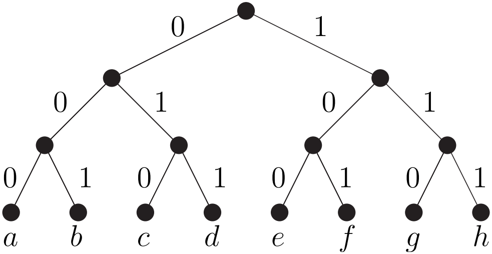
Codierungsbäume



Bemerkungen

- Es besteht ein direkter Zusammenhang zwischen Codierungen und den zugehörigen Bäumen.
- Die *Tiefe* $d_T(v)$ eines Knotens v in einem Baum T ist die Anzahl der Kanten auf einem kürzesten Weg von der Wurzel zu v.

Codierungsbäume

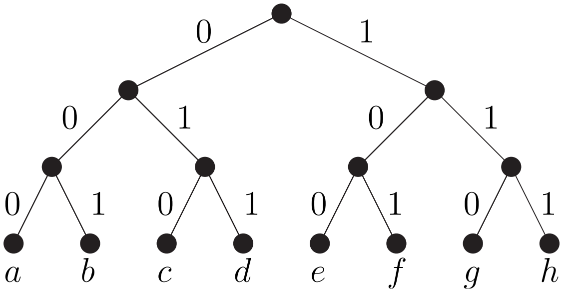


Bemerkungen

- Gegeben sei eine Codierung für Alphabet Σ mit Wahrscheinlichkeit p_i für $i \in \Sigma$, Codewortlänge n_i für $i \in \Sigma$ und zugehörigem Codierungsbaum T.
- Die mittlere Codewortlänge ist $\overline{n} = \sum_{i \in \Sigma} p_i n_i = \sum_{v \in \Sigma} p_v d_T(v)$.

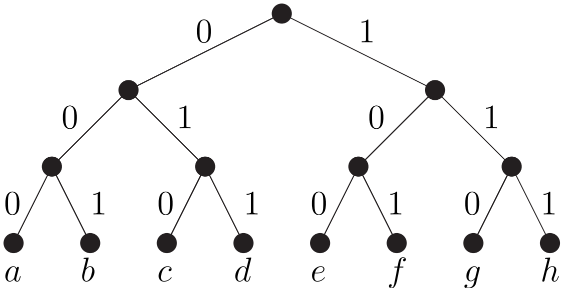
Beispiel

- Betrachte eine Informationsquelle X mit $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ und Wahrscheinlichkeiten $p_z = 1/8$ für $z \in \Sigma$.



Beispiel

- Betrachte eine Informationsquelle X mit $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ und Wahrscheinlichkeiten $p_z = 1/8$ für $z \in \Sigma$.

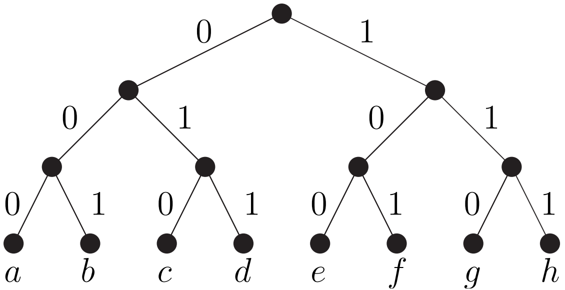


Mittlere Codewortlänge

- Hier haben alle Codes Länge 3.
- Die mittlere Codewortlänge ist also 3.

Beispiel

- Betrachte eine Informationsquelle X mit $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ und Wahrscheinlichkeiten $p_z = 1/8$ für $z \in \Sigma$.



Anzahl der codierten Zeichen

- Mit jedem zusätzlichen Bit, verdoppelt sich die Größe des darstellbaren Alphabets
- Um ein Alphabet Σ mit Wörtern gleicher Länge zu kodieren braucht man also $\log_2(|\Sigma|)$ bits.

Präfix-Codes

Karlsruher Institut für Technologie

- Bei Codes mit variabler Länge muss man wissen, wann ein neues Codewort beginnt.
- Ein **Präfix-Code** ist ein Code, so dass kein Codewort Anfang eines anderen Codeworts ist.
- Für Präfix-Codes benötigt man deswegen keine Trennzeichen.
- Jeder Präfix-Code kann auf die, in der letzten Folie benutze, Art als Baum dargestellt werden.

Beispiel: Morse-Alphabet

Karlsruher Institut für Technologie

- Das Morse-Alphabet hat variable Länge.
- Das Morse-Alphabet ist kein Präfix-Code.
- Zur Unterscheidung von A und ET benötigt man ein Trennzeichen.
- Das Morsealphabet besteht deswegen aus 3 Zeichen.

Buchstabe	Morsezeichen	Buchstabe	Morsezeichen
A	○—	N	—○
B	— ○ ○○	O	— — —
C	— ○ —○	P	○ — —○
D	— ○ ○	Q	— — ○—
E	○	R	○ — ○
F	○ ○ —○	S	○ ○ ○
G	— — ○	T	—
H	○ ○ ○○	U	○ ○ —
I	○○	V	○ ○ ○—
J	○ — ——	W	○ — —
K	— ○ —	X	— ○ ○—
L	○ — ○○	Y	— ○ ——
M	——	Z	— — ○○

Quellencodierungstheorem

- Es seien Codes mit variabler Länge erlaubt.
- Es ist dann nützlich, häufige Zeichen mit kurzen Wörtern zu codieren.
- Dies verkleinert die mittlere Codewortlänge.

Satz (Shannon's Quellencodierungstheorem):
Sei X eine diskrete endliche Zufallsvariable mit Entropie $H(X)$. Weiter sei ein Präfix-Code für X mit einem Codealphabet aus D Zeichen und minimaler mittlerer Codewortlänge $\overline{n}$ gegeben. Dann gilt

$$\frac{H(X)}{\log_2 D} \leq \overline{n} < \frac{H(X)}{\log_2 D} + 1 \ .$$

Beispiel: Shannon-Fano Codierung

Elemente	Wahrscheinlichkeiten	Codewort
0	0,1591	
1	0,1388	
2	0,1125	
3	0,0946	
4	0,0796	
5	0,0669	
6	0,0563	
7	0,0473	
8	0,0398	
9	0,0334	
10	0,0281	
11	0,0237	
12	0,0199	
...	...	...

Beispiel: Shannon-Fano Codierung

Elemente	Wahrscheinlichkeiten	Codewort
0	0,1591	0
1	0,1388	0
2	0,1125	0
3	0,0946	0
4	0,0796	1
5	0,0669	1
6	0,0563	1
7	0,0473	1
8	0,0398	1
9	0,0334	1
10	0,0281	1
11	0,0237	1
12	0,0199	1
...	...	...

Beispiel: Shannon-Fano Codierung

Elemente	Wahrscheinlichkeiten	Codewort
0	**0,1591**	**00**
1	**0,1388**	**00**
2	**0,1125**	**01**
3	**0,0946**	**01**
4	0,0796	1
5	0,0669	1
6	0,0563	1
7	0,0473	1
8	0,0398	1
9	0,0334	1
10	0,0281	1
11	0,0237	1
12	0,0199	1
...	...	...

Beispiel: Shannon-Fano Codierung

Elemente	Wahrscheinlichkeiten	Codewort
0	**0,1591**	**000**
1	**0,1388**	**001**
2	0,1125	01
3	0,0946	01
4	0,0796	1
5	0,0669	1
6	0,0563	1
7	0,0473	1
8	0,0398	1
9	0,0334	1
10	0,0281	1
11	0,0237	1
12	0,0199	1
...	...	...

Beispiel: Shannon-Fano Codierung

Elemente	Wahrscheinlichkeiten	Codewort
0	0,1591	000
1	0,1388	001
2	**0,1125**	**010**
3	**0,0946**	**011**
4	0,0796	1
5	0,0669	1
6	0,0563	1
7	0,0473	1
8	0,0398	1
9	0,0334	1
10	0,0281	1
11	0,0237	1
12	0,0199	1
...	...	...

Beispiel: Shannon-Fano Codierung

Elemente	Wahrscheinlichkeiten	Codewort
0	0,1591	000
1	0,1388	001
2	0,1125	010
3	0,0946	011
4	**0,0796**	**10**
5	**0,0669**	**10**
6	**0,0563**	**10**
7	**0,0473**	**10**
8	**0,0398**	**11**
9	**0,0334**	**11**
10	**0,0281**	**11**
11	**0,0237**	**11**
12	**0,0199**	**11**
...	...	...

Beispiel: Shannon-Fano Codierung

Elemente	Wahrscheinlichkeiten	Codewort
0	0,1591	000
1	0,1388	001
2	0,1125	010
3	0,0946	011
4	**0,0796**	**100**
5	**0,0669**	**100**
6	**0,0563**	**101**
7	**0,0473**	**101**
8	0,0398	11
9	0,0334	11
10	0,0281	11
11	0,0237	11
12	0,0199	11
...	...	...

Beispiel: Shannon-Fano Codierung

Ein paar Zwischenschritte später ...

Elemente	Wahrscheinlichkeiten	Codewort
0	0,1591	000
1	0,1388	001
2	0,1125	010
3	0,0946	011
4	0,0796	1000
5	0,0669	1001
6	0,0563	1010
7	0,0473	1011
8	0,0398	11000
9	0,0334	11001
10	0,0281	11010
11	0,0237	11011
12	0,0199	111000
...	...	...

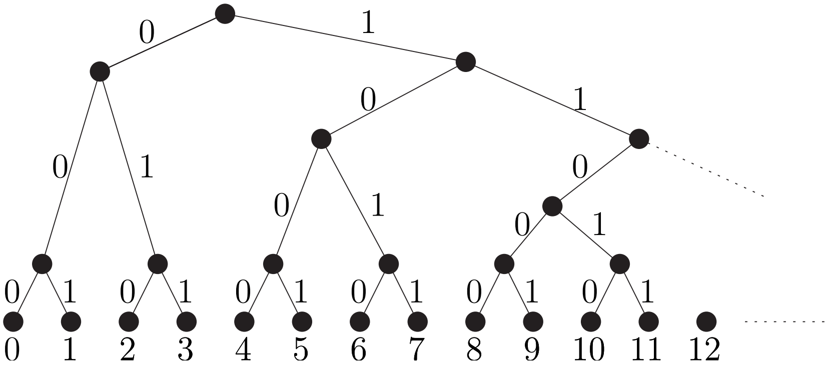
Shannon-Fano Codierung

Funktion ShannonFano(Z)

- **Eingabe:** Zeichenliste $Z = (z_1, \ldots, z_k)$ mit Wkten $p_1, \ldots p_k$
- **Ausgabe:** Shannon-Fano Codierung $(c_1, \ldots, c_k)$
- Wenn $k = 1$
  - return $(c_1 = \epsilon)$ and exit
- Sortiere Zeichen Z absteigend nach Wkt p_i (d.h $p_1 \geq p_2, \ldots \geq p_k$).
- Trenne Z in
  - $Z_1 \leftarrow (z_1, \ldots z_l)$
  - $Z_2 \leftarrow (z_{l+1}, \ldots z_k)$

  so dass $\left|\sum_{i=1}^{l} p_i - \sum_{i=l+1}^{k} p_i\right|$ minimal ist.
- $(c_1, \ldots c_l) \leftarrow 0 \bigoplus \text{ShannonFano}(Z_1)$
- $(c_{l+1}, \ldots c_k) \leftarrow 1 \bigoplus \text{ShannonFano}(Z_2)$
- return $(c_1, \ldots c_k)$

Codierungsbaum Shannon-Fano



Bemerkung

- Die mittlere Codewortlänge der Shannon-Fano Codierung muss nicht optimal sein.
- Sie ist deswegen nicht sehr verbreitet.
- Wir werden sehen, dass die **Huffman-Codierung** optimale mittlere Codewortlänge besitzt.

Beispiel: Huffman-Codierung

d $\boxed{0,4}$

f $\boxed{0,2}$

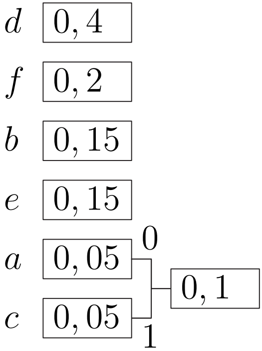
b $\boxed{0,15}$

e $\boxed{0,15}$

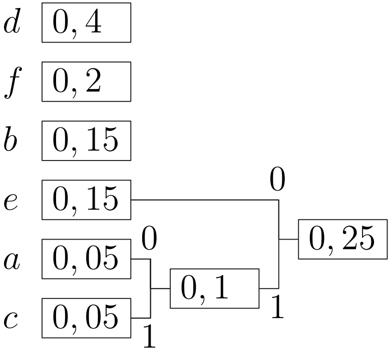
a $\boxed{0,05}$

c $\boxed{0,05}$

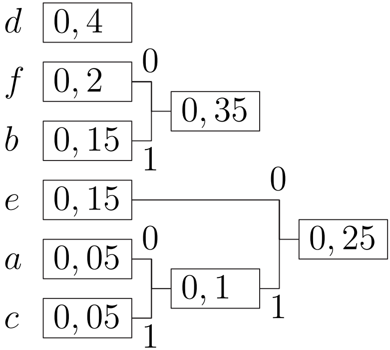
Beispiel: Huffman-Codierung



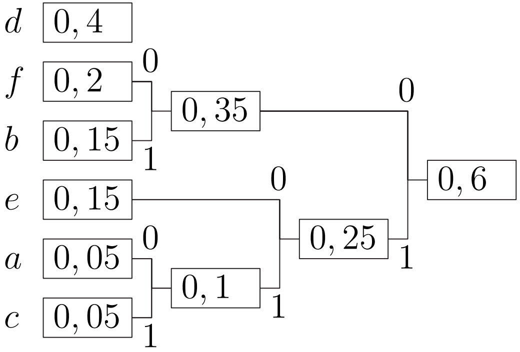
Beispiel: Huffman-Codierung



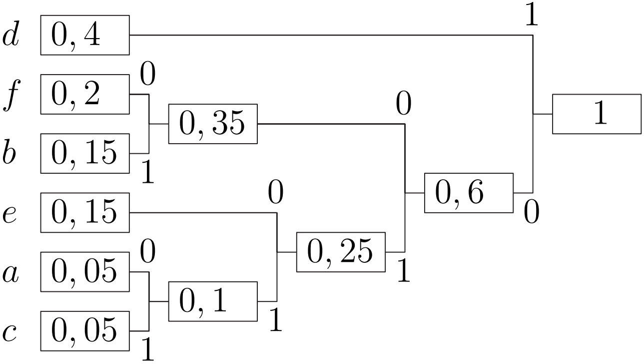
Beispiel: Huffman-Codierung



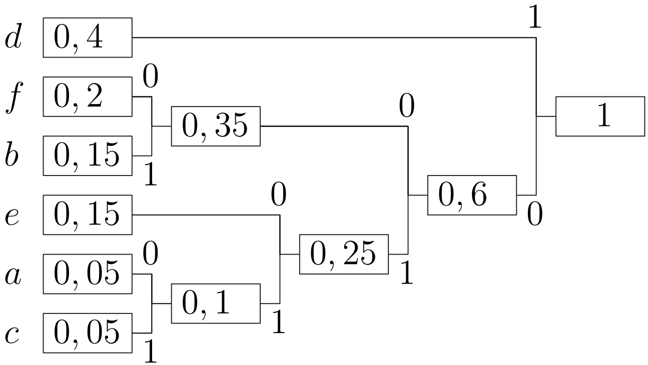
Beispiel: Huffman-Codierung



Beispiel: Huffman-Codierung



Beispiel: Huffman-Codierung



Beispiele

- Zeichen c hat Code 0111
- Zeichen e hat Code 010
- Zeichen d hat Code 1

Huffman-Codierung

Eingabe: Zeichen $1, \ldots, n$ mit Wkten $p_1, \ldots p_n$
Ausgabe: Baum T des Huffman-Codes

- Menge $Q = \{1, \ldots n\}$
- Füge alle Zeichen aus Q als Blätter in T ein
- Für $i = 1, \ldots n - 1$
  - Erzeuge neuen Knoten z für T
  - $u \leftarrow$ extrahiere Element x aus Q mit p_x minimal
  - Bestimme u als linker Nachfolger von z
  - $v \leftarrow$ extrahiere Element x aus Q mit p_x minimal
  - Bestimme v als rechter Nachfolger von z
  - Wahrscheinlichkeit p_z von z ist $p_u + p_v$
  - Füge z in Q ein
- $r \leftarrow$ extrahiere letztes Element aus Q
- return r (r ist Wurzel von T)

Karlsruher Institut für Technologie

Optimalität der Huffman-Codierung

Satz:
Der Huffman-Algorithmus berechnet einen Codierungsbaum mit minimaler mittlerer Codewortlänge.

Vorbereitendes Lemma

Karlsruher Institut für Technologie

Satz:
Sei $\Sigma = \{1, \ldots, n\}$ ein Alphabet mit Wkten $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Seien $x, y \in \Sigma, x \neq y$ eine beliebige Wahl für die zwei unwahrscheinlichsten Zeichen.
Dann gibt es einen Codierungsbaum T für (Σ, P) mit minimaler mittlerer Codewortlänge, so dass x und y den gleichen Elternknoten besitzen.

Vorbereitendes Lemma: Beweis

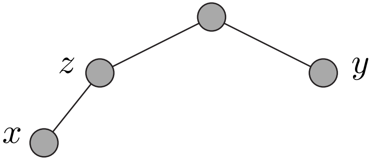
- Sei $\Sigma = \{1, \dots, n\}$ ein Alphabet mit Wkten $P = \{p_1, \dots, p_n\}$.
- Seien $x, y \in \Sigma$, $x \neq y$ eine beliebige Wahl für die zwei unwahrscheinlichsten Zeichen.

Beweis

- Sei T' ein belieber Codierungsbaum für (Σ, P) mit minimaler mittlerer Codewortlänge
- O.B.d.A gelte für die Tiefe, dass $d'_T(x) \geq d'_T(y)$.
- Sei z der Elternknoten von x in T'

Fall 1: z hat nur x als Nachkommen

- Dann könnte man z löschen und durch x ersetzen
- Dieser Baum hätte eine kleinere mittlere Codewortlänge
- Widerspruch zur Optimalität von T'



Vorbereitendes Lemma: Beweis

Karlsruher Institut für Technologie

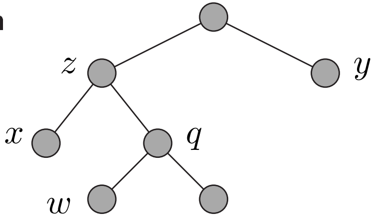
- Sei $\Sigma = \{1, \ldots, n\}$ ein Alphabet mit Wkten $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$.
- Seien $x, y \in \Sigma$, $x \neq y$ eine beliebige Wahl für die zwei unwahrscheinlichsten Zeichen.

Beweis

- Sei T' ein belieber Codierungsbaum für (Σ, P) mit minimaler mittlerer Codewortlänge
- O.B.d.A gelte für die Tiefe, dass $d'_T(x) \geq d'_T(y)$.
- Sei z der Elternknoten von x in T'

Fall 2: z hat mehr als 2 Nachkommen

- Sei $w \neq y$ ein Nachfahre von z von maximaler Tiefe
- Optimalität von T': $p_w \leq p_x$
- Wahl von x, y: $p_w = p_x$
- Tausche x mit w. Weiter mit Fall 3



Vorbereitendes Lemma: Beweis

Karlsruher Institut für Technologie

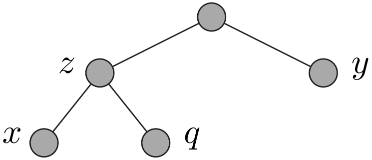
- Sei $\Sigma = \{1, \ldots, n\}$ ein Alphabet mit Wkten $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$.
- Seien $x, y \in \Sigma$, $x \neq y$ eine beliebige Wahl für die zwei unwahrscheinlichsten Zeichen.

Beweis

- Sei T' ein belieber Codierungsbaum für (Σ, P) mit minimaler mittlerer Codewortlänge
- O.B.d.A gelte für die Tiefe, dass $d'_T(x) \geq d'_T(y)$.
- Sei z der Elternknoten von x in T'

Fall 3: z hat genau 2 Nachkommen

- Sei $q \neq x$ der andere Nachfahre von z. Tausche q mit y.
- q und y gleiche Tiefe: Tauschen ok.
- q tiefer als y:
  Wegen Optimalität $p_q = p_y$.



Optimalität der Huffman-Codierung

Satz:
Der Huffman-Algorithmus berechnet einen Codierungsbaum mit minimaler mittlerer Codewortlänge.

Beweis

- Wir benutzen Induktion nach der Anzahl der Zeichen $|\Sigma|$ des Alphabets Σ.
- **Induktionsanfang:** Die Aussage ist für ein Zeichen erfüllt.

Beweis - Induktionsschluss

Karlsruher Institut für Technologie

Induktions-Voraussetzung

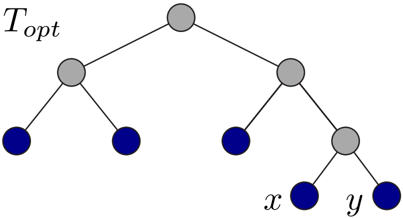
- Der Huffman-Algorithmus berechnet einen optimalen Codierungsbaum für alle Alphabete Σ mit $|\Sigma| \leq n$ und alle Möglichkeiten für P.

Induktions-Schluss

- Gegeben sei Alphabet $\Sigma = \{1, \dots, n+1\}$ mit Wkten $P = \{p_1, \dots p_{n+1}\}$.
- Für einen Codierungsbaum T bezeichne $f(T) = \sum_{v \in \Sigma} p_v d_T(v)$ die zugehörige mittlere Wortlänge.
- Wir machen einen Widerspruchsbeweis.
- Bezeichne T_{huff} einen Huffman-Baum für (Σ, P)
- Sei T_{opt} einen Codierungsbaum für (Σ, P) mit $f(T_{opt}) < f(T_{huff})$.

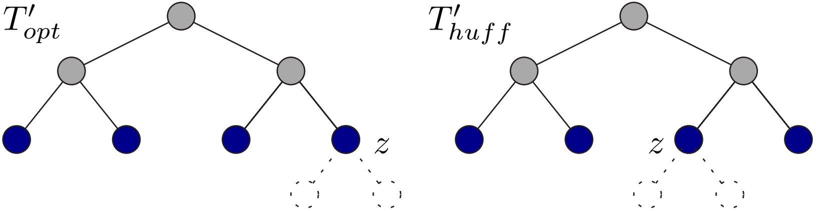
Beweis - Induktionsschluss

- Seien $x, y \in \Sigma$ die Zeichen, die im Huffman-Algo zuerst zusammengefasst werden.
- Vorbereitendes Lemma: Wir können T_{opt} so wählen, dass x und y den gleichen Elternknoten besitzen.



Beweis - Induktionsschluss

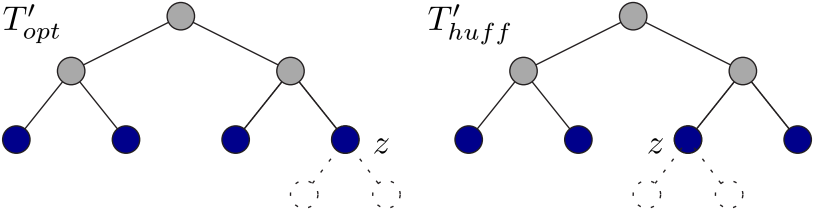
- Seien $x, y \in \Sigma$ die Zeichen, die im Huffman-Algo zuerst zusammengefasst werden.
- Vorbereitendes Lemma: Wir können T_{opt} so wählen, dass x und y den gleichen Elternknoten besitzen.



- Sei $\Sigma' = \Sigma \setminus \{x, y\} \cup \{z\}$ Instanz für neues Zeichen z mit Wkt $p_x + p_y$
- Seien T'_{opt} und T'_{huff} die Bäume, die sich aus T_{opt} und T_{huff} ergeben, wenn man x, y mit ihrem Elterknoten zu Knoten z verschmilzt.

Beweis - Induktionsschluss

- Sei $\Sigma' = \Sigma \setminus \{x, y\} \cup \{z\}$ Instanz für neues Zeichen z mit Wkt $p_x + p_y$
- Seien T'_{opt} und T'_{huff} die Bäume, die sich aus T_{opt} und T_{huff} ergeben, wenn man x, y mit ihrem Elterknoten zu Knoten z verschmilzt.

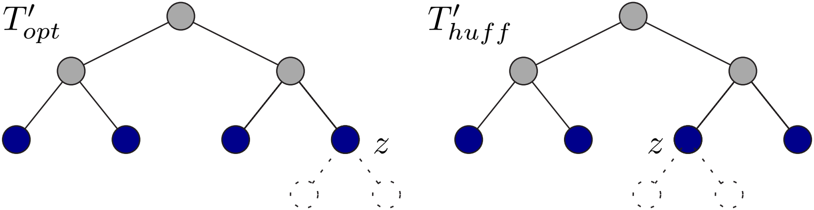


Es gilt

- T'_{huff} ist ein Huffman-Baum für Instanz Σ' mit den neuen Wkten
- T'_{opt} ist ein Codierungs-Baum für Instanz Σ' mit den neuen Wkten

Beweis - Induktionsschluss

- Sei $\Sigma' = \Sigma \setminus \{x, y\} \cup \{z\}$ Instanz für neues Zeichen z mit Wkt $p_x + p_y$
- Seien T'_{opt} und T'_{huff} die Bäume, die sich aus T_{opt} und T_{huff} ergeben, wenn man x, y mit ihrem Elterknoten zu Knoten z verschmilzt.

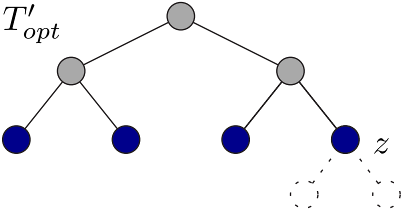


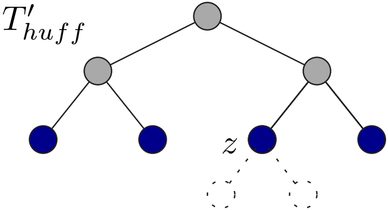
Es gilt

$$
\begin{aligned}
f(T'_{huff}) &= f(T_{huff}) - d_{T_{huff}}(x)p_x - d_{T_{huff}}(y)p_y + (d_{T_{huff}}(z) - 1)p_z \\
&= f(T_{huff}) - p_x - p_y \\
f(T'_{opt}) &= f(T_{opt}) - d_{T_{opt}}(x)p_x - d_{T_{opt}}(y)p_y + (d_{T_{opt}}(z) - 1)p_z \\
&= f(T_{opt}) - p_x - p_y
\end{aligned}
$$

Beweis - Induktionsschluss

- Sei $\Sigma' = \Sigma \setminus \{x, y\} \cup \{z\}$ Instanz für neues Zeichen z mit Wkt $p_x + p_y$
- Seien T'_{opt} und T'_{huff} die Bäume, die sich aus T_{opt} und T_{huff} ergeben, wenn man x, y mit ihrem Elterknoten zu Knoten z verschmilzt.





- Damit ist T'_{opt} ein besserer Codierierungsbaum für Σ' als T'_{huff}
- Da $|\Sigma'| = n$ ist dies ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung.

Nachteile der Huffman-Codierung

- Unterschiedliche Codewortlängen führen zu unterschiedlichen Bitraten und Decodierungsverzögerung.
- Datenkompression reduziert die Redundanz und erhöht damit die Fehleranfälligkeit.
- Die Kenntnis der Wahrscheinlichkeiten der Zeichen wird vorausgesetzt.
- Universelle Codierverfahren wie der Lempel-Ziv Algorithmus setzen kein a-priori Wissen an die Statistik der Daten voraus.

Lauflängenkodierung

- Bei der Faxübertragung wird die Vorlage zeilenweise abgetastet und in weiße (w) und schwarze (s) Bildelemente zerlegt.
- Üblicherweise ist die Zahl der weißen Elemente viel höher, als die der schwarzen.
- Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die Bildpunkte voneinander unabhängig sind.
- Bei 15% Schwärzungsgrad ergibt sich eine Entropie von $H = -0.85 \cdot \log_2(0.85) - 0.15 \cdot \log_2(0.15) \approx 0.61$
- Bei guter Codierung sollte eine entsprechende mittlere Codewortlänge zu erwarten sein.

Lauflängenkodierung

- Bei der Faxübertragung wird die Vorlage zeilenweise abgetastet und in weiße (w) und schwarze (s) Bildelemente zerlegt.
- Üblicherweise ist die Zahl der weißen Elemente viel höher, als die der schwarzen.
- Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass die Bildpunkte voneinander unabhängig sind.
- Bei 15% Schwärzungsgrad ergibt sich eine Entropie von $H = -0.85 \cdot \log_2(0.85) - 0.15 \cdot \log_2(0.15) \approx 0.61$
- Bei guter Codierung sollte eine entsprechende mittlere Codewortlänge zu erwarten sein.

Problem:
Wie ist platzsparende Codierung von einem Alphabet mit zwei Zeichen möglich?

Lauflängencodierung

Problem:
Wie ist platzsparende Codierung von einem Alphabet mit zwei Zeichen möglich?

- Möglicher Ansatz: Blockcodes
- Fasse k Zeichen zu Blöcken zusammen und codiere diesen
- Beispiel $k = 2$:
- Neues Alphabet: ww,ws,sw,ss
- Dieses kann platzsparend codiert werden.

Beispiel:

Zeichen	ww	ws	sw	ss
Wkt	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$
Huffman	0	11	100	101

Karlsruher Institut für Technologie

Lauflängencodierung

- Spezielle Zusammenfassung für Bildcodierung bei Fax/Videoanwendungen
- Die Länge der Blöcke ist variabel.
- **Idee:** Codiere nicht die Bildpunkte, sondern den Abstand zwischen zwei schwarzen Bildpunkten
- Beispiel:

  www**s**ww**ss**wwww**s**w**s**wwwwww**s**wwwwww**s**

  wird aufgefasst als 3204166.
- Für eine Binärcodierung braucht man noch Codes für die Abstände (also für $\mathbb{N}$).
- Um dies platzsparend zu machen benötigt man Wkten für einzelne Abstände.

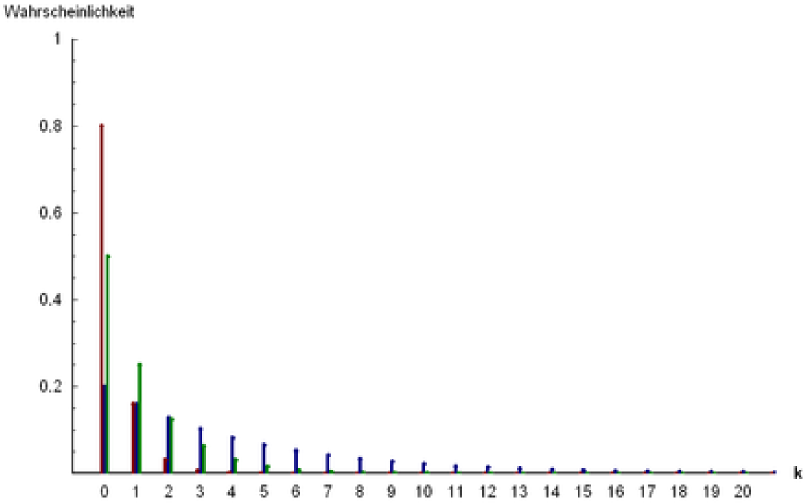
Lauflängencodierung

- Wie groß sind die Wkten für die einzelnen Abstände?
- Annahme: Die Bildpunkte sind voneinander unabhängig
- Sei p_l die Wkt für einen Block aus l aufeinanderfolgenden weißen Bildpunkten mit einem schwarzen Bildpunkten am Schluss

$$p_l = \mathbb{P}(w^l s) = \mathbb{P}^l(w) \cdot \mathbb{P}(s)$$

- Es ergibt sich eine geometrische Verteilung

Geometrische Verteilung



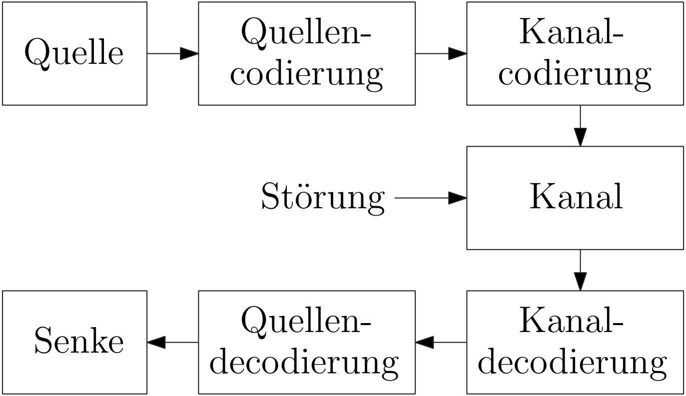
Quelle: Wikipedia.

Lauflängencodierung

- Man kann ein Schwarzweißbild über Angabe der Lauflängen verlustfrei rekonstruieren
- Sonderbehandlung für letzten Block erforderlich
- Weiteres Problem: Lauflängen können beliebig groß werden
- Shannon-Fano-Codierung kann trotzdem einfach angewandt werden

Abstand	Wkten	Codewort
0	0,1591	000
1	0,1388	001
2	0,1125	010
3	0,0946	011
4	0,0796	1000
5	0,0669	1001
6	0,0563	1010
7	0,0473	1011
8	0,0398	11000
9	0,0334	11001
10	0,0281	11010
11	0,0237	11011
12	0,0199	111000
...	...	...

Codierung zum Schutz gegen Übertragungsfehler



Codierung zum Schutz gegen Übertragungsfehler

Karlsruher Institut für Technologie

- Qualität einer digitalen Übertragung wird häufig als gemessene Bitfehlerquote bzw Bitfehlerwahrscheinlichkeit angegeben
- Beherrschung von Übertragungsfehlern
  - Fehlerkorrektur (beim Empfänger)
  - Fehlererkennung und Wiederholungsanforderung
- Tradeoff: Wahrscheinlichkeit unentdeckter Fehler vs. Datendurchsatz

Paritätscodes - Einfach Binär

Quelle: Wikipedia

- Paritätscode der RS232-Schnittstelle
- Neunpoliges Kabel ermöglicht die parallele Übertragung von 8 bit
- Dabei werden nur sieben bits $b_1, \ldots b_7$ für die Nachrichtenübertragung genutzt.
- Das achte bit b_8 wird Paritätsbit genannt.

Paritätscodes - Einfach Binär

- Paritätscode der RS232-Schnittstelle
- Neunpoliges Kabel ermöglicht die parallele Übertragung von 8 bit
- Dabei werden nur sieben bits $b_1, \ldots b_7$ für die Nachrichtenübertragung genutzt.
- Das achte bit b_8 wird Paritätsbit genannt.

Wiederholung XOR-Verknüpfung $\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

- Es wird b_8 so gesendet, dass

$$b_8 = b_1 \oplus b_2 \oplus b_3 \oplus b_4 \oplus b_5 \oplus b_6 \oplus b_7$$

Paritätscodes - Einfach Binär

Wiederholung XOR-Verknüpfung $\oplus$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

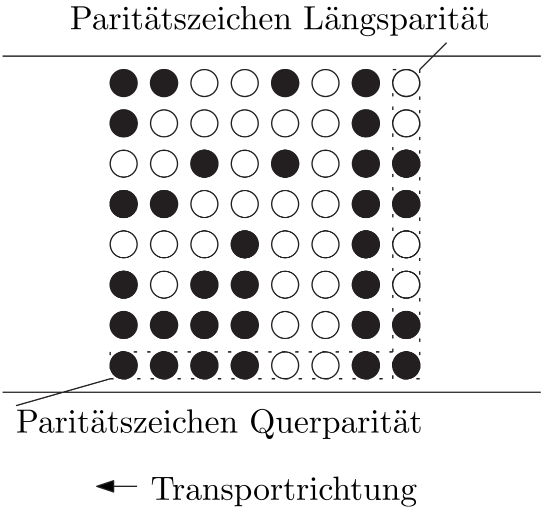
- Es wird b_8 so gesendet, dass

$$b_8 = b_1 \oplus b_2 \oplus b_3 \oplus b_4 \oplus b_5 \oplus b_6 \oplus b_7$$

- Mit dem Paritätscode werden einfache Fehler im Codewort erkannt
- Gleichzeitiger Übertragungsfehler von 2 Fehlern werden nicht erkannt
- Falls ein Fehler erkannt wird, kann die ursprüngliche Nachricht nicht rekonstruiert werden: Die Fehlerstelle ist unbekannt

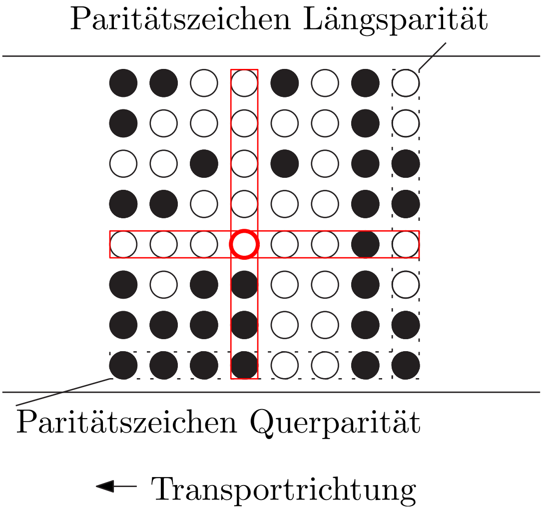
Kreuzsicherung

- Dient zum Schutz gegen Doppelfehler
- Erklärung am Beispiel Lochkarte



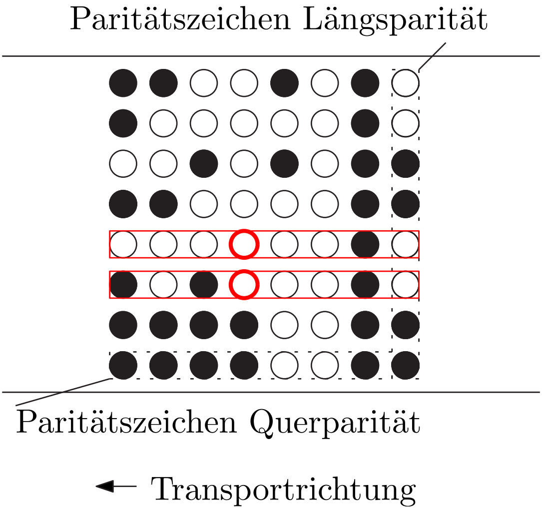
Kreuzsicherung

- Alle 1,2,3 fachen Fehler sind erkennbar
- Ab 4 Fehlern nicht zwingend erkennbar



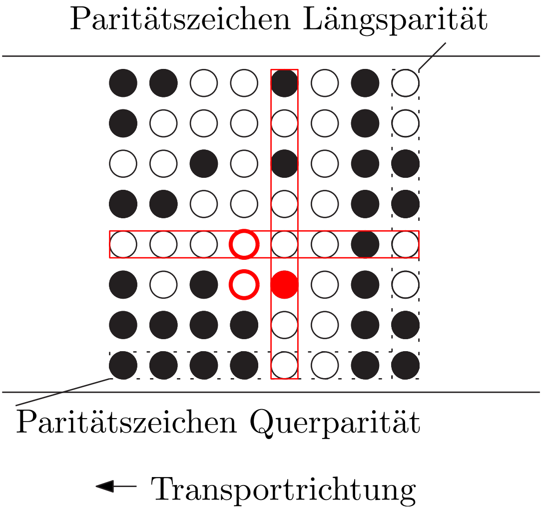
Kreuzsicherung

- Alle 1,2,3 fachen Fehler sind erkennbar
- Ab 4 Fehlern nicht zwingend erkennbar



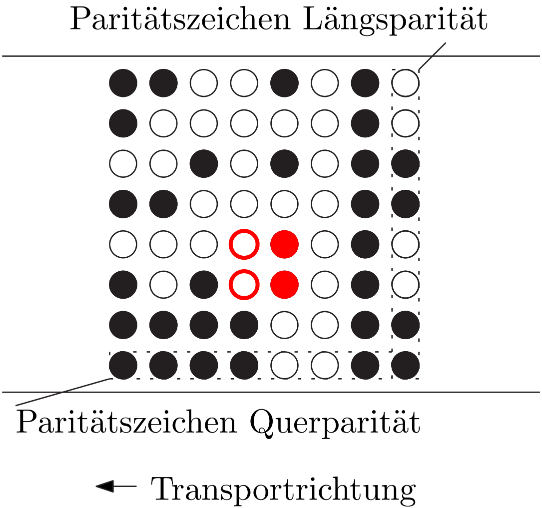
Kreuzsicherung

- Alle 1,2,3 fachen Fehler sind erkennbar
- Ab 4 Fehlern nicht zwingend erkennbar



Kreuzsicherung

- Alle 1,2,3 fachen Fehler sind erkennbar
- Ab 4 Fehlern nicht zwingend erkennbar



Paritätscodes

Paritätscodes

- Gegeben ein Alphabet $\Sigma = \{1, 2, \ldots, q-1\}$.
- Ein Code der Länge n zur Basis q sei eine Menge von Folgen mit Elementen aus Σ.
- Einzelne Folgen werden Codewörter genannt.

Ein Paritätscode liegt vor, wenn für jedes Codewort $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \mod {}_q = 0$$

gilt.

Satz:
Jeder Paritätscode erkennt Einzelfehler.

Beweis

- Sei $a_1, \ldots, a_n$ das ursprüngliche Codewort
- Annahme: Das i-te Element wurde fehlerhaft als $\widetilde{a}_i$ übertragen.
- Ein Übertragungsfehler liegt vor, wenn

$$(a_1 + a_2 + \ldots + \widetilde{a}_i + \ldots + a_n) \mod q = 0$$

- Für das ursprüngliche Codewort gilt

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \mod q = 0 .$$

Also

$$\begin{aligned} 0 &= (a_1 + a_2 + \ldots + \widetilde{a}_i + \ldots + a_n) \mod q \\ &= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \mod q \end{aligned}$$

Beweis

$$\begin{aligned} 0 &= (a_1 + a_2 + \ldots + \tilde{a}_i + \ldots + a_n) \mod q \\ &= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \mod q \end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned} 0 &= (a_1 + a_2 + \ldots + \tilde{a}_i + \ldots + a_n) \mod q - \\ &\quad (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \mod q \\ &= (\tilde{a}_i - a_i) \mod q \end{aligned}$$

Um dies zu erfüllen muss $(\tilde{a}_i - a_i)$ durch q teilbar sein. Weil aber

$$0 \leq a_i < q$$

folgt

$$0 \leq |\tilde{a}_i - a_i| < q \, .$$

Paritätscodes gegen Vertauschungsfehler

- Häufige Fehlerart bei manueller Eingabe: Vertauschungsfehler.
- Diese werden von gewöhnlichen Paritätscodes nicht erkannt.
- Sie wieder $a_1, \ldots, a_n$ ein Codewort.
- **Paritätscode mit Gewichten:** Wir führen zusätzlich ganzzahlige Gewichte $w_1, \ldots, w_{n-1}$ ein, so das gilt

$$(w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \ldots + w_{n-1} a_{n-1} + a_n) \mod q = 0$$

  gilt.
- Zusatzbedingung: Alle Gewichte w_i müssen teilerfremd zu q sein.

Paritätscodes gegen Vertauschungsfehler

- **Paritätscode mit Gewichten:** Wir führen zusätzlich ganzzahlige Gewichte $w_1, \ldots, w_{n-1}$ ein, so das gilt

$$\left(w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \ldots + w_{n-1} a_{n-1} + a_n\right) \mod q = 0$$

gilt.
- Zusatzbedingung: Alle Gewichte w_i müssen teilerfremd zu q sein.

> **Satz**:
> Jeder Paritätscode mit Gewichten erkennt Einzelfehler.

Beweis: Analog zu normalen Paritätscodes kann gezeigt werden, dass Einzelfehler nicht erkannt werden, wenn

$$w_i \cdot \left(\widetilde{a}_i - a_i\right) \mod q = 0\ .$$

Paritätscodes gegen Vertauschungsfehler

Karlsruher Institut für Technologie

- **Paritätscode mit Gewichten:** Wir führen zusätzlich ganzzahlige Gewichte $w_1, \ldots, w_{n-1}$ ein, so das gilt

  $$(w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \ldots + w_{n-1} a_{n-1} + a_n) \mod q = 0$$

  gilt.
- Zusatzbedingung: Alle Gewichte w_i müssen teilerfremd zu q sein.

> **Satz**:
> Ein Paritätscode mit Gewichten erkennt die Vertauschung an den Stellen i und j, falls die Zahl $w_i - w_j$ teilerfremd zu q ist.

Beweis: Analog zu oben: Vertauschungsfehler wird nicht erkannt, falls

$$[(w_i a_i + w_j a_j) - (w_j a_i + w_i a_j)] \mod q = [(w_i - w_j)(a_i - a_j)] \mod q = 0\,.$$

Bsp: ISBN-10


Group
Publisher
Title
Check digit
ISBN 817525766-0
9 788175 257665
EAN
Group
Publisher
Title
Check digit

- ISBN: International Standard Book Number (ISO Standard 2108)
- ISBN-10 (Code oben im letzten Beispiel) war bis 2006 übliche Codierungen
- Seit 2007 EAN-13 (European Article Number)

Beschreibung ISBN-10

- Alphabet $\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9\}$
- Basis $q = 11$ (Primzahl!)
- Länge $n = 10$
- Paritätscode
- Für Code $a_1, \ldots, a_10$ berechnet sich die Prüfziffer a_{10} aus

$$(10a_1 + 9a_2 + 8a_3 + \ldots + 2a_9 + a_{10}) \mod 11 = 0\,.$$

Block-Codes

Karlsruher Institut für Technologie

- Man unterscheidet verschiedene Arten von Kanal-Codes.
- **Block-Codes:** Hier betrachtet man Codeworte fester Länge. Aufeinanderfolgende Blöcke werden unabhängig voneinander kodiert.
- **Faltungs-Codes:** Codeworte konnen beliebig lang sein. Die Zeichen sind vom Vorgeschehen abhängig.
- In TGI befassen wir uns ausschließlich mit Block-Codes.

Hamming-Distanz und Fehlerkorrektur

Hamming-Distanz
Für $x, y \in \{0,1\}^n$ ist

$$d(x,y) := \#\{i | i = 1, \ldots, n, x_i \neq y_i\}$$

die Hamming-Distanz zwischen x und y.

Anschaulich: Die Hamming Distanz zwischen x und y ist die Anzahl der Zeichen in x die sich von denen in y unterscheiden.

Es sei $B_\rho(x)$ die Menge aller Worte y mit $d(x,y) \leq \rho$.

Anschaulich: B_ρ ist eine Kugel (die Hamming-Kugel) um x mit Radius ρ.

Maximum-Likelihood-Decoding

Maximum-Likelyhood-Decoding
Sei eine Kodierung C gegeben und y ein empfangenes Wort. Decodiere y als dasjenige Codewort $x \in C$, für das $d(x, y)$ minimal wird.

Shannon's Theorem

Shannon's Theorem

- Betrachte einen Code C mit M Worten der Länge n.
- Seien $x_1, \ldots, x_2$ die Codeworte.
- Benutze maximum-likelyhood-decoding.
- Sei P_i die Wahrscheinlichkeit dafür, dass falsch dekodiert wird wenn das Wort x_i gesendet wurde.
- Die durchschnittliche Wahrscheinlichkeit einer falschen Dekodierung ist

$$P_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} P_i \,.$$

Block-Codes

Block-Code

- Gegeben ist ein endliches Alphabet Σ
- Ein Block-Code ist eine Teilmenge $C \subseteq \Sigma^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$
- Falls $\#C = 1$, so heißt C trivial, da es nur ein Codewort gibt.

Minimaldistanz

Die Minimaldistanz eines nichttrivialen Block-Codes C ist

$$m(C) := \min_{c_1, c_2 \in C, c_1 \neq c_2} d(c_1, c_2) \,.$$

Block-Codes

Satz:
Ein Block-Code C mit Minimaldistanz $m(C) = d$ kann entweder bis zu $d-1$ Fehler erkennen oder bis zu $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ Fehler korrigieren.

Beweisskizze