Karlsruher Institut für Technologie

Theoretische Grundlagen der Informatik

Komplexitätsklassen

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Thema dieses Kapitels

Karlsruher Institut für Technologie

Fragestellung bisher:

- Ist eine Sprache L entscheidbar oder nicht?
- Ist eine Funktion berechenbar oder nicht?
- Benutzung von deterministischen Turing-Maschinen.

In diesem Kapitel:

- Wie effizient kann ein Problem gelöst werden?
- Betrachtung von nichtdeterministischen Turing-Maschinen.

Frage (P vs. NP):
Gibt es einen wesentlichen Effizienzgewinn beim Übergang der deterministischen Turing-Maschine zur nichtdeterministischen Turing-Maschine?

Kapitel

- Sprachen
- Probleme
- Zeitkomplexität

Wie sieht ein Problem aus?

Karlsruher Institut für Technologie

Beispiel: Traveling Salesman Problem (TSP)

Gegeben sei ein vollständiger Graph $G = (V, E, c)$, d.h.

- $V := \{1, \ldots, n\}$
- $E := \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$
- $c\colon E \to \mathbb{Z}^+$.

Wir betrachten folgende Problemvarianten

- **Optimierungsproblem:**
  Gesucht ist eine Tour (Rundreise), die alle Elemente aus V enthält und minimale Gesamtlänge unter allen solchen Touren hat.
- **Optimalwertproblem:**
  Gesucht ist die Länge einer minimalen Tour.
- **Entscheidungsproblem:**
  Gegeben sei zusätzlich auch ein Parameter $k \in \mathbb{Z}^+$. Die Frage ist nun: Gibt es eine Tour, deren Länge höchstens k ist?

Wie sieht ein Problem aus?

Karlsruher Institut für Technologie

Wir betrachten folgende Problemvarianten

- **Optimierungsproblem:**
  Gesucht ist eine Tour (Rundreise), die alle Elemente aus V enthält und minimale Gesamtlänge unter allen solchen Touren hat.
- **Optimalwertproblem:**
  Gesucht ist die Länge einer minimalen Tour.
- **Entscheidungsproblem:**
  Gegeben sei zusätzlich auch ein Parameter $k \in \mathbb{Z}^+$. Die Frage ist nun: Gibt es eine Tour, deren Länge höchstens k ist?

Bemerkung:

- Mit einer Lösung des Optimierungsproblems kann man leicht auch das Optimalwertproblem und das Entscheidungsproblem lösen.
- Mit einer Lösung des Optimalwertproblems kann man leicht auch das Entscheidungsproblem lösen.

Definition: Problem

Ein **Problem** Π ist gegeben durch:

- eine allgemeine Beschreibung aller vorkommenden Parameter;
- eine genaue Beschreibung der Eigenschaften, die die Lösung haben soll.

Ein **Problembeispiel** / (**Instanz**) von Π erhalten wir, indem wir die Parameter von Π festlegen.

Definition: Kodierungsschema

- Wir interessieren uns für die **Laufzeit** von Algorithmen.
- Diese wird in der Größe des Problems gemessen.

Die Größe eines Problems ist abhängig von der Beschreibung oder Kodierung der Problembeispiele

- Ein **Kodierungsschema** *s* ordnet jedem Problembeispiel eines Problems eine Zeichenkette oder *Kodierung* über einem Alphabet Σ zu.
- Die **Inputlänge** eines Problembeispiels ist die Anzahl des Symbole seiner Kodierung.

Kodierungsschema

Es gibt verschiedene Kodierungsschemata für ein bestimmtes Problem.

Beispiel:

- Zahlen können dezimal, binär, unär, usw. kodiert werden.
- Die Inputlänge von 5127 beträgt dann 4 für dezimal, 13 für binär und 5127 für unär.

Wir werden uns auf vernünftige Schemata festlegen:

- Die Kodierung eines Problembeispiels sollte keine überflüssigen Informationen enthalten.
- Zahlen sollen binär (oder k-är für $k \neq 1$) kodiert sein.

Kodierungsschema

Dies bedeutet, die Kodierungslänge

- einer ganzen Zahl n ist $\lfloor \log_k |n| + 1 \rfloor + 1 =: \langle n \rangle$
  (eine 1 benötigt man für das Vorzeichen);
- einer rationalen Zahl $r = \frac{p}{q}$ ist $\langle r \rangle = \langle p \rangle + \langle q \rangle$;
- eines Vektors $X = (x_1, \ldots, x_n)$ ist $\langle X \rangle := \sum_{i=1}^{n} \langle x_i \rangle$;
- einer Matrix $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ ist $\langle A \rangle := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \langle a_{ij} \rangle$.
- eines Graphen $G = (V, E)$ kann zum Beispiel durch die Kodierung seiner *Adjazenzmatrix*, die eines gewichteten Graphen durch die Kodierung der *Gewichtsmatrix* beschrieben werden.

Äquivalenz von Kodierungsschemata

Karlsruher Institut für Technologie

Zwei Kodierungsschemata s_1, s_2 heißen **äquivalent** bezüglich eines Problems Π, falls es Polynome p_1, p_2 gibt, so dass gilt:

$$(|s_1(I)| = n \Rightarrow |s_2(I)| \leq p_2(n)) \text{ und } (|s_2(I)| = m \Rightarrow |s_1(I)| \leq p_1(m))$$

für alle Problembeispiele I von Π.

Entscheidungsprobleme

- Ein Entscheidungsproblem Π können wir als Klasse von Problembeispielen D_Π auffassen.
- Eine Teilmenge dieser Klasse ist $J_\Pi \subseteq D_\Pi$, die Klasse der **Ja–Beispiele**, d.h. die Problembeispiele deren Antwort Ja ist.
- Der Rest der Klasse $N_\Pi \subseteq D_\Pi$ ist die Klasse der **Nein–Beispiele**.

Korrespondenz von Entscheidungsproblemen und Sprachen

Ein Problem Π und ein Kodierungsschema s: $D_\Pi \to \Sigma^*$ zerlegen Σ^* in drei Klassen:

- Wörter aus Σ^*, die *nicht* Kodierung eines Beispiels aus D_Π sind,
- Wörter aus Σ^*, die Kodierung eines Beispiels $I \in N_\Pi$ sind,
- Wörter aus Σ^*, die Kodierung eines Beispiels $I \in J_\Pi$ sind.

Die dritte Klasse ist die Sprache, die zu Π im Kodierungsschema s korrespondiert.

Die zu einem Problem Π und einem Kodierungsschema s **zugehörige Sprache** ist

$$L[\Pi, s] := \left\{ x \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \Sigma \text{ ist das Alphabet zu } s \text{ und } x \text{ ist Kodierung} \\ \text{eines Ja–Beispiels } I \text{ von } \Pi \text{ unter } s, \text{ d.h. } I \in J_\Pi \end{array} \right\}$$

- Wir betrachten im folgenden deterministische Turing-Maschinen mit zwei Endzuständen q_J, q_N, wobei q_J akzeptierender Endzustand ist.
- Dann wird die Sprache $L_{\mathcal{M}}$ akzeptiert von der Turing-Maschine $\mathcal{M}$, falls

$$L_{\mathcal{M}} = \{x \in \Sigma^* \mid \mathcal{M} \text{ akzeptiert } x\} \ .$$

- Eine deterministische Turing-Maschine $\mathcal{M}$ **löst** ein Entscheidungsproblem Π unter einem Kodierungsschema s, falls $\mathcal{M}$ bei jeder Eingabe über dem Eingabe-Alphabet in einem Endzustand endet und $L_{\mathcal{M}} = L[\Pi, s]$ ist.

Zeitkomplexität

Für eine deterministische Turing-Maschine $\mathcal{M}$, die für alle Eingaben über dem Eingabe-Alphabet Σ hält, ist die **Zeitkomplexitätsfunktion** $T_{\mathcal{M}} : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ definiert durch

$$T_{\mathcal{M}}(n) = \max \left\{ m \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt eine Eingabe } x \in \Sigma^* \text{ mit } |x| = n, \text{ so} \\ \text{dass die Berechnung von } \mathcal{M} \text{ bei Eingabe } x \\ m \text{ Berechnungsschritte (Übergänge) benötigt,} \\ \text{bis ein Endzustand erreicht wird} \end{array} \right\}$$

Die Klasse $\mathcal{P}$

Die Klasse $\mathcal{P}$ist die Menge aller Sprachen L (Probleme), für die eine deterministische Turing-Maschine existiert, deren Zeitkomplexitätsfunktion polynomial ist, d.h. es existiert ein Polynom p mit

$$T_{\mathcal{M}}(n) \leq p(n).$$

Schwierigkeit von Entscheidungs und Optimierungsproblem

Karlsruher Institut für Technologie

Satz:
Falls es einen Algorithmus $\mathcal{A}$ gibt, der das Entscheidungsproblem des TSP in polynomialer Zeit löst, so gibt es auch einen Algorithmus, der das Optimierungsproblem in polynomialer Zeit löst.

Schwierigkeit von Entscheidungs und Optimierungsproblem

Satz:
Falls es einen Algorithmus $\mathcal{A}$ gibt, der das Entscheidungsproblem des TSP in polynomialer Zeit löst, so gibt es auch einen Algorithmus, der das Optimierungsproblem in polynomialer Zeit löst.

Beweis: Algorithmus, der das Optimierungsproblem löst.

Input: $G = (V, E)$, $c_{ij} = c(\{i, j\})$ für $i, j \in V := \{1, \ldots, n\}$, Algorithmus $\mathcal{A}$

Output: d_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$, so dass alle bis auf n der d_{ij}-Werte den Wert $\left(\max_{i,j} c_{ij}\right) + 1$ haben. Die restlichen n d_{ij}-Werte haben den Wert c_{ij} und geben genau die Kanten einer optimalen Tour an.

Algorithmus OPT-TOUR (als Beweis)

- berechne $m := \max_{1 \le i,j \le n} c_{ij}$;
  setze L(ow) := 0 und H(igh) := $n \cdot m$;
- solange $H - L > 1$ gilt, führe aus:

$$\left.\begin{array}{l} \text{falls } \mathcal{A}\left(n, c, \left\lceil \frac{1}{2}(H+L) \right\rceil\right) = \text{nein ist,} \\ \qquad \text{setze } L := \left\lceil \frac{1}{2}(H+L) \right\rceil + 1; \\ \text{sonst} \\ \qquad \text{setze } H := \left\lceil \frac{1}{2}(H+L) \right\rceil; \end{array}\right\} (* \text{ binäre Suche } *)$$

- falls $\mathcal{A}(n, c, L) =$„nein“ ist,setze $OPT := H$; sonst setze $OPT := L$;
- für $i = 1 \ldots n$ führe aus
- für $j = 1 \ldots n$ führe aus
- setze $R := c_{ij}$; $c_{ij} := m + 1$;
  falls $\mathcal{A}(n, c, OPT) =$ nein ist, setze $c_{ij} := R$;
- setze $d_{ij} = c_{ij}$;

Bemerkungen zum Algorithmus

Die Schleife in Schritt 2 bricht ab, und danach ist die Differenz $H - L$ gleich 1 oder 0, denn:

- Solange $H - L > 1$, ändert sich bei jedem Schleifendurchlauf einer der Werte H, L:
  - Für $H - L > 1$ gilt, dass $L \neq \left\lceil \frac{1}{2}(H + L) \right\rceil + 1$ und $H \neq \left\lceil \frac{1}{2}(H + L) \right\rceil$ ist.
- Die Differenz verkleinert sich also mit jedem Durchlauf
- Da H und L ganzzahlig sind, tritt der Fall $H - L \leq 1$ ein.

- Nach Abbruch der Schleife gilt $H - L \geq 0$:
  - Eine Differenz zwischen H und L von 0 kann genau durch Erhöhen von L bei einer aktuellen Differenz von 2 bzw. 3 erreicht werden
  - Eine Differenz zwischen H und L von 0 minimal ist (bei einer Differenz von weniger als 2 wird die Schleife nicht mehr betreten).

Laufzeit des Algorithmus

- In 2. wird $\mathcal{A}(n, c, k)$ etwa $\log(n \cdot m)$–mal aufgerufen
- In 4. wird $\mathcal{A}(n, c, OPT)$ etwa n^2–mal aufgerufen.
- Es finden also $\mathcal{O}(n^2 + \log(nm))$ Aufrufe von $\mathcal{A}$ statt.
- Die Inputlänge ist $\mathcal{O}(n^2 \cdot \log(\max c_{ij}))$.
- Da $\mathcal{A}$ polynomial ist, ist dies also auch OPT-TOUR.

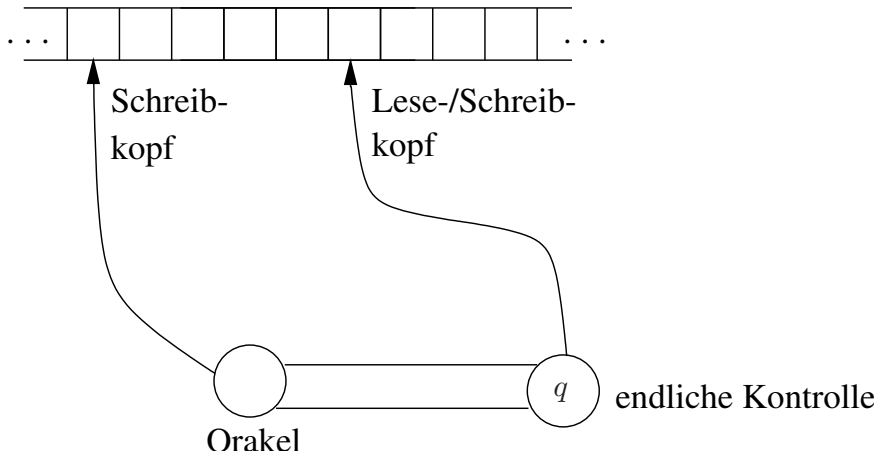
Kapitel

- **Nichtdeterministische Turingmaschinen**
- **Die Klasse NP**

Die Nichtdeterministische Turingmaschine

- Bei der nichtdeterministischen Turing-Maschine wird die Übergangsfunktion δ zu einer Relation erweitert.
- Dies ermöglicht Wahlmöglichkeiten und ε–Übergänge (vergleiche endliche Automaten).
- Wir betrachten ein äquivalentes Modell einer nichtdeterministischen Turing-Maschine (NTM), die auf einem **Orakel** basiert
- Dies kommt der Intuition näher.

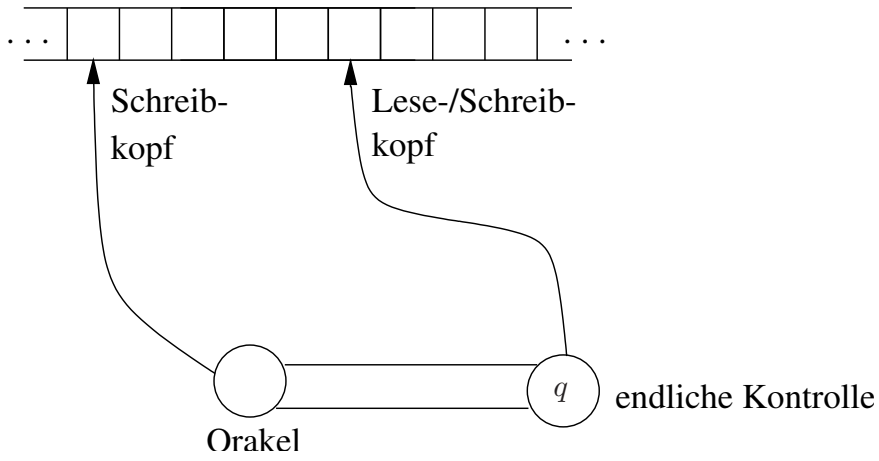
Die Nichtdeterministische Turingmaschine



Nichtdeterministische Turingmaschinen (NTM)

- werden analog zur DTM durch das Oktupel $(Q, \Sigma, \sqcup, \Gamma, s, \delta, q_J, q_N)$ beschrieben.
- haben zusätzlich zu der endlichen Kontrolle mit dem Lese-/Schreibkopf ein **Orakelmodul** mit einem eigenen Schreibkopf
- NTMs haben genau zwei Endzustände q_J und q_N, wobei q_J der akzeptierende Endzustand ist.

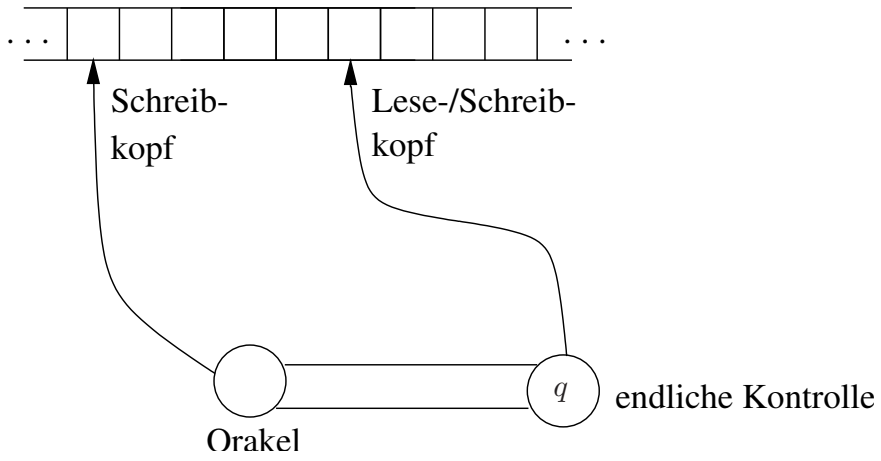
Die Nichtdeterministische Turingmaschine



Berechnung bei einer nichtdeterministischen Turing-Maschine

- **1. Stufe:**
  - Das Orakelmodul weist seinen Schreibkopf an, Schritt für Schritt entweder ein Symbol zu schreiben und nach links zu gehen oder anzuhalten.
  - Falls der Schreibkopf anhält, wird das Orakelmodul inaktiv, und die endliche Zustandskontrolle wird aktiv.
- **2. Stufe:**
  - Ab jetzt genau wie bei DTM.
  - Das Orakelmodul und sein Schreibkopf sind nicht weiter beteiligt.

Die Nichtdeterministische Turingmaschine



- Eine nichtdeterministische Turing-Maschine $\mathcal{M}$ **akzeptiert** ein Wort $x \in \Sigma^*$ genau dann, wenn es eine Berechnung gibt, die in q_J endet.
- $\mathcal{M}$ akzeptiert die Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ genau dann, wenn sie gerade die Wörter aus L akzeptiert.

Übertragung auf Entscheidungsprobleme Π

Die Eingabe ist ein Wort aus Σ^*, zum Beispiel eine Kodierung eines Problembeispiels $I \in D_\Pi$.

- **1. Stufe:** Es wird ein Orakel aus Γ^* berechnet, zum Beispiel ein Lösungsbeispiel für I, also ein Indikator, ob $I \in J_\Pi$ oder $I \in N_\Pi$ gilt.
- **1. Stufe:** Hier wird nun dieser Lösungsvorschlag überprüft, d.h. es wird geprüft ob $I \in J_\Pi$.

Beispiel TSP

- **1. Stufe:** Es wird zum Beispiel eine Permutation σ auf der Knotenmenge V vorgeschlagen. D.h. $(\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$, $G = (V, E)$, c und k bilden die Eingabe.
- **1. Stufe:** Es wird nun überprüft, ob $\sigma(V)$ eine Tour in G enthält, deren Länge bezüglich c nicht größer als k ist.

Bemerkungen zur NTM

- Das Orakel kann ein beliebiges Wort aus Γ^* sein.
- Darum muss in der Überprüfungsphase (2.Stufe) zunächst geprüft werden, ob das Orakel ein zulässiges Lösungsbeispiel ist.
- Ist dies nicht der Fall, so kann die Berechnung zu diesem Zeitpunkt mit der Antwort „Nein“ beendet werden.

- Jede NTM $\mathcal{M}$ hat zu einer gegebenen Eingabe x eine unendliche Anzahl möglicher Berechnungen, eine zu jedem Orakel aus Γ^*.
- Endet mindestens eine in q_J, so wird x akzeptiert.

Zeitkomplexität für NTM

- Die **Zeit**, die eine nichtdeterministische Turing-Maschine $\mathcal{M}$ benötigt, um ein Wort $x \in L_{\mathcal{M}}$ zu akzeptieren, ist definiert als die minimale Anzahl von Schritten, die $\mathcal{M}$ in den Zustand q_J überführt.
- Die **Zeitkomplexitätsfunktion** $T_{\mathcal{M}} : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ einer nichtdeterministischen Turing-Maschine $\mathcal{M}$ ist definiert durch

$$T_{\mathcal{M}}(n) := \max\left(\{1\} \cup \left\{ m \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{es gibt ein } x \in L_{\mathcal{M}} \text{ mit } |x| = n, \text{ so}\\ \text{dass die Zeit, die } \mathcal{M} \text{ benötigt,}\\ \text{um } x \text{ zu akzeptieren, } m \text{ ist}\end{array} \right\}\right)$$

Zeitkomplexität für NTM

- Die **Zeit**, die eine nichtdeterministische Turing-Maschine $\mathcal{M}$ benötigt, um ein Wort $x \in L_{\mathcal{M}}$ zu akzeptieren, ist definiert als die minimale Anzahl von Schritten, die $\mathcal{M}$ in den Zustand q_J überführt.
- Die **Zeitkomplexitätsfunktion** $T_{\mathcal{M}} : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ einer nichtdeterministischen Turing-Maschine $\mathcal{M}$ ist definiert durch

$$T_{\mathcal{M}}(n) := \max\left(\{1\} \cup \left\{ m \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{es gibt ein } x \in L_{\mathcal{M}} \text{ mit } |x| = n, \text{ so}\\ \text{dass die Zeit, die } \mathcal{M} \text{ benötigt,}\\ \text{um } x \text{ zu akzeptieren, } m \text{ ist}\end{array} \right\}\right)$$

Bemerkung 1

- Zur Berechnung von $T_{\mathcal{M}}(n)$ wird für jedes $x \in L_{\mathcal{M}}$ mit $|x| = n$ die kürzeste akzeptierende Berechnung betrachtet.
- Anschließend wir von diesen kürzesten die längste bestimmt.
- Somit ergibt sich eine *worst–case* Abschätzung.

Zeitkomplexität für NTM

- Die **Zeit**, die eine nichtdeterministische Turing-Maschine $\mathcal{M}$ benötigt, um ein Wort $x \in L_{\mathcal{M}}$ zu akzeptieren, ist definiert als die minimale Anzahl von Schritten, die $\mathcal{M}$ in den Zustand q_J überführt.
- Die **Zeitkomplexitätsfunktion** $T_{\mathcal{M}} : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ einer nichtdeterministischen Turing-Maschine $\mathcal{M}$ ist definiert durch

$$T_{\mathcal{M}}(n) := \max\left(\{1\} \cup \left\{ m \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{es gibt ein } x \in L_{\mathcal{M}} \text{ mit } |x| = n, \text{ so}\\ \text{dass die Zeit, die } \mathcal{M} \text{ benötigt,}\\ \text{um } x \text{ zu akzeptieren, } m \text{ ist}\end{array} \right\}\right)$$

Bemerkung 2

- Die Zeitkomplexität hängt nur von der Anzahl der Schritte ab, die bei einer akzeptierenden Berechnung auftreten.
- Hierbei umfasst die Anzahl der Schritte auch die Schritte der Orakelphase.
- Per Konvention ist $T_{\mathcal{M}}(n) = 1$, falls es keine Eingabe x der Länge n gibt, die von $\mathcal{M}$ akzeptiert wird.

Die Klasse NP

Die Klasse $\mathcal{NP}$ ist die Menge aller Sprachen L, für die es eine nichtdeterministische Turing-Maschine gibt, deren Zeitkomplexitätsfunktion polynomial beschränkt ist.

($\mathcal{NP}$ steht für **nichtdeterministisch polynomial**.)

Die Klasse NP

Karlsruher Institut für Technologie

Die Klasse $\mathcal{NP}$ ist die Menge aller Sprachen L, für die es eine nichtdeterministische Turing-Maschine gibt, deren Zeitkomplexitätsfunktion polynomial beschränkt ist.

($\mathcal{NP}$ steht für **nichtdeterministisch polynomial**.)

Bemerkungen

- Alle Sprachen in $\mathcal{NP}$ sind entscheidbar.
- Informell ausgedrückt: Π gehört zu $\mathcal{NP}$, falls Π folgende Eigenschaft hat: Ist die Antwort bei Eingabe eines Beispiels I von Π Ja, dann kann die Korrektheit der Antwort in polynomialer Zeit überprüft werden.

Die Klasse NP

Die Klasse $\mathcal{NP}$ ist die Menge aller Sprachen L, für die es eine nichtdeterministische Turing-Maschine gibt, deren Zeitkomplexitätsfunktion polynomial beschränkt ist.

($\mathcal{NP}$ steht für **nichtdeterministisch polynomial**.)

Beispiel: TSP$\in \mathcal{NP}$:

Denn zu gegebenem $G = (V, E)$, c, k und einer festen Permutation σ auf V kann man in $O(|V| \cdot \log C)$, wobei C die größte vorkommende Zahl ist, überprüft werden, ob

$$\sum_{i=1}^{n-1} c(\{\sigma(i), \sigma(i+1)\}) + c(\{\sigma(n), \sigma(1)\}) \leq k$$

gilt.

Karlsruher Institut für Technologie

NP-vollständige Probleme

Große Frage der Theoretischen Informatik

- Trivialerweise gilt: $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$.
- **Frage:** Gilt $\mathcal{P} \subset \mathcal{NP}$ oder $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$?
- Die Vermutung ist, dass $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ gilt.

- Dazu betrachten wir Probleme, die zu den schwersten Problemen in $\mathcal{NP}$ gehören.

- Dabei ist am schwersten im folgenden Sinne gemeint:
- Wenn ein solches Problem trotzdem in $\mathcal{P}$ liegt, so kann man folgern, dass alle Probleme aus $\mathcal{NP}$ in $\mathcal{P}$ liegen, d.h. $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

- Diese Probleme sind also Kandidaten, um $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$ zu trennen.
- Es wird sich zeigen, dass alle diese schwersten Probleme im wesentlichen gleich schwer sind.

NP-Vollständigkeit

Eine **polynomiale Transformation** einer Sprache $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ in eine Sprache $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ ist eine Funktion $f\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ mit den Eigenschaften:

- es existiert eine polynomiale deterministische Turing-Maschine, die f berechnet;
- für alle $x \in \Sigma_1^*$ gilt: $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$.

Wir schreiben dann $L_1 \propto L_2$ (L_1 ist polynomial transformierbar in L_2).

Eine Sprache L heißt $\mathcal{NP}$**–vollständig** , falls gilt:

- $L \in \mathcal{NP}$ und
- für alle $L' \in \mathcal{NP}$ gilt $L' \propto L$.

NP-Vollständigkeit

Wir formulieren nun die Begriffe polynomial transformierbar und $\mathcal{NP}$-vollständig für Entscheidungsprobleme.

Ein Entscheidungsproblem Π_1 ist **polynomial transformierbar** in das Entscheidungsproblem Π_2, wenn eine Funktion $f\colon D_{\Pi_1} \to D_{\Pi_2}$ existiert mit folgenden Eigenschaften:

- f ist durch einen polynomialen Algorithmus berechenbar;
- $\forall\, I \in D_{\Pi_1} : I \in J_{\Pi_1} \iff f(I) \in J_{\Pi_2}$.

Wir schreiben dann $\Pi_1 \propto \Pi_2$.

Ein Entscheidungsproblem Π heißt **$\mathcal{NP}$-vollständig**, falls gilt:

- $\Pi \in \mathcal{NP}$ und
- für alle $\Pi' \in \mathcal{NP}$ gilt $\Pi' \propto \Pi$.

Transitivität der poly. Transformation

Eine **polynomiale Transformation** einer Sprache $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ in eine Sprache $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ ist eine Funktion $f\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ mit den Eigenschaften:

- es existiert eine polynomiale deterministische Turing-Maschine, die f berechnet;
- für alle $x \in \Sigma_1^*$ gilt: $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$.

Wir schreiben dann $L_1 \propto L_2$ (L_1 ist polynomial transformierbar in L_2).

Lemma. $\propto$ ist transitiv, d.h. aus $L_1 \propto L_2$ und $L_2 \propto L_3$ folgt $L_1 \propto L_3$.

Beweis. Die Hintereinanderausführung zweier polynomialer Transformationen ist wieder eine polynomiale Transformation.

Korollar

Korollar. Falls $L_1, L_2 \in \mathcal{NP}$, $L_1 \propto L_2$ und L_1 $\mathcal{NP}$-vollständig, dann ist auch L_2 $\mathcal{NP}$-vollständig.

Bedeutung.
Um also zu zeigen, dass ein Entscheidungsproblem Π $\mathcal{NP}$-vollständig ist, gehen wir folgendermaßen vor. Wir beweisen:

- $\Pi \in \mathcal{NP}$
- für ein bekanntes $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem Π' gilt: $\Pi' \propto \Pi$.

Problem.

- Wir wissen noch für kein einziges Problem, dass es $\mathcal{NP}$-vollständig ist.
- Das erste $\mathcal{NP}$-vollständige Problem ist das Erfüllbarkeitsproblem SAT (satisfiability).

Das Problem SAT (satisfiability)

Sei $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ eine Menge von booleschen Variablen
Es heißen $u_i, \overline{u_i}$ Literale.
Eine Wahrheitsbelegung für U ist eine Funktion $t\colon U \to \{\texttt{wahr}, \texttt{falsch}\}$.
Eine **Klausel** ist ein Boole'scher Ausdruck der Form

$$y_1 \vee \ldots \vee y_s \quad \text{mit} \quad y_i \in \underbrace{\{u_1, \ldots, u_m\} \cup \{\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m}\}}_{\text{Literalmenge}} \cup \{\texttt{wahr}, \texttt{falsch}\}$$

Problem SAT
Gegeben: Menge U von Variablen, Menge C von Klauseln über U.
Frage: Existiert eine Wahrheitsbelegung von U, so dass C erfüllt wird, d.h. dass alle Klauseln aus C den Wahrheitswert `wahr` annehmen?

Beispiel: $U = \{u_1, u_2\}$ mit $C = \{u_1 \vee \overline{u_2},\ \overline{u_1} \vee u_2\}$ ist Ja-Beispiel von SAT. Mit der Wahrheitsbelegung $t(u_1) = t(u_2) = \texttt{wahr}$ wird C erfüllt.

Weitere Beispiele für SAT-Instanzen

Karlsruher Institut für Technologie

Lösbar:

$$U = \{a, b, c, d, e\}, C = \{c \vee \overline{d}, \overline{a} \vee b \vee \overline{c} \vee d \vee e, \overline{c} \vee d\}$$

Nicht lösbar:

$$U = \{a, b, c\}, C = \{a \vee b, \overline{a}, \overline{b} \vee c, \overline{c}\}$$

Der Satz von Cook (Steven Cook, 1971)

SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Der Satz von Cook (Steven Cook, 1971)

SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis:

- SAT $\in \mathcal{NP}$ ist erfüllt:
  Für ein Beispiel I von SAT (mit n Klauseln und m Variablen) und einer Wahrheitsbelegung t kann in $O(m \cdot n)$ überprüft werden, ob t alle Klauseln erfüllt, d.h. ob I ein Ja–Beispiel ist.

- Wir müssen zeigen, dass für jede Sprache $L \in \mathcal{NP}$ gilt: $L \propto L_{\text{SAT}}$, wobei $L_{\text{SAT}} = L[\text{SAT}, s]$ für ein geeignetes Kodierungsschema s ist.

Beweis

Wir müssen zeigen, dass für jede Sprache $L \in \mathcal{NP}$ gilt: $L \propto L_{\text{SAT}}$, wobei $L_{\text{SAT}} = L[\text{SAT}, s]$ für ein geeignetes Kodierungsschema s ist.

- Dazu muss für alle Sprachen $L \in \mathcal{NP}$ eine polynomiale Transformation f_L angegeben werden, für die gilt, dass für alle $x \in \Sigma^*$ (Σ Alphabet zu L) gilt

$$x \in L \iff f_L(x) \in L_{\text{SAT}}.$$

- Wir benutzen, dass es eine NDTM $\mathcal{M}$ zu L gibt, die L in polynomialer Laufzeit erkennt.

- $\mathcal{M}$ sei gegeben durch $(Q, \Sigma, \sqcup, \Gamma, q_0, \delta, q_J, q_N)$ und akzeptiere die Sprache $L = L_{\mathcal{M}}$ in der Laufzeit $T_{\mathcal{M}} \leq p(n)$, wobei p ein Polynom ist. O.B.d.A. gilt $p(n) \geq n$.

Beweis

- Sei x eine Instanz und $n := |x|$
- Bei einer akzeptierenden Berechnung von $\mathcal{M}$ für $x \in \Sigma^*$ ist die Anzahl der Berechnungsschritte. beschränkt durch $p(n)$.
- An einer so beschränkten Berechnung können höchstens die Zellen $-p(n)$ bis $p(n) + 1$ des Bandes beteiligt sein.

Der Zustand der deterministischen Stufe ist zu jedem Zeitpunkt eindeutig festgelegt durch:

- den jeweiligen Bandinhalt dieser $-p(n)$ bis $p(n) + 1$ Plätze,
- den Zustand der endlichen Kontrolle
- und der Position des Lese-/Schreibkopfs.

Im folgenden beschreiben wir eine Berechnung vollständig durch Variablen

Beweis: Konstruktion der Variablen

Bezeichne

- die Zustände aus Q durch $q_0, q_1 = q_J, q_2 = q_N, q_3, \ldots, q_r$
- die Symbole aus Γ durch $s_0 = \sqcup, s_1, \ldots, s_\ell$ mit $|\Gamma| = \ell + 1$.

Es gibt drei Typen von Variablen in dem zugehörigen Problem SAT

Variable	Gültigkeitsbereich	Bedeutung
$Q[i,k]$	$0 \leq i \leq p(n)$ $0 \leq k \leq r$	zum Zeitpunkt i der Über–prüfungsphase ist $\mathcal{M}$ in Zustand q_k
$H[i,j]$	$0 \leq i \leq p(n)$ $-p(n) \leq j \leq p(n)+1$	zum Zeitpunkt i der Über–prüfungsphase ist der Lese–/Schreibkopf an Position j des Bandes
$S[i,j,k]$	$0 \leq i \leq p(n)$ $-p(n) \leq j \leq p(n)+1$ $0 \leq k \leq \ell$	zum Zeitpunkt i der Über–prüfungsphase ist der Bandinhalt an Position j das Symbol s_k

Beweis: Konstruktion der Variablen

Variable	Gültigkeitsbereich	Bedeutung
$Q[i,k]$	$0 \leq i \leq p(n)$ $0 \leq k \leq r$	zum Zeitpunkt i der Über–prüfungsphase ist $\mathcal{M}$ in Zustand q_k
$H[i,j]$	$0 \leq i \leq p(n)$ $-p(n) \leq j \leq p(n)+1$	zum Zeitpunkt i der Über–prüfungsphase ist der Lese–/ Schreibkopf an Position j des Bandes
$S[i,j,k]$	$0 \leq i \leq p(n)$ $-p(n) \leq j \leq p(n)+1$ $0 \leq k \leq \ell$	zum Zeitpunkt i der Über–prüfungsphase ist der Bandinhalt an Position j das Symbol s_k

- Eine Berechnung von $\mathcal{M}$ induziert in kanonischer Weise eine Wahrheitsbelegung dieser Variablen.
- Wir benutzen folgende Konvention:
- Falls $\mathcal{M}$ vor dem Zeitpunkt $p(n)$ stoppt, bleibt $\mathcal{M}$ in allen folgenden Zuständen in demselben Zustand und der Bandinhalt unverändert.

Beweis: Konstruktion der Variablen

Variable	Gültigkeitsbereich	Bedeutung
$Q[i,k]$	$0 \leq i \leq p(n)$ $0 \leq k \leq r$	zum Zeitpunkt i der Über–prüfungsphase ist $\mathcal{M}$ in Zustand q_k
$H[i,j]$	$0 \leq i \leq p(n)$ $-p(n) \leq j \leq p(n)+1$	zum Zeitpunkt i der Über–prüfungsphase ist der Lese–/ Schreibkopf an Position j des Bandes
$S[i,j,k]$	$0 \leq i \leq p(n)$ $-p(n) \leq j \leq p(n)+1$ $0 \leq k \leq \ell$	zum Zeitpunkt i der Über–prüfungsphase ist der Bandinhalt an Position j das Symbol s_k

Der Bandinhalt zum Zeitpunkt 0 der Überprüfungsphase sei

- Eingabe x auf Platz 1 bis n
- Orakel w auf Platz -1 bis $-|w|$
- ansonsten Blanks.

Beweis

- Eine beliebige Wahrheitsbelegung muss nicht notwendigerweise eine Berechnung induzieren (zum Beispiel $Q[i,k] = Q[i,\ell]$ für $k \neq \ell$).

Also konstruiere Transformation f_L die Klauseln einführt, so dass äquivalent ist:

- Für Eingabe x gibt es eine akzeptierende Berechnung, deren Überprüfungsphase höchstens $p(n)$ Zeit benötigt, und deren Orakel höchstens Länge $p(n)$ hat.
- Es gibt eine erfüllende Belegung für die SAT-Instanz $f_L(x)$.

Beweis

Also konstruiere Transformation f_L die Klauseln einführt, so dass äquivalent ist:

- Für Eingabe x gibt es eine akzeptierende Berechnung, deren Überprüfungsphase höchstens $p(n)$ Zeit benötigt, und deren Orakel höchstens Länge $p(n)$ hat.
- Es gibt eine erfüllende Belegung für die SAT-Instanz $f_L(x)$.

Damit können wir dann schließen:

$x \in L \Leftrightarrow$ es existiert eine akzeptierende Berechnung von $\mathcal{M}$ bei Eingabe x

$\Leftrightarrow$ es existiert eine akzeptierende Berechnung von $\mathcal{M}$ bei Eingabe x mit höchstens $p(n)$ Schritten in der Überprüfungsphase und einem Orakel w der Länge $|w| = p(n)$

$\Leftrightarrow$ es existiert eine erfüllende Wahrheitsbelegung für die Klauselmenge $f_L(x)$

Beweis

Konvention:

- Die Bewegungsrichtung des Kopfes sei $d \in \{-1, 0, 1\}$.

Beweis: Konstruktion der Klauseln - Übersicht

Klausel-gruppe	Einschränkung / Bedeutung
G_1	Zum Zeitpunkt i ist $\mathcal{M}$ in genau einem Zustand.
G_2	Zum Zeitpunkt i hat der Lese-/Schreibkopf genau eine Position.
G_3	Zum Zeitpunkt i enthält jede Bandstelle genau ein Symbol aus Γ.
G_4	Festlegung der Anfangskonfiguration zum Zeitpunkt 0: $\mathcal{M}$ ist im Zustand q_0, der Lese-/Schreibkopf steht an Position 1 des Bandes; in den Zellen 1 bis n steht das Wort $x = s_{k_1} \dots s_{k_n}$
G_5	Bis zum Zeitpunkt $p(n)$ hat $\mathcal{M}$ den Zustand q_J erreicht.
G_6	Zu jedem Zeitpunkt i folgt die Konfiguration von $\mathcal{M}$ zum Zeitpunkt $i+1$ aus einer einzigen Anwendung von δ aus der Konfiguration von $\mathcal{M}$ zum Zeitpunkt i.

Klauselgruppe 1:

Zum Zeitpunkt i ist $\mathcal{M}$ in genau einem Zustand.

Konstruktion:

- Zu jedem Zeitpunkt i ist $\mathcal{M}$ in mindestens einem Zustand

$$Q[i,0] \vee \ldots \vee Q[i,r] \quad \text{für } 0 \leq i \leq p(n)$$

- Zu jedem Zeitpunkt i ist $\mathcal{M}$ in nicht mehr als einem Zustand

$$\overline{Q[i,j]} \vee \overline{Q[i,j']} \quad \text{für } 0 \leq i \leq p(n),\ 0 \leq j < j' \leq r$$

,

Klauselgruppe 2:

Karlsruher Institut für Technologie

Zum Zeitpunkt i hat der Lese-/Schreibkopf genau eine Position

Konstruktion:

- Zum Zeitpunkt i hat der Lese-/Schreibkopf mindestens eine Position

$$H[i, -p(n)] \vee \ldots \vee H[i, p(n) + 1] \quad \text{für } 0 \leq i \leq p(n)$$

- Zum Zeitpunkt i hat der Lese-/Schreibkopf höchstens eine Position

$$\overline{H[i, j]} \vee \overline{H[i, j']} \quad \text{für } 0 \leq i \leq p(n) \text{und} -p(n) \leq j < j' \leq p(n) + 1$$

Klauselgruppe 3:

Zum Zeitpunkt i enthält jede Bandstelle genau ein Symbol

Konstruktion:

- Zum Zeitpunkt i enthält jede Bandstelle mindestens ein Symbol

$$S[i,j,0] \vee S[i,j,1] \vee \ldots \vee S[i,j,\ell] \quad \text{für} \quad \begin{cases} 0 \leq i \leq p(n) \\ -p(n) \leq j \leq p(n)+1 \end{cases}$$

- Zum Zeitpunkt i enthält jede Bandstelle höchstens ein Symbol

$$\overline{S[i,j,k]} \vee \overline{S[i,j,k']} \quad \text{für} \quad \begin{cases} 0 \leq i \leq p(n) \\ -p(n) \leq j \leq p(n)+1 \\ 0 \leq k < k' \leq \ell \end{cases}$$

Klauselgruppe 4:

Festlegung der Anfangskonfiguration zum Zeitpunkt 0

Konstruktion:

- $\mathcal{M}$ ist im Zustand q_0

$$Q[0,0]$$

- der Lese-/Schreibkopf steht an Position 1 des Bandes

$$H[0,1]$$

- in den Zellen 1 bis n steht das Wort $x = s_{k_1} \dots s_{k_n}$

$$\begin{cases} S[0,0,0], S[0,1,k_1], \dots, S[0,n,k_n] & \text{, für Eingabe } x = s_{k_1} \dots s_{k_n} \\ S[0,n+1,0], \dots, S[0,p(n)+1,0] & \text{, alle anderen Positionen} \end{cases}$$

Klauselgruppe 5:

Bis zum Zeitpunkt $p(n)$ hat $\mathcal{M}$ den Zustand q_J erreicht.

Konstruktion:

$$Q[p(n), 1]$$

Klauselgruppe 6:

Zu jedem Zeitpunkt i folgt die Konfiguration von $\mathcal{M}$ zum Zeitpunkt $i+1$ aus einer einzigen Anwendung von δ aus der Konfiguration von $\mathcal{M}$ zum Zeitpunkt i.

Wir unterteilen Klauselgruppe G_6 in zwei Teilgruppen $G_{6,1}$, $G_{6,2}$.

- $G_{6,1}$: Falls $\mathcal{M}$ zum Zeitpunkt i an der Position j das Symbol s_k hat und der Lese-/Schreibkopf nicht an der Position j steht, dann hat $\mathcal{M}$ auch zum Zeitpunkt $i+1$ an Position j das Symbol s_k für $0 \leq i < p(n)$.
- $G_{6,2}$: Der Wechsel von einer Konfiguration zur nächsten entspricht tatsächlich δ.

Klauselgruppe 6,1:

Falls $\mathcal{M}$ zum Zeitpunkt i an der Position j das Symbol s_k hat und der Lese-/Schreibkopf nicht an der Position j steht, dann hat $\mathcal{M}$ auch zum Zeitpunkt $i+1$ an Position j das Symbol s_k für $0 \leq i < p(n)$.

Konstruktion:

$$\left(\left(S[i,j,k] \wedge \overline{H[i,j]}\right) \Longrightarrow S[i+1,j,k]\right)$$

Dies ergibt die Klausel

$$\left(\overline{S[i,j,k]} \vee H[i,j] \vee S[i+1,j,k]\right)$$

Klauselgruppe 6,2:

Der Wechsel von einer Konfiguration zur nächsten entspricht tatsächlich δ.

- Sei $\delta(q_k, s_m) = (q_\kappa, s_\mu, d)$.
- Œ sei q_k aus $Q \backslash \{q_J, q_N\}$ sonst gilt $q_\kappa = q_k$, $s_\mu = s_m$ und $d = 0$.

$$(H[i,j] \wedge Q[i,k] \wedge S[i,j,m]) \Rightarrow H[i+1, j+d]$$
$$\text{und } (H[i,j] \wedge Q[i,k] \wedge S[i,j,m]) \Rightarrow Q[i+1, \kappa]$$
$$\text{und } (H[i,j] \wedge Q[i,k] \wedge S[i,j,m]) \Rightarrow S[i+1, j, \mu]$$

Dies ergibt folgende Klauseln

$$\overline{H[i,j]} \vee \overline{Q[i,k]} \vee \overline{S[i,j,m]} \vee H[i+1, j+d]$$
$$\overline{H[i,j]} \vee \overline{Q[i,k]} \vee \overline{S[i,j,m]} \vee Q[i+1, \kappa]$$
$$\overline{H[i,j]} \vee \overline{Q[i,k]} \vee \overline{S[i,j,m]} \vee S[i+1, j, \mu]$$

für $0 \leq i < p(n),\ -p(n) \leq j \leq p(n)+1,\ 0 \leq k \leq r,\ 0 \leq m \leq \ell$

Konstruktion der Klauseln - Zwischenergebnis

- Durch f_L wird nun ein Input $(\mathcal{M}, x)$ auf die Klauselmenge

$$G := G_1 \wedge G_2 \wedge \ldots \wedge G_6$$

  abgebildet.
- Wenn $x \in L$, dann ist G erfüllbar.
- Eine erfüllende Wahrheitsbelegung der Variablen aus G induziert eine akzeptierende Berechnung von $\mathcal{M}$ für die Eingabe $x \in$ L.

Polynomialität der Transformation

Wir schätzen die Anzahl der Literale in den Klauselgruppen ab.

Polynomialität - Klauselgruppe 1:

Zum Zeitpunkt i ist $\mathcal{M}$ in genau einem Zustand.

Konstruktion:

- Zu jedem Zeitpunkt i ist $\mathcal{M}$ in mindestens einem Zustand

$$Q[i,0] \vee \ldots \vee Q[i,r] \quad \text{für } 0 \leq i \leq p(n)$$

- Zu jedem Zeitpunkt i ist $\mathcal{M}$ in nicht mehr als einem Zustand

$$\overline{Q[i,j]} \vee \overline{Q[i,j']} \quad \text{für } 0 \leq i \leq p(n),\ 0 \leq j < j' \leq r$$

,

Abschätzung:

$$(p(n)+1)(r+1) + (p(n)+1)\frac{1}{2}(r(r+1))$$

Polynomialität - Klauselgruppe 2:

Karlsruher Institut für Technologie

Zum Zeitpunkt i hat der Lese-/Schreibkopf genau eine Position

Konstruktion:

- Zum Zeitpunkt i hat der Lese-/Schreibkopf mindestens eine Position

$$H[i,-p(n)] \vee \ldots \vee H[i,p(n)+1] \quad \text{für } 0 \leq i \leq p(n)$$

- Zum Zeitpunkt i hat der Lese-/Schreibkopf höchstens eine Position

$$\overline{H[i,j]} \vee \overline{H[i,j']} \quad \text{für } 0 \leq i \leq p(n) \text{und} -p(n) \leq j < j' \leq p(n)+1$$

Abschätzung:

$$(p(n)+1)(2p(n)+1) + (p(n)+1)\frac{1}{2}(2p(n)\cdot(2p(n)+1))$$

Polynomialität - Klauselgruppe 3:

Zum Zeitpunkt *i* enthält jede Bandstelle genau ein Symbol

Konstruktion:

- Zum Zeitpunkt *i* enthält jede Bandstelle mindestens ein Symbol

$$S[i,j,0] \vee S[i,j,1] \vee \ldots \vee S[i,j,\ell] \quad \text{für} \quad \begin{cases} 0 \leq i \leq p(n) \\ -p(n) \leq j \leq p(n)+1 \end{cases}$$

- Zum Zeitpunkt *i* enthält jede Bandstelle höchstens ein Symbol

$$\overline{S[i,j,k]} \vee \overline{S[i,j,k']} \quad \text{für} \quad \begin{cases} 0 \leq i \leq p(n) \\ -p(n) \leq j \leq p(n)+1 \\ 0 \leq k < k' \leq \ell \end{cases}$$

Abschätzung:

$$(p(n)+1)(2p(n)+1)(\ell+1) + (p(n)+1)(2p(n)+1)\frac{1}{2}(\ell(\ell+1))$$

Polynomialität - Klauselgruppe 4:

Festlegung der Anfangskonfiguration zum Zeitpunkt 0

- $\mathcal{M}$ ist im Zustand q_0

$$Q[0,0]$$

- der Lese-/Schreibkopf steht an Position 1 des Bandes

$$H[0,1]$$

- in den Zellen 1 bis n steht das Wort $x = s_{k_1} \dots s_{k_n}$

$$\begin{cases} S[0,0,0], S[0,1,k_1], \dots, S[0,n,k_n] & \text{, für Eingabe } x = s_{k_1} \dots s_{k_n} \\ S[0,n+1,0], \dots, S[0,p(n)+1,0] & \text{, alle anderen Positionen} \end{cases}$$

Abschätzung:

$$2 + (n+1) + (p(n) + 2 - (n+1)) = p(n) + 4$$

Polynomialität - Klauselgruppe 5:

Bis zum Zeitpunkt $p(n)$ hat $\mathcal{M}$ den Zustand q_J erreicht.

Konstruktion:

$$Q[p(n), 1]$$

Abschätzung:

$$1$$

Polynomialität - Klauselgruppe 6,1:

Falls $\mathcal{M}$ zum Zeitpunkt i an der Position j das Symbol s_k hat und der Lese-/Schreibkopf nicht an der Position j steht, dann hat $\mathcal{M}$ auch zum Zeitpunkt $i+1$ an Position j das Symbol s_k für $0 \leq i < p(n)$.

Konstruktion:

$$\Big(\Big(S[i,j,k] \wedge \overline{H[i,j]}\Big) \Longrightarrow S[i+1,j,k]\Big)$$

Dies ergibt die Klausel

$$\Big(\overline{S[i,j,k]} \vee H[i,j] \vee S[i+1,j,k]\Big)$$

Abschätzung:

$$p(n)(\ell+1)(2p(n)+2)\cdot 3$$

Polynomialität - Klauselgruppe 6,2:

Der Wechsel von einer Konfiguration zur nächsten entspricht tatsächlich δ.

- Sei $\delta(q_k, s_m) = (q_\kappa, s_\mu, d)$.
- Œ sei q_k aus $Q \backslash \{q_J, q_N\}$ sonst gilt $q_\kappa = q_k$, $s_\mu = s_m$ und $d = 0$.

$$\overline{H[i,j]} \vee \overline{Q[i,k]} \vee \overline{S[i,j,m]} \vee H[i+1, j+d]$$
$$\overline{H[i,j]} \vee \overline{Q[i,k]} \vee \overline{S[i,j,m]} \vee Q[i+1, \kappa]$$
$$\overline{H[i,j]} \vee \overline{Q[i,k]} \vee \overline{S[i,j,m]} \vee S[i+1, j, \mu]$$

für $0 \leq i < p(n),\ -p(n) \leq j \leq p(n)+1,\ 0 \leq k \leq r,\ 0 \leq m \leq \ell$

Abschätzung:

$$p(n)(p(n)+2)(r+1)(\ell+1) \cdot 3 \cdot 4$$

Polynomialität der Transformation

Wir schätzen die Anzahl der Literale in den Klauselgruppen ab.

- G_1: $(p(n)+1)(r+1)+(p(n)+1)\frac{1}{2}(r(r+1))$
- G_2: $(p(n)+1)(2p(n)+1)+(p(n)+1)\frac{1}{2}(2p(n)\cdot(2p(n)+1))$
- G_3: $(p(n)+1)(2p(n)+1)(\ell+1)+(p(n)+1)(2p(n)+1)\frac{1}{2}(\ell(\ell+1))$
- G_4: $2+(n+1)+(p(n)+2-(n+1))=p(n)+4$
- G_5: 1
- G_6: $\underbrace{p(n)(\ell+1)(2p(n)+2)\cdot 3}_{G_{6,1}}+\underbrace{p(n)(p(n)+2)(r+1)(\ell+1)\cdot 3\cdot 4}_{G_{6,2}}$

Polynomialität der Transformation

Wir schätzen die Anzahl der Literale in den Klauselgruppen ab.

- G_1: $(p(n)+1)(r+1)+(p(n)+1)\frac{1}{2}(r(r+1))$
- G_2: $(p(n)+1)(2p(n)+1)+(p(n)+1)\frac{1}{2}(2p(n)\cdot(2p(n)+1))$
- G_3: $(p(n)+1)(2p(n)+1)(\ell+1)+(p(n)+1)(2p(n)+1)\frac{1}{2}(\ell(\ell+1))$
- G_4: $2+(n+1)+(p(n)+2-(n+1))=p(n)+4$
- G_5: 1
- G_6: $\underbrace{p(n)(\ell+1)(2p(n)+2)\cdot 3}_{G_{6,1}}+\underbrace{p(n)(p(n)+2)(r+1)(\ell+1)\cdot 3\cdot 4}_{G_{6,2}}$

- r und ℓ sind Konstanten, die durch $\mathcal{M}$ (und damit durch L) induziert werden
- $p(n)$ ist ein Polynom in n

Polynomialität der Transformation

Wir schätzen die Anzahl der Literale in den Klauselgruppen ab.

- G_1: $(p(n)+1)(r+1)+(p(n)+1)\frac{1}{2}(r(r+1))$
- G_2: $(p(n)+1)(2p(n)+1)+(p(n)+1)\frac{1}{2}(2p(n)\cdot(2p(n)+1))$
- G_3: $(p(n)+1)(2p(n)+1)(\ell+1)+(p(n)+1)(2p(n)+1)\frac{1}{2}(\ell(\ell+1))$
- G_4: $2+(n+1)+(p(n)+2-(n+1))=p(n)+4$
- G_5: 1
- G_6: $\underbrace{p(n)(\ell+1)(2p(n)+2)\cdot 3}_{G_{6,1}}+\underbrace{p(n)(p(n)+2)(r+1)(\ell+1)\cdot 3\cdot 4}_{G_{6,2}}$

- Also sind alle Größen polynomial in n.
- Die angegebene Funktion f_L ist damit eine polynomiale Transformation von L nach L_{SAT}.

Das Problem 3-SAT

Karlsruher Institut für Technologie

Problem 3-SAT

Gegeben: Menge U von Variablen
Menge C von Klauseln über U
jede Klausel enthält genau *drei* Literale

Frage: Existiert eine erfüllende Wahrheitsbelegung für C?

Das Problem 3-SAT

Problem 3-SAT

Gegeben: Menge U von Variablen
Menge C von Klauseln über U
jede Klausel enthält genau *drei* Literale

Frage: Existiert eine erfüllende Wahrheitsbelegung für C?

Satz:
Das Problem 3SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

Karlsruher Institut für Technologie

3SAT$\in \mathcal{NP}$:

- Für eine feste Wahrheitsbelegung t kann in polynomialer Zeit $O(|C|)$ überprüft werden, ob t alle Klauseln aus C erfüllt.

Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

Karlsruher Institut für Technologie

SAT $\propto$ 3SAT:

- Wir geben eine polynomiale Transformation f von SAT zu 3SAT an.
- Gegeben sei eine SAT-Instanz I

Wir konstruieren eine 3SAT-Instanz $f(I)$ indem wir jede Klausel c in I einzeln auf Klausel(n) $f(c)$ in $f(I)$ abbilden:

- Besteht die Klausel $c = x$ aus **einem** Literal, so wird c auf $x \vee x \vee x$ abgebildet.
- Besteht die Klausel $c = x \vee y$ aus **zwei** Literalen, so wird c auf $x \vee y \vee x$ abgebildet.
- Besteht die Klausel c aus **drei** Literalen, so wird c auf sich selbst abgebildet.

Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

Wir konstruieren eine 3SAT-Instanz $f(I)$ indem wir jede Klausel c in I einzeln auf Klausel(n) $f(c)$ in $f(I)$ abbilden:

- Besteht die Klausel $c = x_1 \vee \ldots \vee x_k$ aus $k > 3$ Literalen, bilde c wie folgt ab:
  - Führe $k - 3$ neue Variablen $y_{c,1}, \ldots, y_{c,k-3}$ ein.
  - Bilde c auf die folgenden $k - 2$ Klauseln ab:

$$
\begin{aligned}
x_1 \vee x_2 \vee y_{c,1} \\
\overline{y_{c,1}} \vee x_3 \vee y_{c,2} \\
\vdots \\
\overline{y_{c,k-4}} \vee x_{k-2} \vee y_{c,k-3} \\
\overline{y_{c,k-3}} \vee x_{k-1} \vee x_k
\end{aligned}
$$

- Diese Klauseln lassen sich in Zeit $\mathcal{O}(|C| \cdot |U|)$ konstruieren.

Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

Noch zu zeigen:

- I ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ $f(I)$ ist erfüllbar

Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

I ist erfüllbar $\Rightarrow$ $f(I)$ ist erfüllbar

- Sei die SAT-Instanz I erfüllbar
- Wir setzen eine erfüllende Wahrheitsbelegung von I auf $f(I)$ fort
- Wir untersuchen jede Klausel $c = x_1 \vee \ldots \vee x_k$ in I einzeln
- Es ist mindestens ein x_i `wahr`
- Fall $k \leq 3$: Damit ist auch $f(c)$ `wahr`.
- Fall $k > 3$. Falls $x_1 =$ `wahr` oder $x_2 =$ `wahr` ist, setze

$$y_{c,j} \equiv \texttt{falsch}$$

sonst setze, für ein $i > 2$ mit $x_i =$ `wahr`,

$$y_{c,j} = \begin{cases} \texttt{wahr} & \text{falls } 1 \leq j \leq i-2 \\ \texttt{falsch} & \text{falls } i-1 \leq j \leq k-3 \end{cases}$$

- Diese Erweiterung erfüllt alle Klauseln in $f(c)$

Beweis: NP-Vollständigkeit von 3-SAT

I ist erfüllbar $\Leftarrow$ $f(I)$ ist erfüllbar

- Wir zeigen: I ist nicht erfüllbar $\Rightarrow$ $f(I)$ ist nicht erfüllbar.
- Sei also die SAT-Instanz I nicht erfüllbar.
- Wir betrachten eine beliebige Belegung der Variablen von $f(I)$
- Da I nicht erfüllbar ist, gibt es eine Klausel $c = x_1 \vee \ldots \vee x_k$ in I bei der alle Literale x_i auf `falsch` gesetzt sind.
- c wird abgebildet auf

$$
\begin{aligned}
x_1 \vee x_2 \vee y_{c,1} \\
\overline{y_{c,1}} \vee x_3 \vee y_{c,2} \\
\vdots \\
\overline{y_{c,k-4}} \vee x_{k-2} \vee y_{c,k-3} \\
\overline{y_{c,k-3}} \vee x_{k-1} \vee x_k
\end{aligned}
$$

- Um $f(c)$ zu erfüllen, müßten alle $y_{c,j}$ `wahr` sein
- Dann ist die letzte Klausel $\overline{y_{c_{k-3}}} \vee x_{k-1} \vee x_k$ nicht erfüllt.
- Also ist die 3SAT–Instanz $f(I)$ nicht erfüllbar.

Das Problem 2SAT

Karlsruher Institut für Technologie

Problem 2SAT

Gegeben: Menge U von Variablen
Menge C von Klauseln über U
wobei jede Klausel genau zwei Literale enthält

Frage: Existiert eine erfüllende Wahrheitsbelegung für C?

Das Problem 2SAT liegt in $\mathcal{P}$.

Beweis: Übung

Das Problem MAX2SAT

Karlsruher Institut für Technologie

Problem MAX2SAT

Gegeben: Menge U von Variablen
Menge C von Klauseln über U
wobei jede Klausel genau zwei Literale enthält
Zahl $K \in \mathbb{N}$

Frage: Existiert eine Wahrheitsbelegung, die mindestens K Klauseln erfüllt?

Das Problem MAX2SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

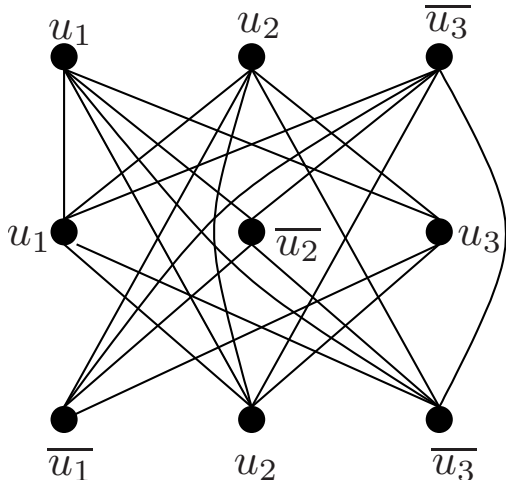
Beweis: Übung

Das Problem CLIQUE

Eine **Clique** in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge $V' \subseteq V$ so, dass für alle $i, j \in V'$, $i \neq j$, gilt: $\{i, j\} \in E$.

Problem CLIQUE

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter $K \leq |V|$
Frage: Gibt es in G eine Clique der Größe mindestens K?



Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

Karlsruher Institut für Technologie

Satz:
Das Problem CLIQUE ist $\mathcal{NP}$–vollständig.

CLIQUE $\in \mathcal{NP}$
Beweis: Übung.

Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

Karlsruher Institut für Technologie

3SAT $\propto$ CLIQUE

- Sei $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ eine 3SAT-Instanz mit $c_i = x_{i1} \vee x_{i2} \vee x_{i3}$ und $x_{ij} \in \{u_1, \ldots, u_m, \overline{u_1}, \ldots, \overline{u_m}\}$.

Wir transformieren C in eine CLIQUE-Instanz $(G = (V, E), K)$

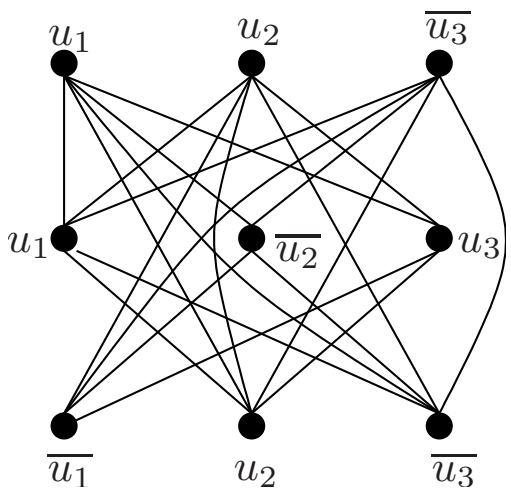
- V enthält $3n$ Knoten v_{ij} für $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq 3$
- v_{ij} und $v_{k\ell}$ sind durch Kanten aus E verbunden genau dann, wenn:
  - $i \neq k$ (Literale sind in verschiedenen Klauseln)
  - $x_{ij} \neq \overline{x_{kl}}$ (Literale sind gleichzeitig erfüllbar)
- Wir setzen $K := n$

Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

- V enthält $3n$ Knoten v_{ij} für $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq 3$
- v_{ij} und $v_{k\ell}$ sind durch Kanten aus E verbunden genau dann, wenn:
  - $i \neq k$ (Literale sind in verschiedenen Klauseln)
  - $x_{ij} \neq \overline{x_{kl}}$ (Literale sind gleichzeitig erfüllbar)

Beispiel: Sei $C = \{u_1 \vee u_2 \vee \overline{u_3},\ u_1 \vee \overline{u_2} \vee u_3,\ \overline{u_1} \vee u_2 \vee \overline{u_3}\}$.

Knotennummer	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{21}	v_{22}	v_{23}	v_{31}	v_{32}	v_{33}
Literal	u_1	u_2	$\overline{u_3}$	u_1	$\overline{u_2}$	u_3	$\overline{u_1}$	u_2	$\overline{u_3}$.



Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

- Die Transformation kann in polynomieller Zeit berechnet werden.

Noch zu zeigen:

- 3SAT-Instanz C ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ CLIQUE-Instanz (G, K) ist erfüllbar

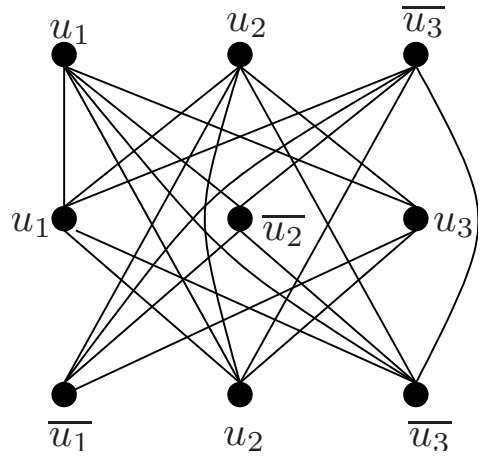
Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

3SAT-Instanz C ist erfüllbar $\Rightarrow$ CLIQUE-Instanz (G, K) ist erfüllbar

- Wähle eine beliebige erfüllende Wahrheitsbelegung von C
- Wähle in jeder Klausel ein wahres Literal
- Die entsprechenden Knoten in G bilden eine Clique der Größe n

Beispiel: Sei $C = \{u_1 \vee u_2 \vee \overline{u_3},\ u_1 \vee \overline{u_2} \vee u_3,\ \overline{u_1} \vee u_2 \vee \overline{u_3}\}$.

Knotennummer	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{21}	v_{22}	v_{23}	v_{31}	v_{32}	v_{33}
Literal	u_1	u_2	$\overline{u_3}$	u_1	$\overline{u_2}$	u_3	$\overline{u_1}$	u_2	$\overline{u_3}$.



Beweis: NP-Vollständigkeit von CLIQUE

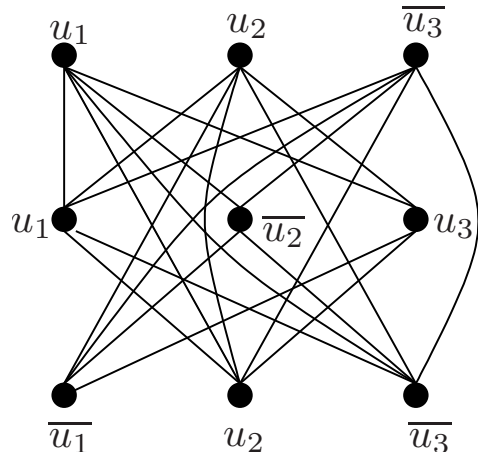
3SAT-Instanz C ist erfüllbar $\Leftarrow$ CLIQUE-Instanz (G, K) ist erfüllbar

- Wähle eine Clique V' der Größe n in G
- Die entsprechenden Literale sind
  - gleichzeitig erfüllbar
  - decken alle Klauseln ab

  und induzieren deswegen eine erfüllende Wahrheitsbelegung von C.

Beispiel: Sei $C = \{u_1 \vee u_2 \vee \overline{u_3},\ u_1 \vee \overline{u_2} \vee u_3,\ \overline{u_1} \vee u_2 \vee \overline{u_3}\}$.

Knotennummer	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{21}	v_{22}	v_{23}	v_{31}	v_{32}	v_{33}
Literal	u_1	u_2	$\overline{u_3}$	u_1	$\overline{u_2}$	u_3	$\overline{u_1}$	u_2	$\overline{u_3}$.



Das Problem COLOR

Problem COLOR

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ und ein Parameter $K \in \mathbb{N}$.

Frage: Gibt es eine Knotenfärbung von G mit höchstens K Farben, so dass je zwei adjazente Knoten verschiedene Farben besitzen?

3COLOR bezeichnet das Problem COLOR mit festem Parameter $k = 3$.

Satz:
Das Problem 3COLOR ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Beweis: NP-Vollständigkeit von 3COLOR

Karlsruher Institut für Technologie

3COLOR $\in \mathcal{NP}$

- Es kann in Zeit $\mathcal{O}(|E|)$ überprüft werden, ob eine Färbung von Graph $G = (V, E)$ mit drei Farben zulässig ist.

Beweis: NP-Vollständigkeit von 3COLOR

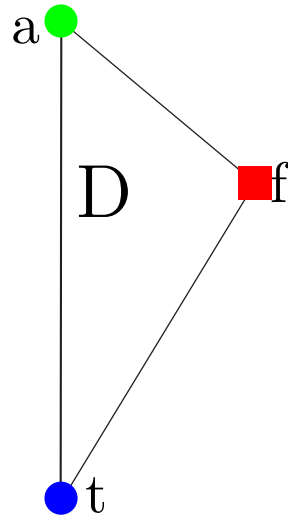
Karlsruher Institut für Technologie

3SAT $\propto$ 3COLOR

- Sei I eine 3SAT-Instanz mit Variablen $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ und Klauseln $\{c_1, \ldots, c_n\}$
- Wir konstruieren in Polynomialzeit eine 3COLOR-Instanz G
- Es soll gelten: I ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ G ist 3-färbbar

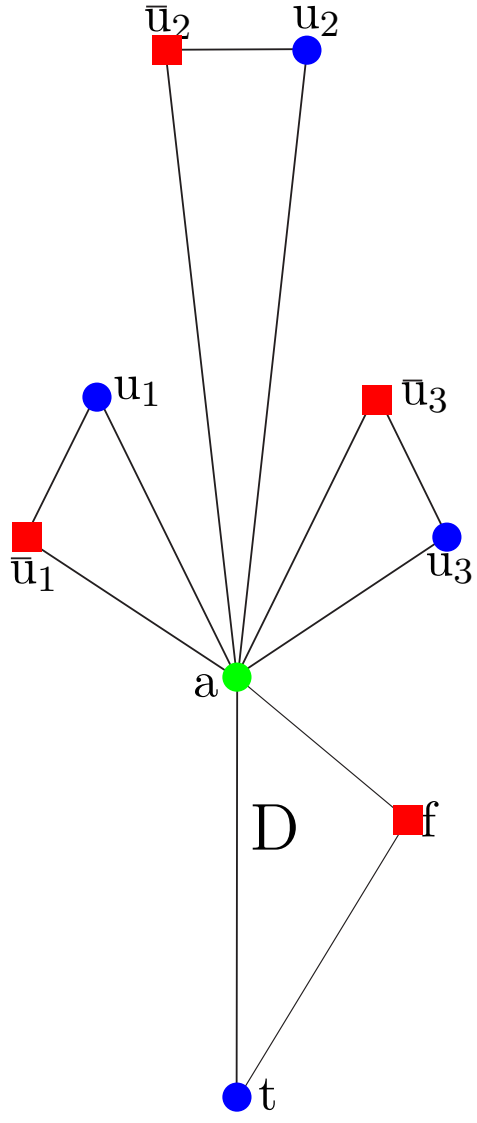
Der Graph *G* enthält

- Ein ‘Hauptdreieck’ aus Knoten {t,f,a} und Kanten {{t,f}, {f,a }, {t,a } }
- Interpretation: t,f,a sind die drei Farben mit denen *G* gefärbt wird
- Interpretation: t: wahr,f: falsch



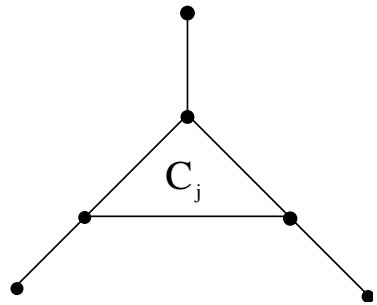
Der Graph G enthält

- Für jede Variable $u \in U$ ein Dreieck D_u mit Eckknoten $u, \overline{u}, a$
- Interpretation: Falls u mit t gefärbt ist, muss $\overline{u}$ mit f gefärbt sein



Der Graph G enthält

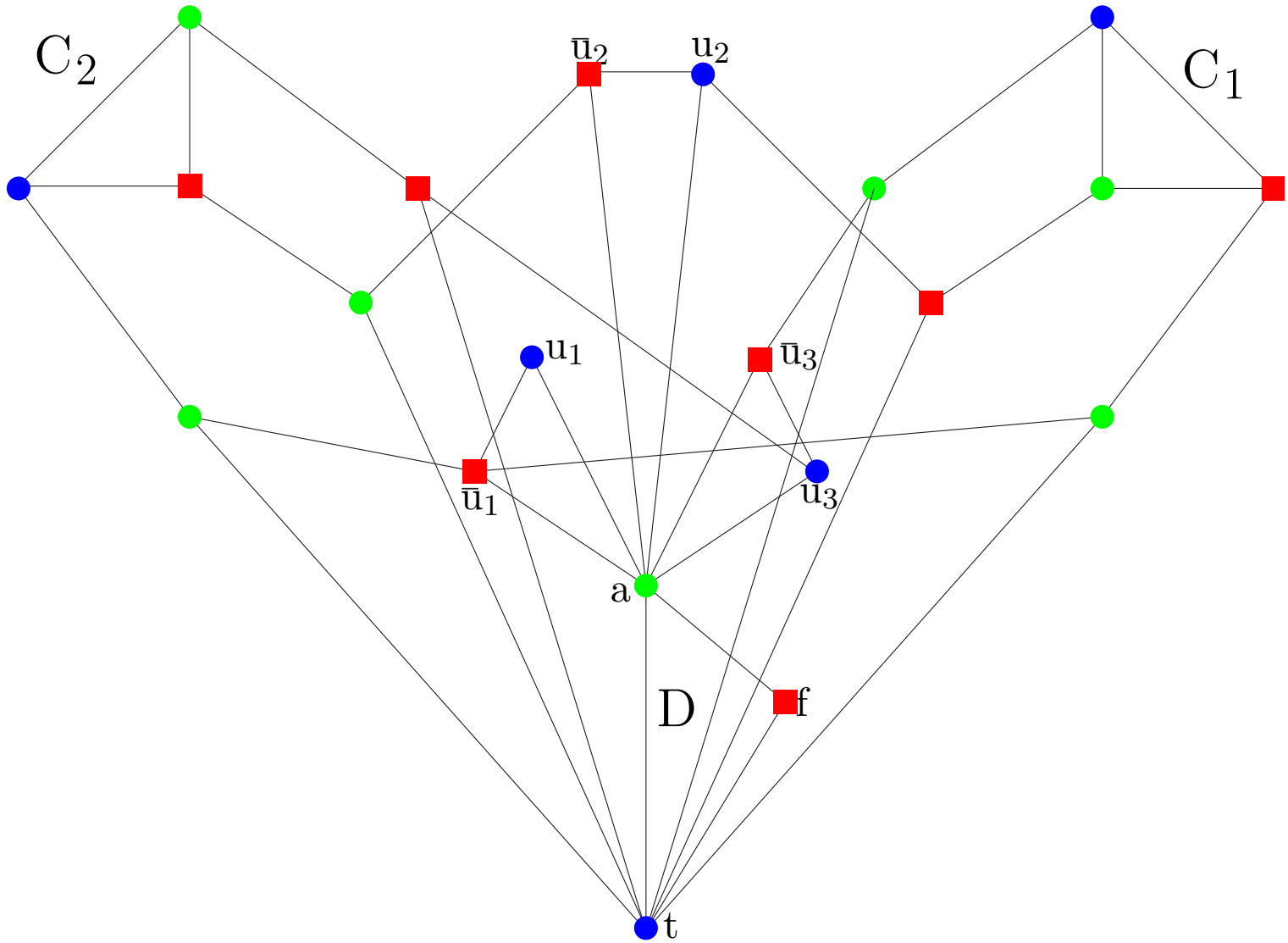
- für jede Klausel $c_j = x \vee y \vee z$ eine Komponente C_j wie folgt
- C_j besteht aus sechs Knoten: einem „inneren Dreieck“ und drei „Satelliten“



- Jeder der drei Satelliten wird mit einem der Literale x, y, z verbunden
- Alle drei Satelliten werden mit dem Eckknoten t in D verbunden.

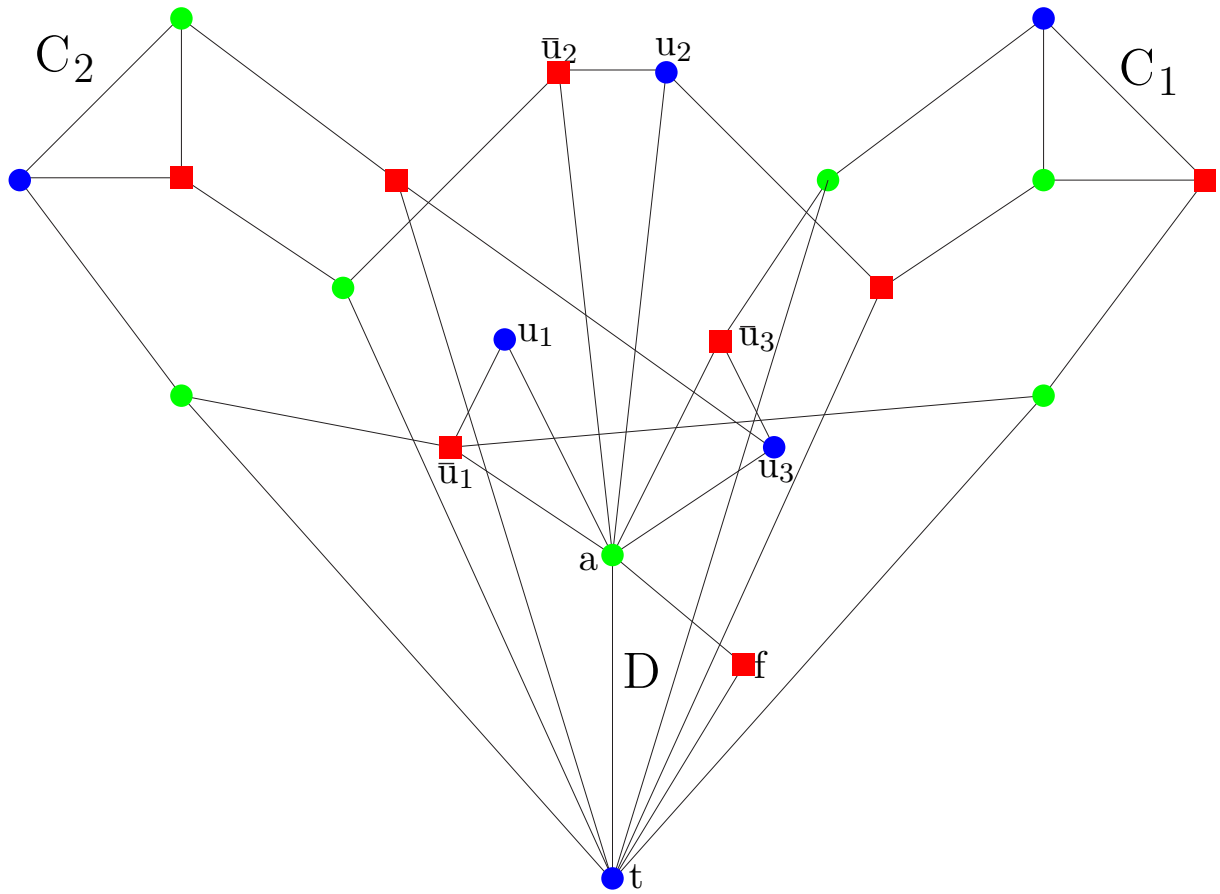
Beispielgraph zur Reduktion

$c_1 = \bar{u}_1 \vee u_2 \vee \bar{u}_3, c_2 = \bar{u}_1 \vee \bar{u}_2 \vee u_3$



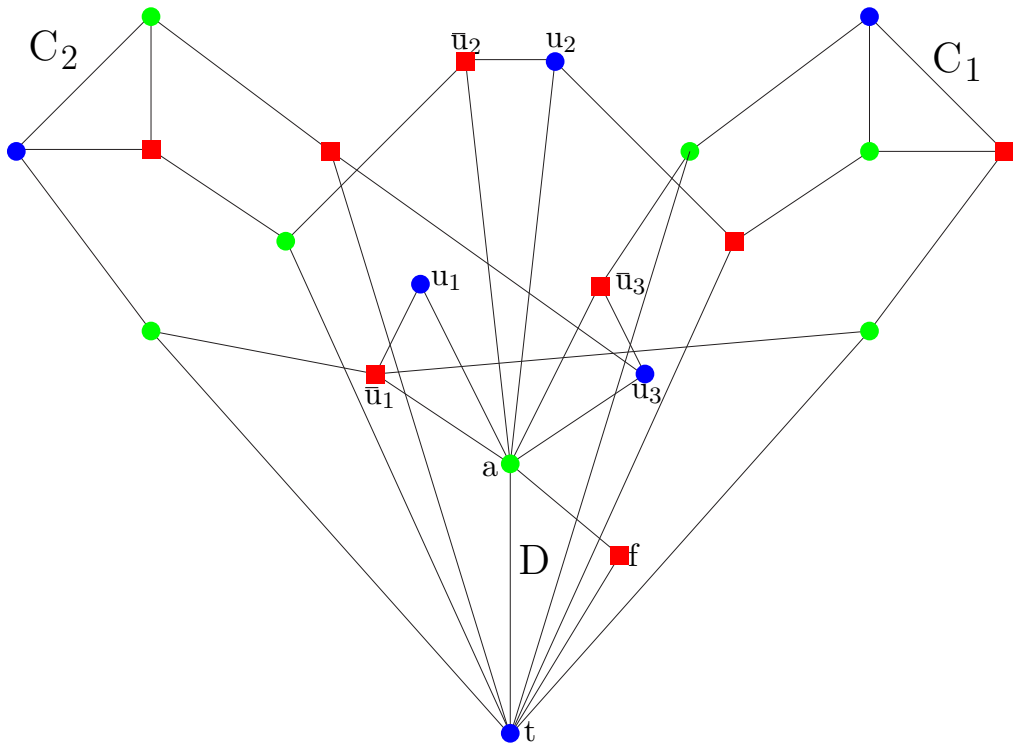
Polynomialität der Reduktion

- Die Knotenanzahl von G liegt in $\mathcal{O}(n+m)$.
- Deswegen ist die Transformation polynomial.



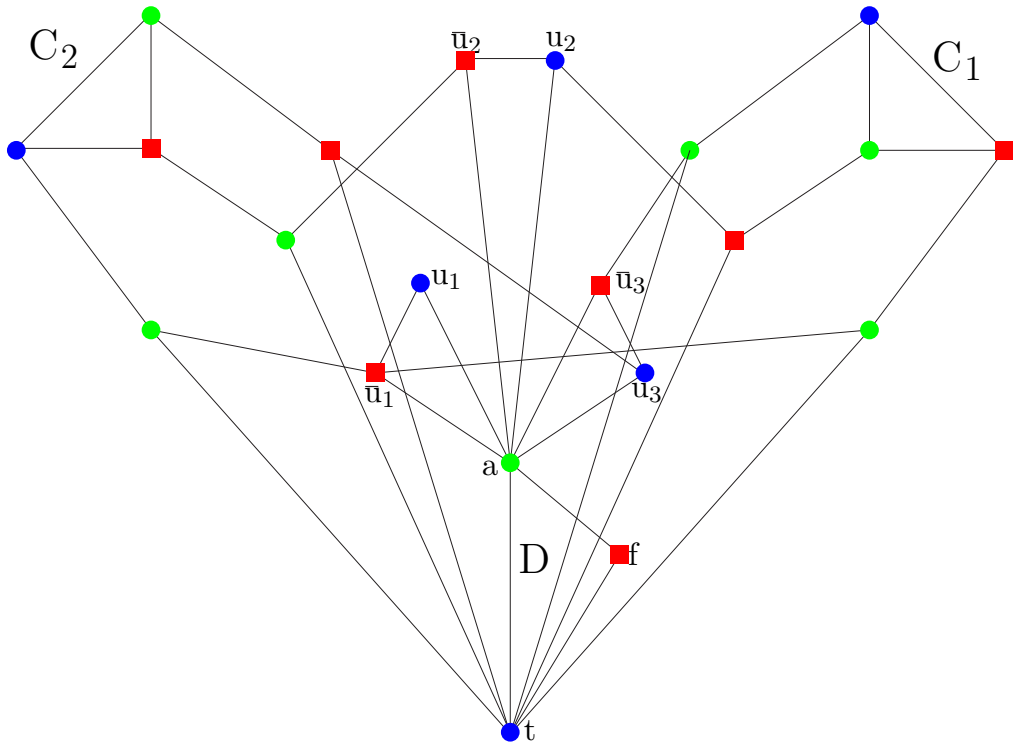
Instanz I erfüllbar $\Rightarrow$ Instanz G erfüllbar

- Betrachte zulässige Wahrheitsbelegung für *I*
- Färbe wahre Literale mit t, falsche Literale mit f
- Im Klausel-Gadget:
  - Färbe Satelliten zu einem beliebigen wahren Literal mit f
  - Färbe die beiden anderen Satelliten mit a
  - Inneres Dreieck kann dann zulässig gefärbt werden



Instanz I erfüllbar $\Leftarrow$ Instanz G erfüllbar

- Betrachte Dreifärbung von *G*
- Färbung von Literal-Knoten induziert eine gültige Wahrheitsbelegung von *I*



Das Problem EXACT COVER

Karlsruher Institut für Technologie

Problem EXACT COVER

Gegeben: Eine endliche Menge X und eine Familie $\mathcal{S}$ von Teilmengen von X.

Frage: Existiert eine Menge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, so dass jedes Element aus X in genau einer Menge aus $\mathcal{S}'$ liegt?

Das Problem EXACT COVER

Karlsruher Institut für Technologie

Problem EXACT COVER

Gegeben: Eine endliche Menge X und eine Familie $\mathcal{S}$ von Teilmengen von X.

Frage: Existiert eine Menge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, so dass jedes Element aus X in genau einer Menge aus $\mathcal{S}'$ liegt?

Beispiel:

$$X = \{1, 2, \ldots, 7\}$$
$$\mathcal{S} = \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3\}, \{5,6,7\}, \{4,5,6\}, \{4,5,7\}, \{4,6,7\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{6,7\}\}$$

Ist $(X, \mathcal{S})$ eine Ja-Instanz?

Das Problem EXACT COVER

Karlsruher Institut für Technologie

Problem EXACT COVER

Gegeben: Eine endliche Menge X und eine Familie $\mathcal{S}$ von Teilmengen von X.

Frage: Existiert eine Menge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, so dass jedes Element aus X in genau einer Menge aus $\mathcal{S}'$ liegt?

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
X &= \{1, 2, \ldots, 7\} \\
\mathcal{S} &= \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3\}, \\
&\quad \{5,6,7\}, \{4,5,6\}, \{4,5,7\}, \{4,6,7\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{6,7\}\} \\
\mathcal{S}' &= \{\{1,5\}, \{2,3,4\}, \{6,7\}\}
\end{aligned}
$$

Ja

Das Problem EXACT COVER

Karlsruher Institut für Technologie

Problem EXACT COVER

Gegeben: Eine endliche Menge X und eine Familie $\mathcal{S}$ von Teilmengen von X.

Frage: Existiert eine Menge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, so dass jedes Element aus X in genau einer Menge aus $\mathcal{S}'$ liegt?

Problem EXACT COVER ist $\mathcal{NP}$–vollständig.

Beweis: NP-Vollständigkeit von EXACT COVER

Karlsruher Institut für Technologie

EXACT COVER $\in \mathcal{NP}$

- Es kann in Polynomialzeit überprüft werden, ob eine Teilmenge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ aus disjunkten Mengen besteht und X überdeckt.

Beweis: NP-Vollständigkeit von EXACT COVER

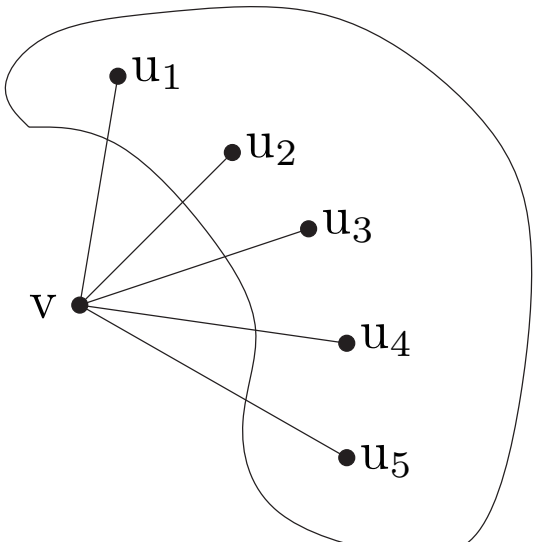
Karlsruher Institut für Technologie

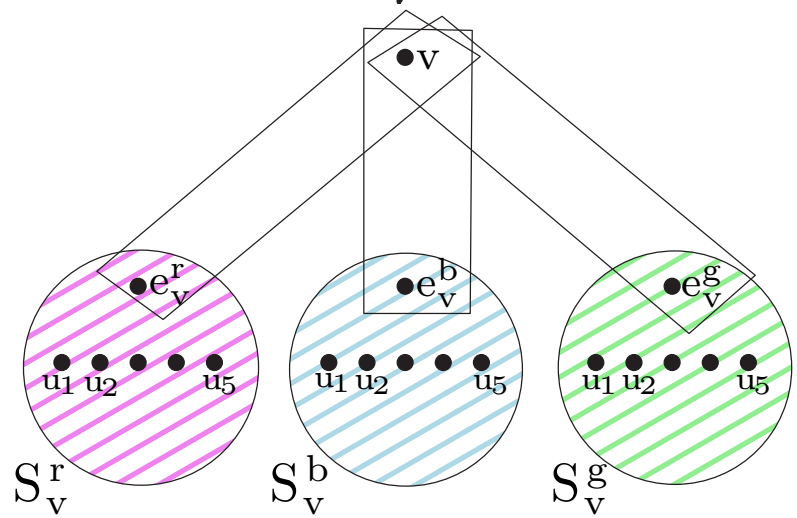
3COLOR $\propto$ EXACT COVER

- Sei $G = (V, E)$ eine 3COLOR-Instanz
- Wir konstruieren in Polynomialzeit eine EXACT COVER-Instanz $(X, \mathcal{S})$
- Es soll gelten: G ist 3-färbbar $\Leftrightarrow$ $(X, \mathcal{S})$ ist erfüllbar

Konstruktion von (X,S)

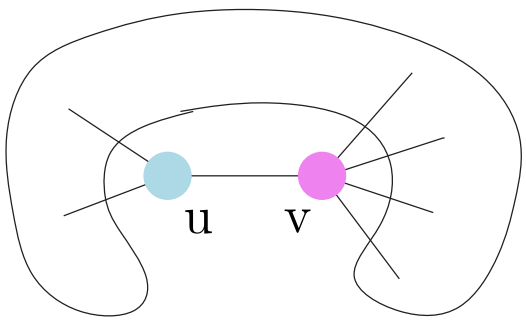
- Sei $C = \{r(ot), b(lau), g(rün)\}$
- Sei $N(v) := \{u \in V : \{u, v\} \in E\}$ die Nachbarschaft von v.
- Für jedes $v \in V$ enthalte X ein „Element“ v und jeweils $3 \cdot |N(v)| + 3$ zusätzliche Elemente.
- Zu jedem $v \in V$ gebe es in $\mathcal{S}$ drei disjunkte Mengen S_v^r, S_v^b, S_v^g mit jeweils $|N(v)| + 1$ Elementen.
- Außerdem enthalte $\mathcal{S}$ für jedes v drei zweielementige Mengen $\{v, e_v^r\}, \{v, e_v^b\}$ und $\{v, e_v^g\}$ mit $e_v^r \in S_v^r$, $e_v^b \in S_v^b$ und $e_v^g \in S_v^g$.
- **Interpretation:** S_v^r entspricht der „Farbe“ r, enthält für jeden Knoten aus $N(v)$ eine Kopie und einen zusätzlichen Knoten e_v^r.

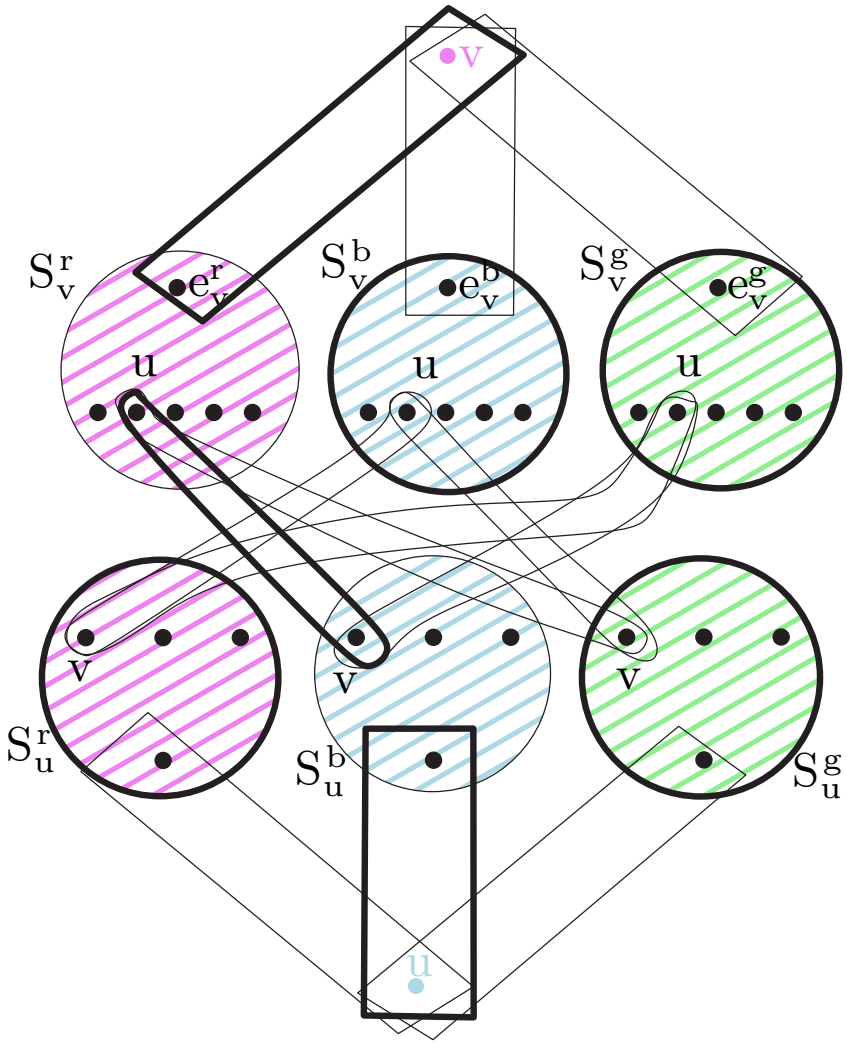




Konstruktion von (X,S)

- Außerdem enthält $\mathcal{S}$ für jede Kante $\{u, v\} \in E$ und je zwei $c, c' \in C$, $c \neq c'$, die zweielementigen Mengen $\{u_v^c, v_u^{c'}\}$, $u_v^c \in S_v^c$ „Kopie“ von u, $v_u^{c'} \in S_u^{c'}$ „Kopie“ von v.





Konstruktion von (X,S)

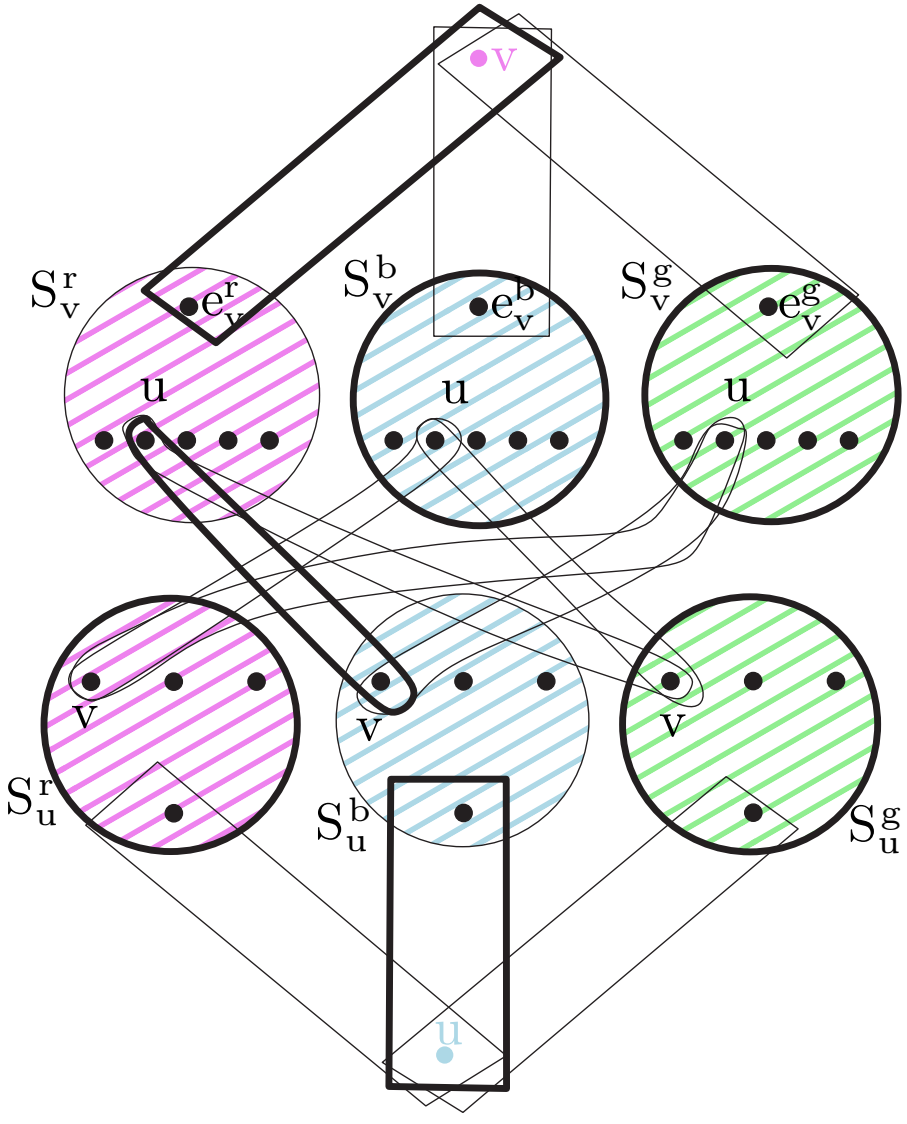
- Die Konstruktion ist polynomial.

Noch zu zeigen:

- G ist 3-färbbar $\Leftrightarrow$ $(X, \mathcal{S})$ ist erfüllbar

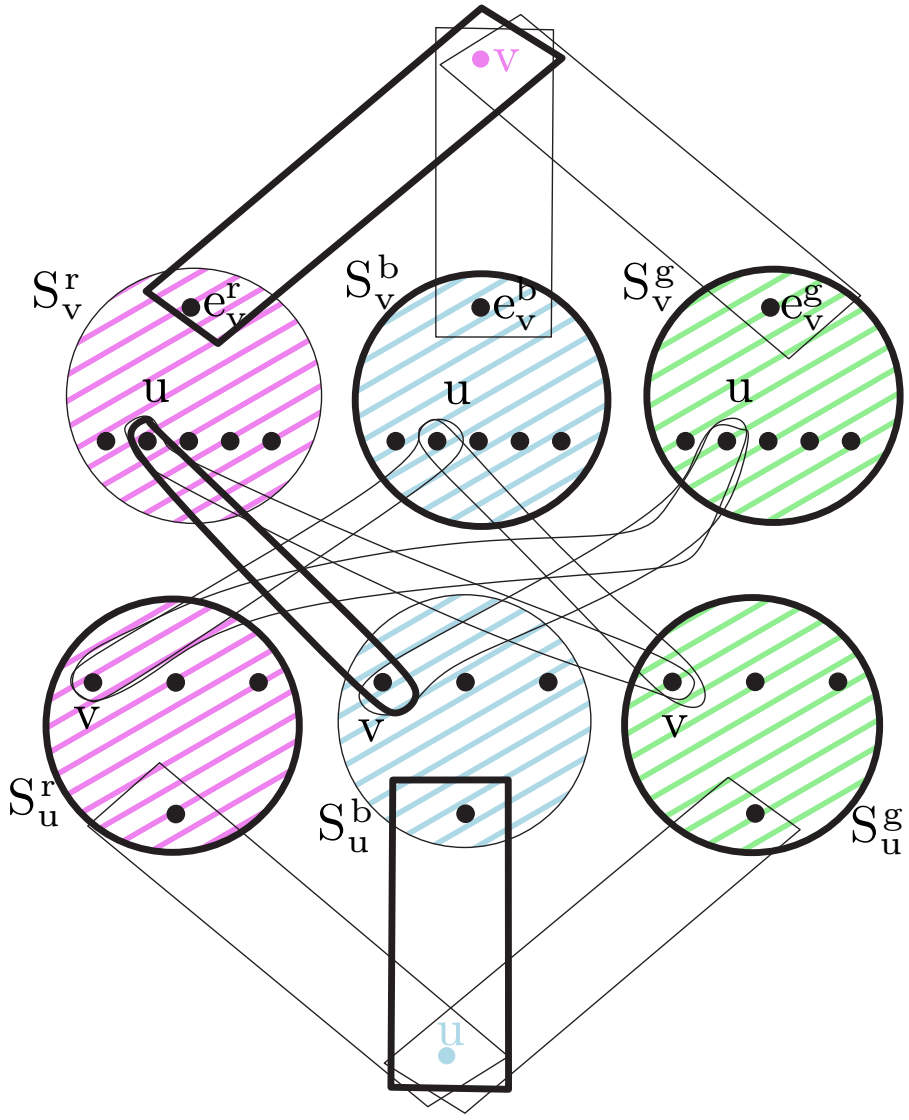
G dreifärbbar $\Rightarrow$ (X,S) hat exakte Überdeckung

- Sei $\chi : V \to C$ eine zulässige Dreifärbung.
- $\mathcal{S}'$ enthalte für jedes $v \in V$ die Mengen $\{v, e_v^{\chi(v)}\}$ und S_v^c mit $c \neq \chi(v)$.
- Diese Mengen überdecken alle Elemente exakt, außer den Elementen der Form $u_v^{\chi(v)}$, $v_u^{\chi(u)}$ für $\{u, v\} \in E$.
- Daher enthalte $\mathcal{S}'$ für jede Kante $\{u, v\} \in E$ die Menge $\{u_v^{\chi(v)}, v_u^{\chi(u)}\}$.
- Diese Menge existiert, da $\chi(u) \neq \chi(v)$, und damit überdeckt $\mathcal{S}'$ jedes Element aus X genau einmal.



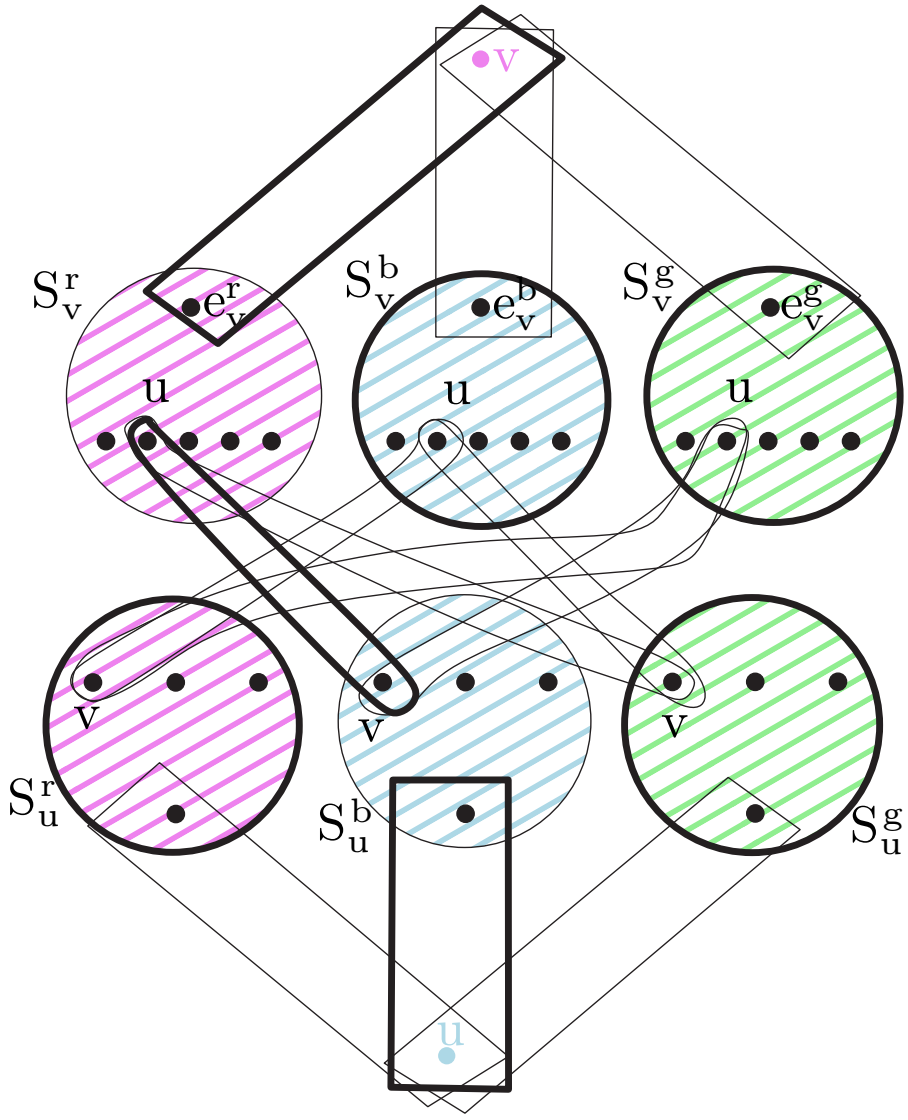
G dreifärbbar $\Leftarrow$ (X,S) hat exakte Überdeckung

- Sei also $\mathcal{S}'$ eine exakte Überdeckung.
- Jedes Element v muss von genau einer Menge der Form $\{v, e_v^c\}$ überdeckt sein.
- Dies induziert eine Färbung χ von G mit den Farben r, b und g.
- Wir müssen beweisen, dass diese Färbung zulässig ist
- Da für jedes v bereits $\{v, e_v^{\chi(v)}\} \in S'$, kann e_v^c mit $c \neq \chi(v)$ nur durch die Menge S_v^c überdeckt werden.



G dreifärbbar $\Leftarrow$ (X,S) hat exakte Überdeckung

- Da für jedes v bereits $\{v, e_v^{\chi(v)}\} \in S'$, kann e_v^c mit $c \neq \chi(v)$ nur durch die Menge S_v^c überdeckt werden.
- Da die Mengen der Form $\{v, e_v^{\chi(v)}\}$ und S_v^c, $c \neq \chi(v)$, alle Elemente außer den $u_v^{\chi(v)}$ mit $\{u, v\} \in E$ überdecken, müssen auch die Mengen $\{u_v^{\chi(v)}, v_u^{\chi(u)}\}$ für $\{u, v\} \in E$ in S' enthalten sein.
- Für diese gilt per Konstruktion $\chi(v) \neq \chi(u)$.



Das Problem SUBSET SUM

Karlsruher Institut für Technologie

Problem SUBSET SUM

Gegeben: Eine endliche Menge M, eine Gewichtsfunktion $w : M \to \mathbb{N}_0$ und $K \in \mathbb{N}_0$

Frage: Existiert eine Teilmenge $M' \subseteq M$ mit $\sum_{a \in M'} w(a) = K$?

Problem SUBSET SUM ist $\mathcal{NP}$–vollständig.

NP-Vollständigkeit von SUBSET SUM

SUBSET SUM $\in \mathcal{NP}$.

- Es kann für eine gegebene Teilmenge $M' \subseteq M$ in Polynomialzeit der Wert $\sum_{a \in M'} w(a)$ ausgerechnet und mit K verglichen werden.

Beweis: NP-Vollständigkeit von SUBSET SUM

EXACT COVER $\propto$ SUBSET SUM

- Sei $(X = \{0, 1, \ldots, m-1\}, \mathcal{S})$ EXACT COVER-Instanz.
- Konstruiere SUBSET SUM Instanz (M, w, K)

$$
\begin{aligned}
M &:= \mathcal{S} \\
\#x &:= \left|\{Y \in \mathcal{S} : x \in Y\}\right| \\
p &:= \max_{x \in X} \#x + 1 \\
w(Y) &:= \sum_{x \in Y} p^x \\
K &:= \sum_{x=0}^{m-1} p^x
\end{aligned}
$$

- Die Konstruktion benötigt nur Polynomialzeit.

Beweis: NP-Vollständigkeit von SUBSET SUM

$$
\begin{aligned}
M &:= \mathcal{S} \\
\#x &:= |\{Y \in \mathcal{S} : x \in Y\}| \\
p &:= \max_{x \in X} \#x + 1 \\
w(Y) &:= \sum_{x \in Y} p^x \\
K &:= \sum_{x=0}^{m-1} p^x
\end{aligned}
$$

Veranschaulichung:

- Wir stellen die Mengenzugehörigkeiten als Zahlen zur Basis p dar.
- Kodiere $w(Y)$ für $Y \in \mathcal{S}$ als String aus Nullen und Einsen der Länge m, wobei an i-ter Stelle eine 1 steht genau dann, wenn $i \in Y$;
- entsprechend ist K ein String der Länge m aus Einsen

Beweis: NP-Vollständigkeit von SUBSET SUM

$$
\begin{aligned}
M &:= \mathcal{S} \\
\#x &:= |\{Y \in \mathcal{S} : x \in Y\}| \\
p &:= \max_{x \in X} \#x + 1 \\
w(Y) &:= \sum_{x \in Y} p^x \\
K &:= \sum_{x=0}^{m-1} p^x
\end{aligned}
$$

Veranschaulichung:

- Komponentenweise Addition der zu Teilmenge $Y_1, \ldots, Y_n$ von $\mathcal{S}$ gehörigen Strings $w(Y_1), \ldots, w(Y_n)$ ergibt einen String der Länge m, an dessen i-ter Stelle steht in wievielen der $Y_j (j = 1, \ldots, n)$ das Element i vorkommt.
- $\sum_{Y \in \mathcal{S}'} w(Y) = K$ bedeutet also, dass jedes $x \in X$ in genau einem $Y \in \mathcal{S}'$ vorkommt.

Beweis: NP-Vollständigkeit von SUBSET SUM

$$
\begin{aligned}
M &:= \mathcal{S} \\
\#x &:= |\{Y \in \mathcal{S} : x \in Y\}| \\
p &:= \max_{x \in X} \#x + 1 \\
w(Y) &:= \sum_{x \in Y} p^x \\
K &:= \sum_{x=0}^{m-1} p^x
\end{aligned}
$$

- $(X, \mathcal{S})$ lösbar $\Rightarrow$ (M, w, K) lösbar.

Sei $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ exakte Überdeckung von $(X, \mathcal{S})$. Dann gilt

$$\sum_{Y \in \mathcal{S}'} w(Y) = \sum_{Y \in \mathcal{S}'} \sum_{x \in Y} p^x = \sum_{x=0}^{m-1} p^x = K$$

da jedes $x \in X$ genau einmal überdeckt wird.
$\mathcal{S}'$ erfüllt also die Bedingung für SUBSET SUM.

Beweis: NP-Vollständigkeit von SUBSET SUM

$$
\begin{aligned}
M &:= \mathcal{S} \\
\#x &:= |\{Y \in \mathcal{S} : x \in Y\}| \\
p &:= \max_{x \in X} \#x + 1 \\
w(Y) &:= \sum_{x \in Y} p^x \\
K &:= \sum_{x=0}^{m-1} p^x
\end{aligned}
$$

- $(X, \mathcal{S})$ lösbar $\Leftarrow (M, w, K)$ lösbar.

Ist $\mathcal{S}' \subseteq M = \mathcal{S}$ eine geeignete Menge für SUBSET SUM, so gilt

$$\sum_{Y \in \mathcal{S}'} w(Y) = K = \sum_{x=0}^{m-1} p^x.$$

Also kommt jedes $x \in X$ in genau einem $Y \in \mathcal{S}'$ vor.
Damit ist $\mathcal{S}'$ eine exakte Überdeckung.

Das Problem PARTITION

Problem PARTITION

Gegeben: Eine endliche Menge M und eine Gewichtsfunktion $w : M \to \mathbb{N}_0$.

Frage: Existiert eine Teilmenge $M' \subseteq M$ mit $\sum_{a \in M'} w(a) = \sum_{a \in M \setminus M'} w(a)$?

Problem PARTITION ist $\mathcal{NP}$–vollständig.

Beweis: NP-Vollständigkeit von PARTITION

PARTITION $\in \mathcal{NP}$.

- Für eine Menge M' können in Polynomialzeit die Werte $\sum_{a \in M'} w(a)$ und $\sum_{a \in M \setminus M'} w(a)$ ausgerechnet und verglichen werden.

Beweis: NP-Vollständigkeit von PARTITION

SUBSET SUM $\propto$ PARTITION.

- Sei (M, w, K) eine SUBSET SUM-Instanz
- Konstruiere PARTITION-Instanz (M^*, w^*)

$$
\begin{aligned}
N &:= \sum_{a \in M} w(a) + 1 \\
M^* &:= M \cup \{b, c\} \\
w^*(a) &= w(a) \qquad \text{für } a \in M \\
w^*(b) &:= N - K \\
w^*(c) &:= K + 1
\end{aligned}
$$

- Die Konstruktion benötigt nur Polynomialzeit.

Beweis: NP-Vollständigkeit von PARTITION

$$
\begin{aligned}
N &:= \sum_{a \in M} w(a) + 1 \\
M^* &:= M \cup \{b, c\} \\
w^*(a) &= w(a) \quad \text{für } a \in M \\
w^*(b) &:= N - K \\
w^*(c) &:= K + 1
\end{aligned}
$$

- (M, w, K) Ja-Instanz genau dann, wenn (M^*, w^*) Ja-Instanz:

$$\exists M' \subseteq M^* \text{ mit } \sum_{a \in M'} w^*(a) = \sum_{a \in M^* \setminus M'} w^*(a) \iff \exists M'' \subseteq M \text{ mit } w(M'') = K.$$

- Es können b und c nicht beide in M' bzw. $M^* \setminus M'$ enthalten sein
- o.B.d.A. $b \in M'$

Beweis: NP-Vollständigkeit von PARTITION

$$
\begin{aligned}
N &:= \sum_{a \in M} w(a) + 1 \\
M^* &:= M \cup \{b, c\} \\
w^*(a) &= w(a) \quad \text{für } a \in M \\
w^*(b) &:= N - K \\
w^*(c) &:= K + 1
\end{aligned}
$$

- (M, w, K) Ja-Instanz genau dann, wenn (M^*, w^*) Ja-Instanz:

$$\exists M' \subseteq M^* \text{ mit } \sum_{a \in M'} w^*(a) = \sum_{a \in M^* \setminus M'} w^*(a) \iff \exists M'' \subseteq M \text{ mit } w(M'') = K.$$

$\Rightarrow$

- Sei M', so dass $\sum_{a \in M'} w^*(a) = \sum_{a \in M^* \setminus M'} w^*(a)$
- Dann gilt $w(M') = N$, da $w(M^*) = 2N$
- Damit erfüllt $M'' := M' \setminus \{b\}$ die Bedingung für SUBSET SUM.

Beweis: NP-Vollständigkeit von PARTITION

$$
\begin{aligned}
N &:= \sum_{a \in M} w(a) + 1 \\
M^* &:= M \cup \{b, c\} \\
w^*(a) &= w(a) \quad \text{für } a \in M \\
w^*(b) &:= N - K \\
w^*(c) &:= K + 1
\end{aligned}
$$

- (M, w, K) Ja-Instanz genau dann, wenn (M^*, w^*) Ja-Instanz:

$$\exists M' \subseteq M^* \text{ mit } \sum_{a \in M'} w^*(a) = \sum_{a \in M^* \setminus M'} w^*(a) \iff \exists M'' \subseteq M \text{ mit } w(M'') = K.$$

$\Leftarrow$

- Sei M'', so dass $w(M'') = K$
- Dann erfüllt $M' := M'' \cup \{b\}$ die Bedingung für PARTITION.

Das Problem KNAPSACK

Karlsruher Institut für Technologie

Problem KNAPSACK

Gegeben: Eine endliche Menge M,
eine Gewichtsfunktion $w : M \to \mathbb{N}_0$,
eine Kostenfunktion $c : M \to \mathbb{N}_0$
$W, C \in \mathbb{N}_0$.

Frage: Existiert eine Teilmenge $M' \subseteq M$ mit $\sum_{a \in M'} w(a) \leq W$ und $\sum_{a \in M'} c(a) \geq C$?

Problem KNAPSACK ist $\mathcal{NP}$–vollständig.

Beweis: NP-Vollständigkeit von KNAPSACK

KNAPSACK $\in \mathcal{NP}$.

- Für eine Menge M' kann in Polynomialzeit überprüft werden, ob
  - $\sum_{a \in M'} w(a) \leq W$ und
  - $\sum_{a \in M'} c(a) \geq C$

  gilt.

Beweis: NP-Vollständigkeit von KNAPSACK

PARTITION $\propto$ KNAPSACK.

- Sei (M, w) eine PARTITION-Instanz
- Konstruiere KNAPSACK-Instanz (M, w', W, C)

$$\begin{aligned} w' &:= 2w \\ c &:= 2w \\ W = C &:= \sum_{a \in M} w(a) \end{aligned}$$

- Die Konstruktion benötigt nur Polynomialzeit.
- Es ist (M, w) genau dann eine Ja-Instanz, wenn (M, w', W, C) eine Ja-Instanz ist (ohne Beweis)

Auswirkung auf die Frage $\mathcal{P}$=$\mathcal{NP}$

- Wir haben gesehen, dass es für je zwei $\mathcal{NP}$–vollständige Probleme eine polynomiale Transformation von einem zum anderen Problem gibt.
- Deshalb sind alle $\mathcal{NP}$–vollständigen Probleme im wesentlichen gleich schwer
- Dies hat Auswirkungen auf die Frage, ob $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ ist.

Satz:
Sei L $\mathcal{NP}$-vollständig, dann gilt:

- $L \in \mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{P} = \mathcal{NP}$
- $L \notin \mathcal{P} \Longrightarrow$ für jede $\mathcal{NP}$-vollständigen Sprache L' gilt $L' \notin \mathcal{P}$

Auswirkung auf die Frage $\mathcal{P}$=$\mathcal{NP}$

Beweis: L $\mathcal{NP}$**-vollständig,** $L \in \mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{P} = \mathcal{NP}$

- Sei $L \in \mathcal{P}$ und L $\mathcal{NP}$-vollständig.
- Dann existiert eine polynomiale deterministische TM M für L.
- Sei $L' \in \mathcal{NP}$
- Es gibt polynomiale Transformation $L' \propto L$
- Hintereinanderausführung von $L' \propto L$ und M liefert deterministische polynomielle TM-Berechnung für L'.
- Damit ist $L' \in \mathcal{P}$.

Auswirkung auf die Frage $\mathcal{P}$=$\mathcal{NP}$

Beweis: L $\mathcal{NP}$**-vollständig,** $L \notin \mathcal{P}$
$\Longrightarrow$ **für jede** $\mathcal{NP}$**-vollständigen Sprache** L' **gilt** $L' \notin \mathcal{P}$

- Sei $L \notin \mathcal{P}$ und L $\mathcal{NP}$-vollständig.
- Angenommen für eine $\mathcal{NP}$-vollständige Sprache L' gilt: $L' \in \mathcal{P}$
- Dann folgt aus Teil 1 des Satzes $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.
- Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $L \notin \mathcal{P}$.

Zusammenfassung

- Die Klasse $\mathcal{P}$ ist die Klasse aller Entscheidungsprobleme/Sprachen die mit einer **deterministischen** Turingmaschine in polynomieller Zeit gelöst werden können
- Die Klasse $\mathcal{NP}$ ist die Klasse aller Entscheidungsprobleme/Sprachen die mit einer **nicht-deterministischen** Turingmaschine in polynomieller Zeit gelöst werden können
- Informell ausgedrückt: Π gehört zu $\mathcal{NP}$, falls Π folgende Eigenschaft hat: Ist die Antwort bei Eingabe eines Beispiels *I* von Π Ja, dann kann die Korrektheit der Antwort in polynomialer Zeit überprüft werden.

Zusammenfassung

- Eine **polynomiale Transformation** einer Sprache $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ in eine Sprache $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ ist eine Funktion $f\colon \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ mit den Eigenschaften:
  - es existiert eine polynomiale deterministische Turing-Maschine, die f berechnet;
  - für alle $x \in \Sigma_1^*$ gilt: $x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$.

- Eine Sprache L heißt $\mathcal{NP}$**–vollständig**, falls gilt:
  - $L \in \mathcal{NP}$ und
  - für alle $L' \in \mathcal{NP}$ gilt $L' \propto L$ ($\mathcal{NP}$-Schwere).

- **Bedeutung**: Unter der Annahme $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ gibt es kein polynomielles Lösungsverfahren für ein $\mathcal{NP}$-vollständges Problem.

Zusammenfassung

- Mit dem Satz von Cook haben wir direkt gezeigt, dass Problem SAT $\mathcal{NP}$-schwer ist

- Bei allen anderen Problemen haben wir polynomielle Transformationen (Reduktionen) benutzt um die $\mathcal{NP}$-Schwere nachzuweisen:

$$\text{SAT} \propto \text{3SAT} \propto \text{3COLOR} \propto \text{EXACT COVER} \propto \text{SUBSET SUM} \propto \text{PARTITION} \propto \text{KNAPSACK}$$