Theoretische Grundlagen der Informatik

Turing-Maschine, Berechenbarkeit

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Thema dieses Kapitels

Beobachtung:
Endliche Automaten sind als Berechnungsmodell nicht mächtig genug.

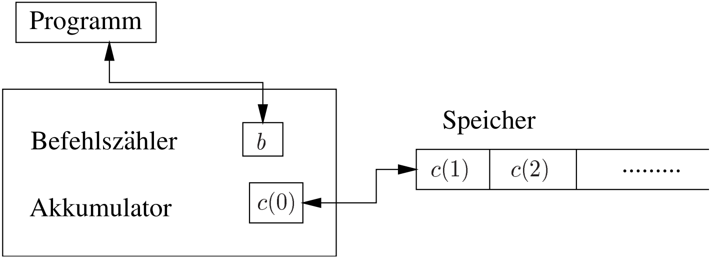
Frage:
Gibt es ein mächtigeres, realistisches Rechnermodell, das als Grundlage für allgemeine theoretische Aussagen über Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit und Komplexität geeignet ist?

Hauptfrage in diesem Kapitel:
Welche Probleme sind berechenbar?

Die Registermaschine (RAM)

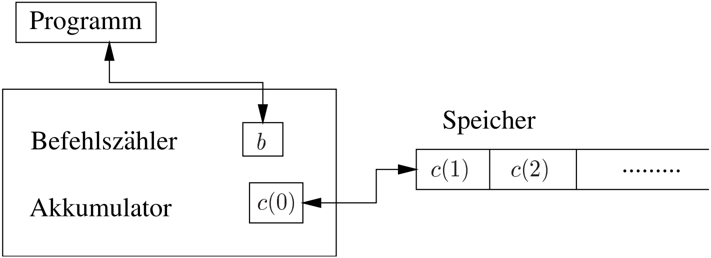
Die RAM besteht aus

- Befehlszähler (zeigt auf den nächsten Befehl im Programm)
- Akkumulatoren (endlicher Speicher zum Ausführen der Befehle)
- Registern (unendlicher Speicher)
- Programm



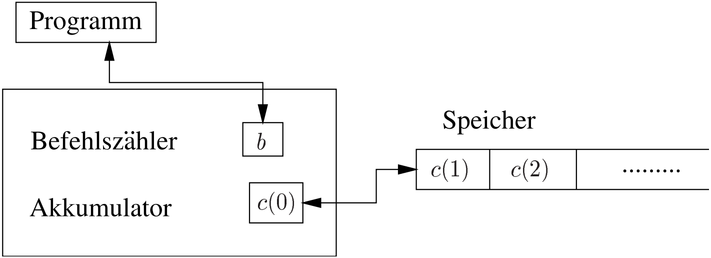
Die Registermaschine (RAM)

- Ein Programm besteht aus einer Folge von Befehlen
- Programmzeilen sind durchnummeriert
- Der Befehlszähler *b* startet bei 1 und enthält jeweils die Nummer des nächsten auszuführenden Befehls



Die Registermaschine (RAM)

- In den ersten Registern steht zu Beginn der Berechnung die Eingabe
- In den übrigen Registern steht 0
- Am Ende der Berechnung stehen die Ausgabedaten in vorher festgelegten Registern
- Den Inhalt des Registers *i* bezeichnen wir mit $c(i)$.



Befehle der Registermaschine (RAM)

Befehl	Wirkung
LOAD i	$c(0) := c(i); \quad b := b + 1$
STORE i	$c(i) := c(0); \quad b := b + 1$
ADD i	$c(0) := c(0) + c(i); \quad b := b + 1$
SUB i	$c(0) := \max\{0, c(0) - c(i)\}; \quad b := b + 1$
MULT i	$c(0) := c(0) \cdot c(i); \quad b := b + 1$
DIV i	$c(0) := \left\lfloor \frac{c(0)}{c(i)} \right\rfloor; \quad b := b + 1$
GOTO j	$b := j$
IF $c(0)\#\ell$ GOTO j	$\begin{cases} b := j & \text{falls } c(0)\#\ell \\ b := b + 1 & \text{sonst} \end{cases}$ wobei $\# \in \{\leq, \geq, <, >, \neq, =\}$
END	$b := b$

Befehle der Registermaschine (RAM)

Befehl	Wirkung
LOAD i	$c(0) := c(i); \quad b := b + 1$
STORE i	$c(i) := c(0); \quad b := b + 1$
ADD i	$c(0) := c(0) + c(i); \quad b := b + 1$
SUB i	$c(0) := \max\{0, c(0) - c(i)\}; \quad b := b + 1$
MULT i	$c(0) := c(0) \cdot c(i); \quad b := b + 1$
DIV i	$c(0) := \left\lfloor \frac{c(0)}{c(i)} \right\rfloor; \quad b := b + 1$
GOTO j	$b := j$
IF $c(0)\#\ell$ GOTO j	$\begin{cases} b := j & \text{falls } c(0)\#\ell \\ b := b + 1 & \text{sonst} \end{cases}$ wobei $\# \in \{\leq, \geq, <, >, \neq, =\}$
END	$b := b$

Befehle können modifiziert werden zu:

CLOAD, CSTORE, CADD, CSUB, CMULT, CDIV

ersetze hierzu immer c(i) durch die Konstante i

Befehle der Registermaschine (RAM)

Befehl	Wirkung
LOAD i	$c(0) := c(i); \quad b := b+1$
STORE i	$c(i) := c(0); \quad b := b+1$
ADD i	$c(0) := c(0) + c(i); \quad b := b+1$
SUB i	$c(0) := \max\{0, c(0) - c(i)\}; \quad b := b+1$
MULT i	$c(0) := c(0) \cdot c(i); \quad b := b+1$
DIV i	$c(0) := \left\lfloor \frac{c(0)}{c(i)} \right\rfloor; \quad b := b+1$
GOTO j	$b := j$
IF $c(0)\#\ell$ GOTO j	$\begin{cases} b := j & \text{falls } c(0)\#\ell \\ b := b+1 & \text{sonst} \end{cases}$ wobei $\# \in \{\leq, \geq, <, >, \neq, =\}$
END	$b := b$

Befehle können modifiziert werden zu:

INDLOAD, INDSTORE, INDADD, INDSUB, INDMULT, INDDIV

ersetze hierzu immer c(i) durch $c(c(i))$ (indirekte Addressierung)

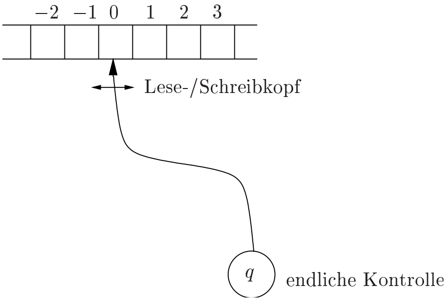
Kostenmodell der Registermaschine (RAM)

- Üblicherweise wird das **uniforme** Kostenmodell verwendet.
- Dabei kostet jede Programmzeile bis auf END eine Einheit
- Dieses Modell ist gerechtfertigt solange keine großen Zahlen auftreten
- Ansonsten ist das **logarithmische** Kostenmodell realistischer
- Kosten entsprechen dann der Länge der benutzten Zahlen

Die Turingmaschine (TM)

Eine TM besteht aus

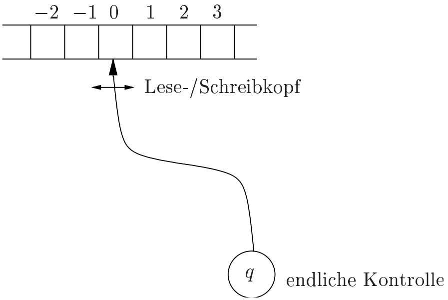
- beidseitig unendlichen Eingabe- und Rechenband
- freibeweglichem Lese-/Schreibkopf
- endlicher Kontrolle



Die Turingmaschine (TM)

Die Kontrolle

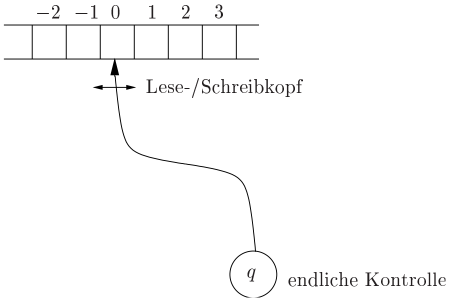
- ist immer in einem von endlich vielen Zuständen.
- entspricht dem Befehlszähler der RAM.



Die Turingmaschine (TM)

Das Eingabe- und Rechenband

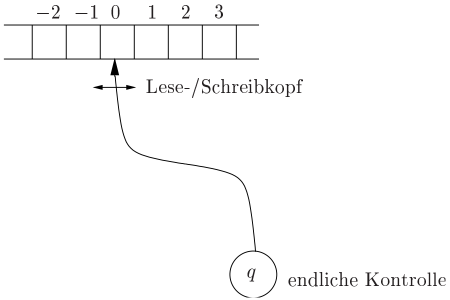
- enthält eine Folge von Symbolen (höchstens eins pro Zelle).
- entspricht den Registern der RAM



Die Turingmaschine (TM)

Ausgehend vom aktuellen Zustand verhält sich die TM wie folgt:

- lese das Symbol auf der aktuellen Position des Lese-/ Schreibkopfes
- gehe in einen Folgezustand über
- überschreibe evtl. das Symbol
- bewege den Lese-/ Schreibkopf nach rechts, links oder gar nicht



Formale Definition der Turingmaschine

Eine deterministische Turing-Maschine ((D)TM) besteht aus:

- Q, einer endlicher Zustandsmenge,
- Σ, einem endlichen Eingabealphabet,
- $\sqcup$, einem Blanksymbol mit $\sqcup \notin \Sigma$,
- Γ, einem endlichen Bandalphabet mit $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$,
- $s \in Q$, einem Startzustand
- $\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$, einer Übergangsfunktion.
  Dabei bedeutet L eine Bewegung des Lese-/Schreibkopfes nach links, R eine Bewegung nach rechts und N ein Stehenbleiben. Die Übergangsfunktion beschreibt, wie das aktuell eingelesene Zeichen verarbeitet werden soll.
- $F \subseteq Q$, einer Menge von Endzuständen.
  Die Menge der Endzustände kann auch entfallen.

Bemerkungen zur TM

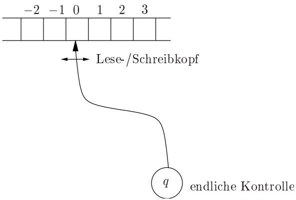
- Der Übergang $\delta(q, a) = (p, b, L)$ wird graphisch wie folgt dargestellt

$$q \xrightarrow{a|b,\ L} p$$

Bedeutung:

Ist die Turing-Maschine im Zustand q und liest das Symbol a, so

- überschreibt sie dieses a mit b,
- geht auf dem Band eine Stelle nach links
- wechselt in den Zustand p.

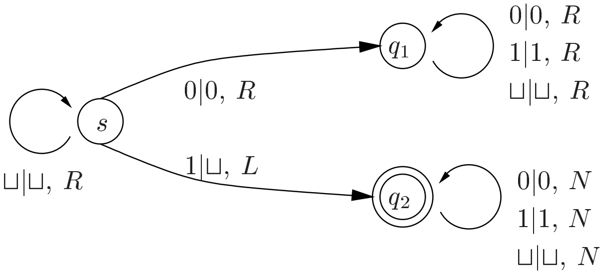


Bemerkungen zur TM

Konventionen

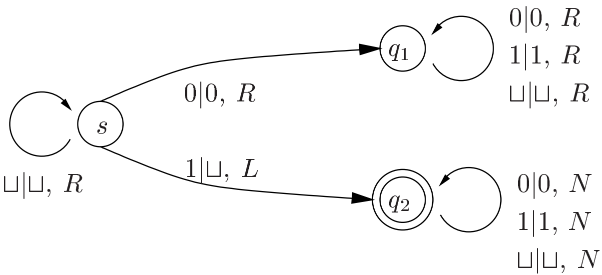
- Die Turing-Maschine startet im Zustand s
- Der Lese-/Schreibkopf startet an der linkesten Stelle des Bandes, in der ein Eingabesymbol steht
- Die Turing-Maschine stoppt, wenn sie
  - zum ersten Mal in einen Endzustand kommt, oder
  - in einem Zustand q ein Symbol a liest und $\delta(q, a) = (q, a, N)$ ist.
- Das bedeutet, dass Übergänge, die aus Endzuständen herausführen, sinnlos sind.

Beispiel-Turingmaschine



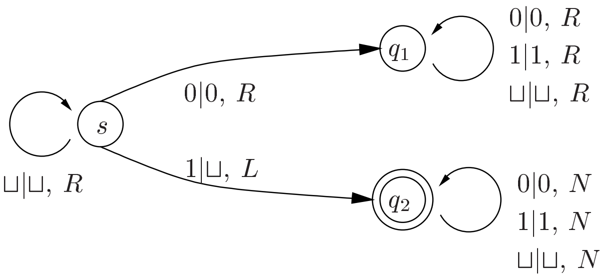
Frage: Was erkennt / berechnet diese TM ?

Beispiel-Turingmaschine



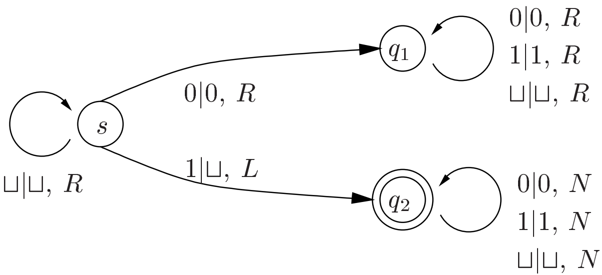
- Die TM erkennt alle Wörter aus $\{0, 1\}^*$, die mit einer Eins beginnen.
- Die TM löscht die die führende Eins, falls vorhanden.
- Alles andere auf dem Band bleibt unverändert.
- Der Lese-/Schreibkopf steht nach dem Stop links neben der Stelle an der die führende Eins gelesen wurde.
- Der Zustand q_1 ist unwesentlich.

Beispiel-Turingmaschine



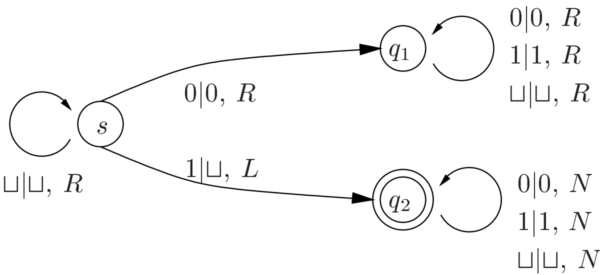
- Es gibt Eingaben, für die eine Turing-Maschine unter Umständen niemals stoppt.
- **Welche Eingaben sind dies in diesem Beispiel?**

Beispiel-Turingmaschine



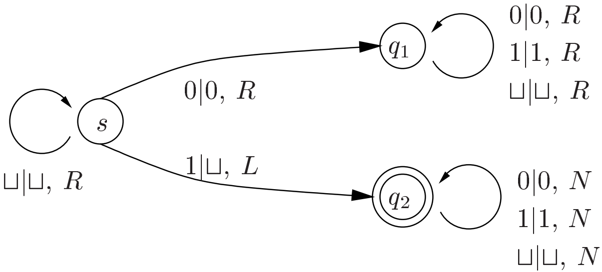
- Die TM stoppt nicht, falls die Eingaben nicht mit Eins beginnt.

Beispiel-Turingmaschine



- Eine Turing-Maschine erkennt nicht nur eine Sprache,
- sondern sie verändert auch die Eingabe
- hat insofern auch eine Ausgabe
  (= Inhalt des Bandes nach der Bearbeitung).
- Die Turing-Maschine realisiert also eine partielle Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$.

Beispiel-Turingmaschine



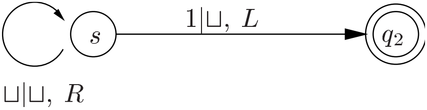
- Die Turing-Maschine realisiert also eine partielle Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$.
- Im Beispiel ist

$$f(w) = \begin{cases} v & \text{falls } w = 1v \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkungen zur TM

Karlsruher Institut für Technologie

- Oft werden wir die Turing-Maschine beziehungsweise deren Übergangsfunktion nur unvollständig beschreiben.
- Beispiel:



- Eine Vervollständigung ist immer möglich:
- Wenn für eine bestimmte Kombination q, a kein Übergang $\delta(q, a)$ definiert ist, dann stoppt die Turing-Maschine im Zustand q.

Definitionen zur TM

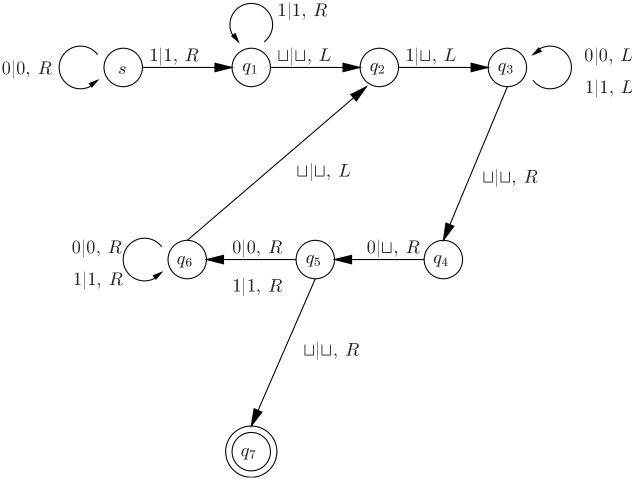
- Eine Turing-Maschine **akzeptiert** eine Eingabe $w \in \Sigma^*$, wenn sie nach Lesen von w in einem Zustand aus F stoppt.
- Sie **akzeptiert** eine Sprache L genau dann, wenn sie ausschließlich Wörter aus $w \in L$ als Eingabe akzeptiert.
- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **rekursiv** oder **entscheidbar**, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die auf allen Eingaben stoppt und eine Eingabe w genau dann akzeptiert, wenn $w \in L$ gilt.
- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **rekursiv-aufzählbar** oder **semi-entscheidbar**, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die genau die Eingaben w akzeptiert für die $w \in L$.

  Das Verhalten der Turing-Maschine für Eingaben $w \notin L$ ist damit nicht definiert. D.h., die Turing-Maschine stoppt entweder nicht in einem Endzustand oder aber stoppt gar nicht.

Notation: Konfiguration

- Situation in der sich eine TM $\mathcal{M} := (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ befindet wird durch die Angabe der **Konfiguration** codiert.
- Eine Konfiguration hat die Form $w(q)av$, wobei
  - $w, v \in \Gamma^*$
  - $a \in \Gamma$
  - $q \in Q$
- Bedeutung:
  - $\mathcal{M}$ befindet sich gerade im Zustand q.
  - Der Lesekopf steht auf dem Zeichen a.
  - Links vom Lesekopf steht das Wort w auf dem Rechenband.
  - Rechts vom Lesekopf steht das Wort v auf dem Rechenband.

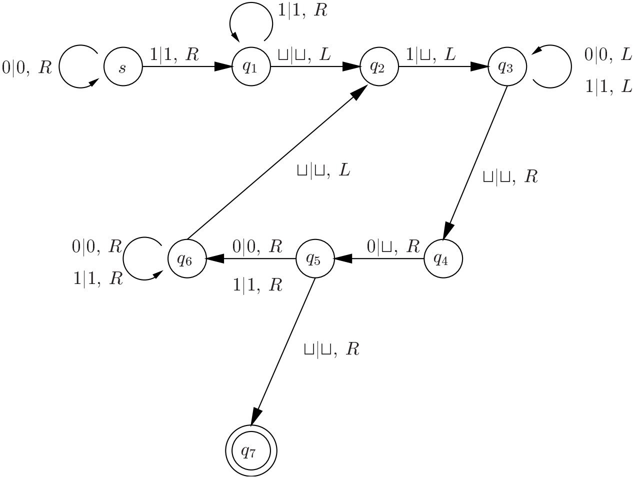
Beispiel: Konfiguration



TM akzeptiert
$\{0^n 1^n : n \geq 1\}$.

Eingabe: 0011

Beispiel: Konfiguration



$\sqcup(s)0011$
$0(s)011$
$00(s)11$
$001(q_1)1$
$0011(q_1)\sqcup$
$001(q_2)1$
$00(q_3)1$
$0(q_3)01$
$\sqcup(q_3)001$
$\sqcup(q_3)\sqcup 001$
$\sqcup(q_4)001$
$\sqcup(q_5)01$
$0(q_6)1$
$01(q_6)\sqcup$
$0(q_2)1$
$\sqcup(q_3)0$
$\sqcup(q_3)\sqcup 0$
$\sqcup(q_4)0$
$\sqcup(q_5)\sqcup \quad \sqcup(q_7)\sqcup$

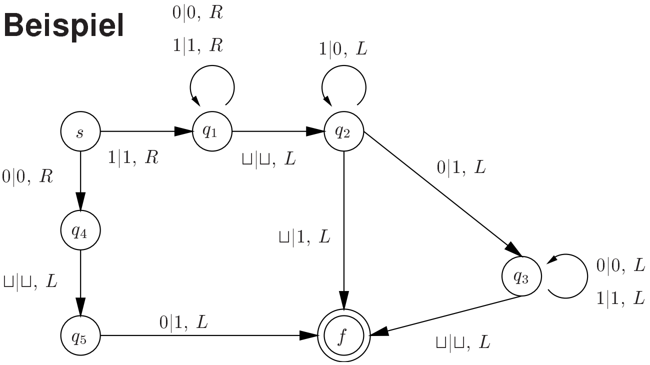
Definition: berechenbar / totalrekursiv

- Eine Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ heißt **(Turing-)berechenbar** oder **totalrekursiv**, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die bei Eingabe von $w \in \Sigma^*$ den Funktionswert $f(w) \in \Gamma^*$ ausgibt.

- Eine Turing-Maschine **realisiert** eine Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$, falls gilt:

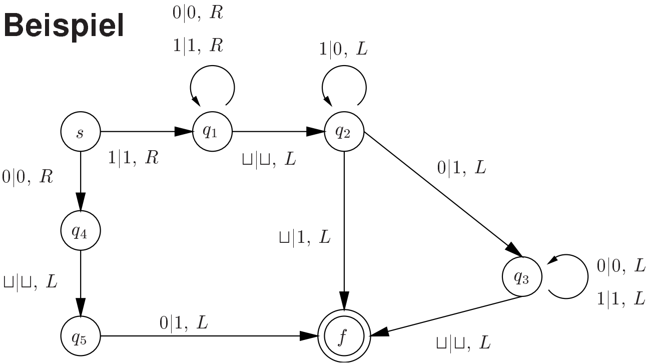
$$f(w) = \begin{cases} \text{Ausgabe der Turing-Maschine, wenn sie bei Eingabe } w \text{ stoppt} \\ \text{undefiniert sonst} \end{cases}$$

Beispiel



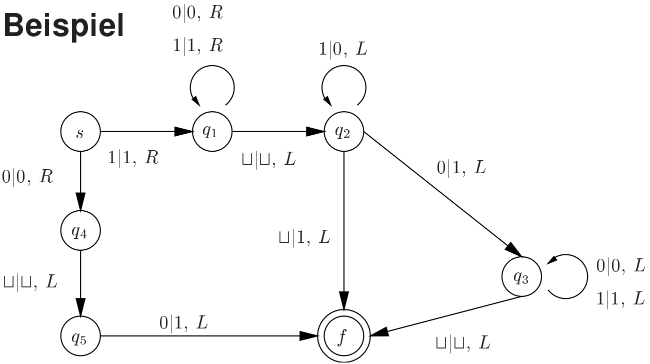
- Fasse die Eingabe *w* als binäre Zahl auf
- Es sollen nur Eingaben ohne führende Nullen und die Null selbst akzeptiert werden.
- Addiere zur Eingabe $w \in (0 \cup 1)^*$ eine Eins

Beispiel



$$\text{Es gilt: } f(w) = \begin{cases} w + 1 & \text{falls } w \in 0 \cup 1(0 \cup 1)^*, \\ & \quad w \text{ interpretiert als Binärzahl} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

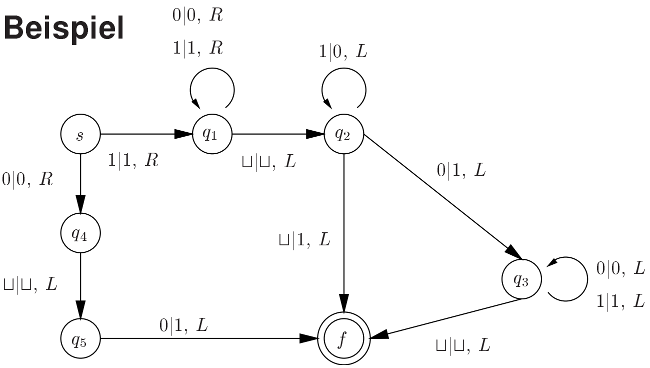
Beispiel



Dabei sind die Zustände jeweils für die folgenden Aufgaben verantwortlich:

- q_1 Bewegung des Lese-/Schreibkopfes nach rechts bis zum Eingabeende
- q_2 Bildung des Übertrages, der durch die Addition von Eins zu einer bereits vorhandenen Eins entsteht

Beispiel



Dabei sind die Zustände jeweils für die folgenden Aufgaben verantwortlich:

- q_3 Bewegung des Lese-/Schreibkopfes nach links, nachdem die Aufsummierung abgeschlossen ist (kein Übertrag mehr)
- q_4, q_5 Sonderbehandlung für den Fall der Eingabe 0
- f Endzustand

Entscheidbarkeit und Berechenbarkeit

Karlsruher Institut für Technologie

Entscheidbarkeit von Sprachen und Berechenbarkeit von Funktionen sind verwandt:

- Eine Turing-Maschine akzeptiert eine Sprache L, wenn sie genau auf den Eingaben $w \in L$ in einem ausgezeichneten Endzustand stoppt.
- L ist entscheidbar, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die auf allen Eingaben stoppt und L akzeptiert.
- Die Funktion f heißt berechenbar, wenn eine Turing-Maschine existiert, die f realisiert.

Entscheidbarkeit und Berechenbarkeit

Entscheidbarkeit von Sprachen und Berechenbarkeit von Funktionen sind verwandt:

- Man kann eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$, die auf allen Eingaben stoppt, so modifizieren, dass es zwei ausgezeichnete Zustände q_J und q_N gibt und dass $\mathcal{M}$ stets in einem der Zustände q_J oder q_N hält.
- Dabei stoppt sie bei der Eingabe w genau dann in q_J, wenn sie w akzeptiert, ansonsten in q_N.
- Damit ist die Sprache L genau dann entscheidbar, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die immer in einem der Zustände $\{q_J, q_N\}$ stoppt, wobei sie gerade für $w \in L$ in q_J hält.

Korollar

- Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist **entscheidbar** genau dann, wenn ihre **charakteristische Funktion** χ_L berechenbar ist, wobei gilt:

$$\chi_L \colon \Sigma^* \to \{0,1\} \quad \text{mit} \qquad \chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Eine Sprache L ist **semi-entscheidbar** genau dann, wenn die Funktion χ_L^* berechenbar ist, wobei gilt:

$$\chi_L^*(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Church'sche These

Church'sche These
Die Menge der (Turing-)berechenbaren Funktionen ist genau die Menge der im intuitiven Sinne überhaupt berechenbaren Funktionen.

Die Church'sche These

Church'sche These
Die Menge der (Turing-)berechenbaren Funktionen ist genau die Menge der im intuitiven Sinne überhaupt berechenbaren Funktionen.

Interpretation

- Turing-Maschinen sind formale Modelle für Algorithmen.
- Kein Berechnungsverfahren kann algorithmisch genannt werden, wenn es nicht von einer Turing-Maschine ausführbar ist.

Bemerkung

- Die Church'sche These ist nur eine These, kann also nicht bewiesen werden.
- Sie ist aber in der Informatik allgemein akzeptiert.

Die Church'sche These

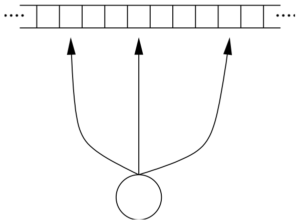
Church'sche These
Die Menge der (Turing-)berechenbaren Funktionen ist genau die Menge der im intuitiven Sinne überhaupt berechenbaren Funktionen.

Begründung

- Es existieren keine Beispiele von Funktionen, die als intuitiv berechenbar angesehen werden, aber nicht Turing-berechenbar sind.
- Alle Versuche, realistische Modelle aufzustellen, die mächtiger sind als Turing-Maschinen, schlugen fehl.
- Eine Reihe von völlig andersartigen Ansätzen, den Begriff der Berechenbarkeit formal zu fassen, wie zum Beispiel die Registermaschine, haben sich als äquivalent erwiesen.

Erweiterungen der Turing-Maschine

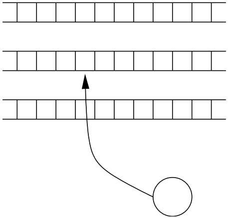
Mehrere Lese-/Schreibköpfe



- Mehrere Lese-/Schreibköpfe $(n \in \mathbb{N})$ greifen auf das eine Eingabeband zu und werden von der endlichen Kontrolle gesteuert.
- Die Übergangsfunktion ist dann vom Typ $\delta \colon Q \times \Gamma^n \to Q \times \Gamma^n \times \{L, N, R\}^n$
- Die Zustände $q \in Q$ kann man als n–Tupel auffassen.
- Es nötig eine Prioritätenregel für die einzelnen Köpfe anzugeben, falls mehrere auf einem Feld des Eingabebandes stehen.

Erweiterungen der Turing-Maschine

Mehrere Bänder



- Ein Lese-/Schreibkopf kann auf mehrere Eingabebänder ($n \in \mathbb{N}$) zugreifen.
- Die Übergangsfunktion ist dann vom Typ

$$\delta \colon Q \times \Gamma \times \{1, \ldots, n\} \to Q \times \Gamma \times \{L, N, R\} \times \{1, \ldots, n\}.$$

Erweiterungen der Turing-Maschine

Karlsruher Institut für Technologie

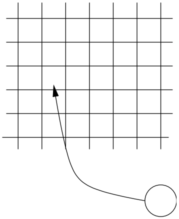
Mehrere Lese-/Schreibköpfe für mehrere Bänder

- Wir haben jetzt m Bänder und n Lese-/Schreibköpfe.
- Die Übergangsfunktion ist dann vom Typ

$$\delta\colon Q \times \Gamma^n \times \{1, \ldots, m\}^n \to Q \times \Gamma^n \times \{L, N, R\}^n \times \{1, \ldots, m\}^n.$$

Erweiterungen der Turing-Maschine

Mehrdimensionale Bänder



- Das Eingabeband ist nun mehrdimensional, es hat zum Beispiel die Dimension zwei.
- Wir sprechen dann von einem Arbeitsfeld.
- Dabei ist

$$\delta\colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L(eft), U(p), R(ight), D(own), N(othing)\}$$

Erweiterungen der Turing-Maschine

Karlsruher Institut für Technologie

Bemerkungen

- Fragestellungen der Art:
  - Wann stoppt eine Mehrkopf-Maschine?
  - Welcher Kopf ‚gewinnt', wenn mehrere Köpfe (verschiedene) Symbole an dieselbe Stelle schreiben wollen?

  müssen bei solchen Modifikationen noch geklärt werden.
- Es hat sich allerdings gezeigt, dass keine dieser Erweiterunge nmehr leistet, als eine normale Turing-Maschine.
- **Alle angegebenen Modifikationen können durch eine normale 1–Band Turing-Maschine simuliert werden.**

Kapitel

- Die universelle Turing-Maschine
- Unentscheidbare Probleme

Die universelle Turing-Maschine

Ziel

- Bisher: Nur Turing-Maschinen die eine bestimmte Aufgabe erfüllen
- Jetzt: Konstruktion einer Turing-Maschine, die als Eingabe
    - ein Programm und
    - eine spezielle Eingabe

  erhält.
- Die Aufgabe besteht darin, das gegebene Programm auf der gegebenen speziellen Eingabe auszuführen.

Die universelle Turing-Maschine

Wir betrachten dazu eine normierte Turing-Maschine, d.h.

- $Q := \{q_1, \ldots, q_n\}$
- $\Sigma := \{a_1, \ldots, a_k\}$
- $\Gamma := \{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_l\}$
- $s := q_1$
- $F := \{q_2\}$

- Dies bedeutet keine Einschränkung in der Mächtigkeit der Turing-Maschinen:
- Jede beliebige Turing-Maschine kann durch eine derart normiert Turing-Maschine der obigen Form simuliert werden.
- Jede normierte Turing-Maschine $\mathcal{M}$ lässt sich eindeutig als Wort aus $(0 \cup 1)^*$ kodieren.

Die Gödelnummer

Sei $\mathcal{M} := (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ eine Turing-Maschine.

Die Gödelnummer von $\mathcal{M}$, bezeichnet als $\langle \mathcal{M} \rangle$, ist definiert durch folgende Kodierungsvorschrift:

- Kodiere

  $$\delta(q_i, a_j) = (q_r, a_s, d_t) \text{ durch } 0^i\,1\,0^j\,1\,0^r\,1\,0^s\,1\,0^t,$$

  wobei $d_t \in \{d_1, d_2, d_3\}$ und
  - d_1 für L,
  - d_2 für R und
  - d_3 für N steht.
- Die Turing-Maschine wird dann kodiert durch:

  $$111\text{code}_1 11\text{code}_2 11 \ldots 11\text{code}_z 111,$$

  wobei code_i für $i = 1, \ldots, z$ alle Funktionswerte von δ in beliebiger Reihenfolge beschreibt.

Die Gödelnummer - Bemerkungen

- Die eigentlichen Werte der Turing-Maschine werden also (unär) durch Nullen beschrieben und die Einsen dienen als Begrenzung der Eingabewerte.
- Jede Turing-Maschine kann also durch ein Wort aus $(0 \cup 1)^*$ kodiert werden.
- Umgekehrt beschreibt jedes Wort aus $(0 \cup 1)^*$ (höchstens) eine Turing-Maschine.
- Wir vereinbaren, dass ein Wort, das keine Turing-Maschine in diesem Sinne beschreibt, (zum Beispiel ε, 0, 000) eine Turing-Maschine kodiert, die $\emptyset$ akzeptiert.
- Eine *universelle Turing-Maschine* erhält als Eingabe ein Paar $(\langle \mathcal{M} \rangle , w)$, wobei $w \in \{0, 1\}^*$ ist, und sie simuliert $\mathcal{M}$ auf w.

Die Gödelnummer - Beispiel

Sei $\mathcal{M} = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \sqcup, \{0, 1, \sqcup\}, \delta, q_1, \{q_2\})$, mit

$$\begin{aligned}
\delta(q_1, 1) &= (q_3, 0, R)\\
\delta(q_3, 0) &= (q_1, 1, R)\\
\delta(q_3, 1) &= (q_2, 0, R)\\
\delta(q_3, \sqcup) &= (q_3, 1, L)
\end{aligned}$$

$\mathcal{M}$ zusammen mit der Eingabe 1011 ist dann:

111010010001010011000101010010011000
100100101001100010001000100101111011

Definition

Zu $w \in \{0, 1\}^*$ sei T_w

- die Turing-Maschine mit der Gödelnummer (GN) w, bzw
- die Turing-Maschine, die $\emptyset$ akzeptiert.

Es sei $L(T_w)$ ist die Sprache, die von T_w akzeptiert wird.

Die Diagonalsprache

Wir konstruieren die sogenannte **Diagonalsprache** L_d , wie folgt:

- Betrachte die Wörter aus $\{0,1\}^*$ in *kanonischer* Reihenfolge, d.h. w_i steht vor w_j $(i < j)$, falls
  - $|w_i| < |w_j|$, oder
  - $|w_i| = |w_j|$ und w_i lexikographisch vor w_j steht.
- $\mathcal{M}_j$ sei die TM, die durch die Gödelnummer w_j kodiert ist.
- Wir konstruieren eine unendliche Tabelle,
  - an deren Position (i,j) für $1 \leq i,j < \infty$ eine Null oder eine Eins steht, und
  - welche beinhaltet, ob w_i in $L(\mathcal{M}_j)$ ist.
- Damit gilt für die Einträge

$$(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{M}_j \ w_i \text{ akzeptiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Diagonalsprache

Karlsruher Institut für Technologie

- Damit gilt für die Einträge

$$(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{M}_j \ w_i \text{ akzeptiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Definiere dazu

$$L_d := \{ w_i \mid \mathcal{M}_i \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht} \} .$$

- L_d enthält also alle w_i, für die auf der Diagonalen an der Stelle (i, i) eine Null steht.
- Dies führt später zu einem Diagonalbeweis (Cantor).

Die Diagonalsprache - Veranschaulichung

$w \in \{0,1\}^*$	Gödelnummer							
		w_i	w_j	w_k				
$\vdots$	$\vdots$							
w_i	1	**0**	1	0	1	0	0	$w_i \in L_d$
w_j	0	0	**1**	0	0	1	1	$w_j \notin L_d$
w_k	1	0	0	**1**	1	0	1	$w_k \notin L_d$
$\vdots$	$\vdots$							

Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache

Satz (Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache):
Die Sprache L_d ist nicht entscheidbar.

Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache

Karlsruher Institut für Technologie

Satz (Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache):
Die Sprache L_d ist nicht entscheidbar.

Beweis:

Falls L_d entscheidbar ist, gibt es eine Turing-Maschine $\mathcal{M}_i$, die

- (1) stets hält
- (2) genau die $w \in L_d$ akzeptiert.

Wende nun $\mathcal{M}_i$ auf w_i an:

- Falls $w_i \in L_d$, dann wird w_i, wegen (2) von $\mathcal{M}_i$ akzeptiert.
- Falls $w_i \notin L_d$, dann akzeptiert $\mathcal{M}_i$ das Wort w_i wegen (2) nicht.

Beides ist ein Widerspruch zur Definition von L_d.

Korollar
Die Sprache $L_d^c := \{0,1\}^* \setminus L_d$ ist nicht entscheidbar.

Korollar

Korollar
Die Sprache $L_d^c := \{0,1\}^* \backslash L_d$ ist nicht entscheidbar.

Beweis:

- Falls L_d^c entscheidbar ist, gibt es eine Turing-Maschine, die L_d^c entscheidet.
- Diese kann aber leicht zu einer Turing-Maschine modifiziert werden, die L_d entscheidet.
- Dies ist ein Widerspruch zur Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache.

Korollar

Korollar
Die Sprache $L_d^c := \{0,1\}^* \setminus L_d$ ist nicht entscheidbar.

Beweis:

- Falls L_d^c entscheidbar ist, gibt es eine Turing-Maschine, die L_d^c entscheidet.
- Diese kann aber leicht zu einer Turing-Maschine modifiziert werden, die L_d entscheidet.
- Dies ist ein Widerspruch zur Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache.

Interpretation:

- Das Problem, ob eine Turing-Maschine auf einer Eingabe w stoppt, ist nicht entscheidbar.

Das Halteproblem

Das **Halteproblem** definiert folgende Sprache

$$\mathcal{H} := \{wv \mid T_w \text{ hält auf der Eingabe } v\}\ .$$

Satz (Unentscheidbarkeit des Halteproblems):
$\mathcal{H}$ ist nicht entscheidbar.

Das Halteproblem

Karlsruher Institut für Technologie

Satz (Unentscheidbarkeit des Halteproblems):
$\mathcal{H} = \{wv \mid T_w$ hält auf der Eingabe $v\}$ ist nicht entscheidbar.

Beweis:

- Angenommen es existiert eine stets haltende Turing-Maschine, die $\mathcal{H}$ entscheidet.
- Wir konstruieren daraus eine stets haltende Turing-Maschine, die L_d^c entscheidet, mit Widerspruch zum letzten Korollar.

Sei w eine Eingabe, für die wir entscheiden wollen, ob $w \in L_d^c$.
Wir können wie folgt vorgehen:

- Berechne das i, so dass $w = w_i$ ist.
- Betrachte die durch w_i kodierte Turing-Maschine $\mathcal{M}_i$.
- Wende die Turing-Maschine für $\mathcal{H}$ auf $\langle\mathcal{M}_i\rangle \cdot w_i$ an.

Das Halteproblem

Satz (Unentscheidbarkeit des Halteproblems):
$\mathcal{H} = \{wv \mid T_w \text{ hält auf der Eingabe } v\}$ ist nicht entscheidbar.

Sei w eine Eingabe, für die wir entscheiden wollen, ob $w \in L_d^c$.
Wir können wie folgt vorgehen:

- Berechne das i, so dass $w = w_i$ ist.
- Betrachte die durch w_i kodierte Turing-Maschine $\mathcal{M}_i$.
- Wende die Turing-Maschine für $\mathcal{H}$ auf $\langle \mathcal{M}_i \rangle \cdot w_i$ an.

Wir machen folgende Fallunterscheidung:

- Falls $\langle \mathcal{M}_i \rangle \cdot w_i$ nicht akzeptiert wird, dann hält $\mathcal{M}_i$ nicht auf w_i.
- Nach Definition von $\mathcal{H}$ ist also $w_i \in L_d$ und damit $w_i \notin L_d^c$.
- Falls $\langle \mathcal{M}_i \rangle \cdot w_i$ akzeptiert wird, dann hält $\mathcal{M}_i$ auf w_i.
- Dann können wir auf der universellen Turing-Maschine die Berechnung von $\mathcal{M}_i$ auf w_i simulieren.

Die Universelle Sprache

Die **universelle Sprache** L_u über $\{0, 1\}$ ist definiert durch

$$L_u := \{wv \mid v \in L(T_w)\}.$$

L_u ist also die Menge aller Wörter wv für die T_w bei der Eingabe v hält und v akzeptiert.

Satz (Unentscheidbarkeit der Universellen Sprache):
Die Sprache L_u ist nicht entscheidbar.

Die Universelle Sprache

Satz (Unentscheidbarkeit der Universellen Sprache):
Die Sprache $L_u := \{wv \mid v \in L(T_w)\}$ ist nicht entscheidbar.

Beweis:

- Wir zeigen, dass L_u eine Verallgemeinerung von L_d^c ist.
- Wir nehmen an, dass es eine TM gibt, die L_u entscheidet.
- Dann zeigen wir, dass wir damit auch L_d^c entscheiden können.

Wir gehen wie folgt vor:

- Berechne das i, für das $w = w_i$.
- Betrachte die durch w_i codierte Turing-Maschine $\mathcal{M}_i$.
- Wende die Turing-Maschine für L_u auf $\langle \mathcal{M}_i \rangle \, w_i$ an.

Wäre L_u entscheidbar, so auch L_d^c mit Widerspruch zum letzen Korollar.

Die Universelle Sprache

Satz (Semi-Entscheidbarkeit der Universellen Sprache):
Die Sprache $L_u := \{wv \mid v \in L(T_w)\}$ ist semi-entscheidbar.

Die Universelle Sprache

Satz (Semi-Entscheidbarkeit der Universellen Sprache):
Die Sprache $L_u := \{wv \mid v \in L(T_w)\}$ ist semi-entscheidbar.

Beweis:
Wir benutzen die universelle Turing-Maschine, mit der Eingabe wv:

- Falls T_w die Eingabe v akzeptiert, geschieht dies nach endlich vielen Schritten und die universelle Turing-Maschine akzeptiert wv.
- Falls T_w die Eingabe v nicht akzeptiert, wird wv von der universellen Turing-Maschine ebenfalls nicht akzeptiert. Dies ist unabhängig davon, ob die Simulation stoppt oder nicht.

Die Universelle Sprache

Satz (Semi-Entscheidbarkeit der Universellen Sprache):
Die Sprache $L_u := \{wv \mid v \in L(T_w)\}$ ist semi-entscheidbar.

Beweis:
Wir benutzen die universelle Turing-Maschine, mit der Eingabe wv:

- Falls T_w die Eingabe v akzeptiert, geschieht dies nach endlich vielen Schritten und die universelle Turing-Maschine akzeptiert wv.
- Falls T_w die Eingabe v nicht akzeptiert, wird wv von der universellen Turing-Maschine ebenfalls nicht akzeptiert. Dies ist unabhängig davon, ob die Simulation stoppt oder nicht.

Bemerkung:
Die Begriffe entscheidbar und semi-entscheidbar unterscheiden sich tatsächlich.

Satz von Rice - Motivation

- Wir haben bisher gezeigt, dass wir kein Programm schreiben können, das für ein Turing-Maschinen-Programm $\langle \mathcal{M} \rangle$ und eine Eingabe w entscheidet, ob $\mathcal{M}$ auf der Eingabe w hält.
- Wir werden im folgenden sehen, dass wir aus einem Programm im allgemeinen keine nicht-trivialen Eigenschaften der von dem Programm realisierten Funktion ableiten können.

Satz von Rice

Satz (Satz von Rice):
Sei R die Menge der von Turing-Maschinen berechenbaren Funktionen und S eine nicht-triviale Teilmenge von R ($\emptyset \neq S \neq R$). Dann ist die Sprache

$$L(S) := \{\langle\mathcal{M}\rangle \mid \mathcal{M} \text{ berechnet eine Funktion aus } S\}$$

nicht entscheidbar.

Satz von Rice

Satz (Satz von Rice):
Sei R die Menge der von Turing-Maschinen berechenbaren Funktionen und S eine nicht-triviale Teilmenge von R ($\emptyset \neq S \neq R$). Dann ist die Sprache

$$L(S) := \{\langle\mathcal{M}\rangle \mid \mathcal{M} \text{ berechnet eine Funktion aus } S\}$$

nicht entscheidbar.

Beweisskizze:

- Zeige: $\mathcal{H}_\varepsilon := \{\langle\mathcal{M}\rangle \mid \mathcal{M} \text{ hält auf der Eingabe } \varepsilon\}$ ist unentscheidbar
- Zeige: $\mathcal{H}_\varepsilon^c$ ist unentscheidbar
- Führe den Widerspruchsbeweis für die Unentscheidbarkeit von $L(S)$:
- Konstruiere TM für $\mathcal{H}_\varepsilon^c$ unter Benutzung von TM $\mathcal{M}'$ für $L(S)$

Bemerkungen zum Satz von Rice

Der Satz von Rice hat weitreichende Konsequenzen:

> Es ist für Programme nicht entscheidbar, ob die durch sie definierte Sprache endlich, leer, unendlich oder ganz Σ^* ist.

Wir haben hier nur die Unentscheidbarkeit von L_d direkt bewiesen.
Die anderen Beweise folgten dem folgenden Schema:

> Um zu zeigen, dass ein Problem A unentscheidbar ist, zeigen wir, wie man mit einem Entscheidungsverfahren für A ein bekanntermaßen unentscheidbares Problem B entscheiden kann. Dies liefert den gewünschten Widerspruch.

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Post'sches Korrespondenzproblems
Gegeben ist endliche Folge von Wortpaaren

$$K = ((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n))$$

über einem endlichen Alphabet Σ. Es gilt $x_i \neq \varepsilon$ und $y_i \neq \varepsilon$. Gefragt ist, ob es eine endliche Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $x_{i_1} \ldots x_{i_k} = y_{i_1} \ldots y_{i_k}$ gilt.

Beispiele

- $K = ((1, 111), (10111, 10), (10, 0))$ hat die Lösung $(2, 1, 1, 3)$, denn es gilt:
$$x_2 x_1 x_1 x_3 = 101111110 = y_2 y_1 y_1 y_3$$
- $K = ((10, 101), (011, 11), (101, 011))$ hat keine Lösung
- $K = ((001, 0), (01, 011), (01, 101), (10, 001))$ hat eine Lösung der Länge 66.

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Satz (Unentscheidbarkeit des PKP):
Das Post'sche Korrespondezproblem ist nicht entscheidbar

Beweis:
Beweis über Nicht-Entscheidbarkeit des Halteproblems.

Eigenschaften von (semi-)entscheibaren Sprachen

- Die entscheidbaren Sprachen sind abgeschlossen unter Komplementbildung, Schnitt und Vereinigung.
- Die semi-entscheidbaren Sprachen sind abgeschlossen unter Schnitt und Vereinigung, aber nicht unter Komplementbildung.