Theoretische Grundlagen der Informatik

Vorlesung am 21. Dezember 2010

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Approximationsschemata

Ein (polynomiales) **Approximationsschema** (**PAS**) für ein Optimierungsproblem Π ist eine Familie von Algorithmen $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$, so dass für alle $\varepsilon > 0$

- $\mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon} \leq 1 + \varepsilon$ ist (d.h. $\mathcal{A}_\varepsilon$ ist ein ε–approximierender Algorithmus).
- $\mathcal{A}_\varepsilon$ polynomial in der Größe des Inputs ist.

Ein Approximationsschema $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ heißt **vollpolynomial** (**FPAS**) falls seine Laufzeit zudem polynomial in $\frac{1}{\varepsilon}$ ist.

Approximationsschemata

Bezeichne $\langle I \rangle$ die Kodierungslänge der Eingabe-Instanz I.

Satz:
Sei Π ein $\mathcal{NP}$–schweres Optimierungsproblem mit

- $\mathrm{OPT}(I) \in \mathbb{N}$ für alle $I \in D_\Pi$, und
- es existiert ein Polynom q mit $\mathrm{OPT}(I) < q(\langle I \rangle)$ für alle $I \in D_\Pi$.

Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, so gibt es kein FPAS $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ für Π.

Approximationsschemata

Satz:
Sei Π ein $\mathcal{NP}$–schweres Optimierungsproblem mit

- $\mathrm{OPT}(I) \in \mathbb{N}$ für alle $I \in D_\Pi$, und
- es existiert ein Polynom q mit $\mathrm{OPT}(I) < q(\langle I \rangle)$ für alle $I \in D_\Pi$.

Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, so gibt es kein FPAS $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ für Π.

Beweis:

- O.B.d.A. sei Π ein Maximierungsproblem.
- Sei $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ ein FPAS für Π
- Zu $I \in D_\Pi$ sei $\varepsilon_0 := \frac{1}{q(\langle I \rangle)}$
- Dann ist $\mathcal{A}_{\varepsilon_0}$ polynomial in $\langle I \rangle$ und in $\frac{1}{\varepsilon_0} = q(\langle I \rangle)$

Approximationsschemata

Satz:
Sei Π ein $\mathcal{NP}$–schweres Optimierungsproblem mit

- $\mathrm{OPT}(I) \in \mathbb{N}$ für alle $I \in D_\Pi$, und
- es existiert ein Polynom q mit $\mathrm{OPT}(I) < q(\langle I \rangle)$ für alle $I \in D_\Pi$.

Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, so gibt es kein FPAS $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ für Π.

Es gilt:

$$\begin{aligned} OPT(I) &\leq (1+\varepsilon_0)\mathcal{A}_{\varepsilon_0}(I) \text{ und} \\ OPT(I) &< q(\langle I \rangle) = \frac{1}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Also auch

$$\mathrm{OPT}(I) - \mathcal{A}_{\varepsilon_0}(I) \leq \varepsilon_0 \cdot \mathcal{A}_{\varepsilon_0}(I) \leq \varepsilon_0 \cdot \mathrm{OPT}(I) < 1$$

- Da $\mathrm{OPT}(I) \in \mathbb{N}$, ist $\mathrm{OPT}(I) = \mathcal{A}_{\varepsilon_0}(I)$
- Widerspruch zur Annahme, dass $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

Ein FPAS für KNAPSACK

Problem KNAPSACK

Gegeben: Eine endliche Menge M,
eine Gewichtsfunktion $w : M \to \mathbb{N}_0$,
eine Kostenfunktion $c : M \to \mathbb{N}_0$, $W \in \mathbb{N}$.

Aufgabe: Gib eine Teilmenge M' von M an, so dass
$\sum_{i \in M'} w_i \leq W$ und $\sum_{i \in M'} c_i$ maximal ist.

Ein pseudopolynomialer, optimaler Algorithmus für KNAPSACK

Bezeichne, für $r \in \mathbb{N}_0$ $$w_r^j := \min_{M' \subseteq \{1,\dots,j\}} \left\{ \sum_{i \in M'} w_i \;\middle|\; \sum_{i \in M'} c_i = r \right\}$$

- **Initialisierung**
  Für $1 \leq j \leq n$ setze $w_0^j := 0$ ansonsten setze $c := \sum_{i=1}^{n} c_i$
- **Berechung**
  Solange $w_r^j \leq W$ berechne für $2 \leq j \leq n$ und $1 \leq r \leq c$ den Wert

$$w_r^j = \min\left\{ w_{r-c_j}^{j-1} + w^j, w_r^{j-1} \right\} \enspace .$$

- **Ausgabe**

$$c^* := \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ r \mid w_r^j \leq W \right\}$$

und die entsprechende Menge $M' \subseteq M$ mit $c^* = \sum_{i \in M'} c_i$.

Ein pseudopolynomialer, optimaler Algorithmus für KNAPSACK

Bezeichne, für $r \in \mathbb{N}_0$ $\quad w_r^j := \min_{M' \subseteq \{1,\dots,j\}} \left\{ \sum_{i \in M'} w_i \;\middle|\; \sum_{i \in M'} c_i = r \right\}$

- **Initialisierung**
  Für $1 \leq j \leq n$ setze $w_0^j := 0$ ansonsten setze $c := \sum_{i=1}^n c_i$
- **Berechung**
  Solange $w_r^j \leq W$ berechne für $2 \leq j \leq n$ und $1 \leq r \leq c$ den Wert

$$w_r^j = \min \left\{ w_{r-c_j}^{j-1} + w^j, w_r^{j-1} \right\} \ .$$

- **Ausgabe**

$$c^* := \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ r \mid w_r^j \leq W \right\}$$

  und die entsprechende Menge $M' \subseteq M$ mit $c^* = \sum_{i \in M'} c_i$.

Laufzeit: in $\mathcal{O}(n \cdot c)$. **Lösung:** optimal.
$\Rightarrow$Optimaler pseudopolynomialer Algorithmus.

Ein FPAS für KNAPSACK

- Bezeichne $\mathcal{A}$ obigen pseudopolynomialen Algorithmus mit Laufzeit $\mathcal{O}(n \cdot c)$ für KNAPSACK.
- Sei k beliebig aber fest.
- **Betrachte das skalierte Problem Π_k zu mit $c'_i := \left\lfloor \frac{c_i}{k} \right\rfloor$ für alle $i \in M$.**

- Dann liefert $\mathcal{A}$ für jedes $I_k \in \Pi_k$ eine Menge $M' \subseteq M$ mit $\sum_{i \in M'} c'_i = \mathrm{OPT}(I_k)$.
- Setze nun $c_{\max} := \max_{i \in M} c_i$.
- **Zu $\varepsilon > 0$ sei $\mathcal{A}_\varepsilon$ Algorithmus $\mathcal{A}$ angewendet auf I_k, wobei**

$$k := \frac{c_{\max}}{\left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \cdot n}$$

Ein FPAS für KNAPSACK

Satz:
$\mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon}(I) \leq 1 + \varepsilon$ für alle $I \in D_\Pi$ und die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ ist in $\mathcal{O}(n^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$, d.h. $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ ist ein FPAS für KNAPSACK.

Ein FPAS für KNAPSACK

Karlsruher Institut für Technologie

Satz:
$\mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon}(I) \leq 1 + \varepsilon$ für alle $I \in D_\Pi$ und die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ ist in $\mathcal{O}(n^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$, d.h. $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ ist ein FPAS für KNAPSACK.

Beweis:

Die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ ist in $\mathcal{O}(n \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i')$ und

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' < \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{k} \leq n \cdot \frac{c_{\max}}{k} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) n^2.$$

Also ist die Laufzeit von $\mathcal{A}_\varepsilon$ in $\mathcal{O}(n^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$ für alle $\varepsilon > 0$.

Ein FPAS für KNAPSACK

Für die Abschätzung von $\mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon}$ betrachte M' mit $\mathrm{OPT}(I) = \sum_{i\in M'} c_i$. Es gilt

$$\mathrm{OPT}(I_k) \geq \sum_{i\in M'} \left\lfloor \frac{c_i}{k} \right\rfloor \geq \sum_{i\in M'} \left(\frac{c_i}{k} - 1 \right).$$

Also ist

$$\mathrm{OPT}(I) - k \cdot \mathrm{OPT}(I_k) \leq k \cdot n.$$

Da $\frac{1}{k}\mathcal{A}_\varepsilon(I) \geq \mathrm{OPT}(I_k)$ ist, folgt

$$\mathrm{OPT}(I) - \mathcal{A}_\varepsilon(I) \leq k \cdot n$$

und wegen $\mathrm{OPT}(I) \geq c_{\max}$ (wir setzen wieder o.B.d.A. $W \geq w_i$ für alle $i \in M$ voraus) folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\mathcal{A}_\varepsilon}(I) &= \frac{\mathrm{OPT}(I)}{\mathcal{A}_\varepsilon(I)} \leq \frac{\mathcal{A}_\varepsilon(I) + kn}{\mathcal{A}_\varepsilon(I)} &&= 1 + \frac{kn}{\mathcal{A}_\varepsilon(I)} \leq 1 + \frac{kn}{\mathrm{OPT}(I) - kn} \\
&\leq 1 + \frac{kn}{c_{\max} - kn} &&= 1 + \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + 1 - 1} = 1 + \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Ein allgemeineres Resultat

Mit einem ähnlichen Beweis kann man zeigen:

Satz:
Sei Π ein Optimierungsproblem für das gilt:

- $\mathrm{OPT}(I) \in \mathbb{N}$ für alle $I \in D_\Pi$
- es existiert ein Polynom q mit $\mathrm{OPT}(I) \leq q(\langle I \rangle + \max \#(I))$
  ($\max \#(I)$ ist die größte in I vorkommende Zahl)

Falls Π ein FPAS hat, so hat es einen pseudopolynomialen optimalen Algorithmus.