Karlsruher Institut für Technologie

Theoretische Grundlagen der Informatik

Vorlesung am 20.01.2011

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Nutzlose Variablen

Sei G eine kontextfreie Grammatik. Eine Variable A heißt **nutzlos**, falls es keine Ableitung $S \xrightarrow{*} w$ gibt, $w \in \Sigma^*$, in der A vorkommt.

Satz:
Für eine kontextfreie Grammatik kann die Menge der nutzlosen Variablen (in polynomialer Zeit) berechnet werden.

Beweis:

- Wir benutzen ein zweistufiges Verfahren.

Schritt 1

Bestimme alle Variablen, die ein Wort erzeugen können

Formal: Berechne $V' = \{A \in V \mid \exists w \in \Sigma^* : A \overset{*}{\to} w\}$

- Initialisiere eine leere Queue Q.
- Füge alle $A \in V$ mit $A \to w$ für ein $w \in \Sigma^*$ in Q und V' ein.
- Entferne der Reihe nach jedes Element A aus Q
  - Ersetze jede Regel
    $$B \to \alpha A \beta \text{ mit } \alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$$
    durch die Regeln
    $$B \to \alpha w \beta, \text{ wobei } w \in \Sigma^* \text{ und } A \to w \text{ Regel.}$$
  - Wenn dabei eine Regel der Form
    $$B \to w', \ w' \in \Sigma^*,$$
    entsteht und $B \notin V'$, füge B in Q und V' ein.
- Das Verfahren endet, wenn Q leer ist.

Schritt 1

Bemerkung 1

- Falls $S \notin V'$, breche das Verfahren ab.
- G erzeugt dann die leere Sprache und alle Variablen sind nutzlos.

Bemerkung 2

- Für jede Variable A mit $A \xrightarrow{*} w$ für ein $w \in \Sigma^*$ gilt:
- Per Induktion über die Länge der kürzesten Ableitungsregel der Form $A \xrightarrow{*} w$ kann für A gezeigt werden, dass $A \in V'$.

Beispiel: Schritt 1

Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit Produktionen R gegeben durch

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow Aa|B|Cab \\
A &\rightarrow bc|A \\
B &\rightarrow Bd|Cd \\
C &\rightarrow aBc \\
D &\rightarrow Ab \\
E &\rightarrow SD
\end{aligned}
$$

Beispiel: Schritt 1

Füge alle $A \in V$ mit $A \to w$ für ein $w \in \Sigma^*$ in Q und V' ein.

$$\begin{aligned} S &\to Aa|B|Cab \\ A &\to bc|A \\ B &\to Bd|Cd \\ C &\to aBc \\ D &\to Ab \\ E &\to SD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= \emptyset \\ Q &= \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &\to Aa|B|Cab \\ A &\to bc|A \\ B &\to Bd|Cd \\ C &\to aBc \\ D &\to Ab \\ E &\to SD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= \{A\} \\ Q &= \{A\} \end{aligned}$$

Beispiel: Schritt 1

Entferne der Reihe nach jedes Element A aus Q

- Ersetze jede Regel $B \to \alpha A \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ durch die Regeln $B \to \alpha w \beta$, wobei $w \in \Sigma^*$ und $A \to w$ Regel.
- Wenn dabei eine Regel der Form $B \to w'$, $w' \in \Sigma^*$ entsteht und $B \notin V'$, füge B in Q und V' ein.

$$
\begin{array}{lcl}
S & \to & Aa | B | Cab \\
A & \to & bc | A \\
B & \to & Bd | Cd \\
C & \to & aBc \\
D & \to & Ab \\
E & \to & SD
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
S & \to & \color{red}{bc}a | B | Cab \\
A & \to & bc | A \\
B & \to & Bd | Cd \\
C & \to & aBc \\
D & \to & \color{red}{bc}b \\
E & \to & SD
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
V' & = & \{A\} \\
Q & = & \{A\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
V' & = & \{A, \color{red}{S}, \color{red}{D}\} \\
Q & = & \{S, D\}
\end{array}
$$

Beispiel: Schritt 1

Entferne der Reihe nach jedes Element A aus Q

- Ersetze jede Regel $B \to \alpha A \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ durch die Regeln $B \to \alpha w \beta$, wobei $w \in \Sigma^*$ und $A \to w$ Regel.
- Wenn dabei eine Regel der Form $B \to w'$, $w' \in \Sigma^*$ entsteht und $B \notin V'$, füge B in Q und V' ein.

$$\begin{aligned} S &\to bca|B|Cab \\ A &\to bc|A \\ B &\to Bd|Cd \\ C &\to aBc \\ D &\to bcb \\ E &\to SD \end{aligned} \qquad \begin{aligned} S &\to bca|B|Cab \\ A &\to bc|A \\ B &\to Bd|Cd \\ C &\to aBc \\ D &\to bcb \\ E &\to bcaD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= \{A, S, D\} \\ Q &= \{S, D\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} V' &= \{A, S, D\} \\ Q &= \{D\} \end{aligned}$$

Beispiel: Schritt 1

Entferne der Reihe nach jedes Element A aus Q

- Ersetze jede Regel $B \to \alpha A \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ durch die Regeln $B \to \alpha w \beta$, wobei $w \in \Sigma^*$ und $A \to w$ Regel.
- Wenn dabei eine Regel der Form $B \to w'$, $w' \in \Sigma^*$ entsteht und $B \notin V'$, füge B in Q und V' ein.

$$\begin{aligned} S &\to bca|B|Cab \\ A &\to bc|A \\ B &\to Bd|Cd \\ C &\to aBc \\ D &\to bcb \\ E &\to bcaD \end{aligned} \qquad \begin{aligned} S &\to bca|B|Cab \\ A &\to bc|A \\ B &\to Bd|Cd \\ C &\to aBc \\ D &\to bcb \\ E &\to bca\color{red}{bcb} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= \{A, S, D\} \\ Q &= \{D\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} V' &= \{A, S, D, \color{red}{E}\} \\ Q &= \{\color{red}{E}\} \end{aligned}$$

Beispiel: Schritt 1

Entferne der Reihe nach jedes Element A aus Q

- Ersetze jede Regel $B \rightarrow \alpha A \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ durch die Regeln $B \rightarrow \alpha w \beta$, wobei $w \in \Sigma^*$ und $A \rightarrow w$ Regel.
- Wenn dabei eine Regel der Form $B \rightarrow w'$, $w' \in \Sigma^*$ entsteht und $B \notin V'$, füge B in Q und V' ein.

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & bca|B|Cab \\
A & \rightarrow & bc|A \\
B & \rightarrow & Bd|Cd \\
C & \rightarrow & aBc \\
D & \rightarrow & bcb \\
E & \rightarrow & bcabcb \\
\\
V' & = & \{A, S, D, E\} \\
Q & = & \{E\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & bca|B|Cab \\
A & \rightarrow & bc|A \\
B & \rightarrow & Bd|Cd \\
C & \rightarrow & aBc \\
D & \rightarrow & bcb \\
E & \rightarrow & bcabcb \\
\\
V' & = & \{A, S, D, E\} \\
Q & = & \{\}
\end{array}
$$

Schritt 2

Bestimme alle Variablen in V', die vom Startsymbol aus „erreicht“ werden können.
Formal: Berechne $\{A \in V' \mid S = A \text{ oder } \exists \alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^* : S \xrightarrow{*} \alpha A \beta\}$

- Starte mit $V'' = \{S\}$
- Füge zu allen Regeln $A \to \alpha B \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*, A \in V'', B \in V'$ die Variable B in V'' ein.
- Wiederhole den letzen Schritt, bis sich V'' nicht mehr ändert.

Per Induktion über die Länge der kürzesten Ableitungsregel der Form $S \to \alpha A \beta,\ \alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$, kann dann wieder die Korrektheit bewiesen werden.

Fazit: Nach Ende von Schritt 2 ist V'' die Menge aller nützlichen Variablen.

Beispiel: Schritt 2

Starte mit $V'' = \{S\}$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Aa|B|Cab \\ A &\rightarrow bc|A \\ B &\rightarrow Bd|Cd \\ C &\rightarrow aBc \\ D &\rightarrow Ab \\ E &\rightarrow SD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= \{A, S, D, E\} \\ V'' &= \{\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Aa|B|Cab \\ A &\rightarrow bc|A \\ B &\rightarrow Bd|Cd \\ C &\rightarrow aBc \\ D &\rightarrow Ab \\ E &\rightarrow SD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= \{A, S, D, E\} \\ V'' &= \{S\} \end{aligned}$$

Beispiel: Schritt 2

Füge zu allen Regeln $A \rightarrow \alpha B \beta$ mit $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*, A \in V''$, $B \in V'$ die Variable B in V'' ein.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Aa|B|Cab \\ A &\rightarrow bc|A \\ B &\rightarrow Bd|Cd \\ C &\rightarrow aBc \\ D &\rightarrow Ab \\ E &\rightarrow SD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= \{A, S, D, E\} \\ V'' &= \{S\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Aa|B|Cab \\ A &\rightarrow bc|A \\ B &\rightarrow Bd|Cd \\ C &\rightarrow aBc \\ D &\rightarrow Ab \\ E &\rightarrow SD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= \{A, S, D, E\} \\ V'' &= \{S, A\} \end{aligned}$$

Beispiel: Schritt 2

Wiederhole den letzen Schritt, bis sich V'' nicht mehr ändert.

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow Aa|B|Cab \\
A &\rightarrow bc|A \\
B &\rightarrow Bd|Cd \\
C &\rightarrow aBc \\
D &\rightarrow Ab \\
E &\rightarrow SD
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V' &= \{A, S, D, E\} \\
V'' &= \{S, A\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow Aa|B|Cab \\
A &\rightarrow bc|A \\
B &\rightarrow Bd|Cd \\
C &\rightarrow aBc \\
D &\rightarrow Ab \\
E &\rightarrow SD
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V' &= \{A, S, D, E\} \\
V'' &= \{S, A\}
\end{aligned}
$$

Korollar

Korollar
Für eine kontextfreie Grammatik G kann (in polynomialer Zeit) entschieden werden, ob $L(G) = \emptyset$ ist.

Beweis:

- $L(G) = \emptyset$ genau dann, wenn S nutzlos.

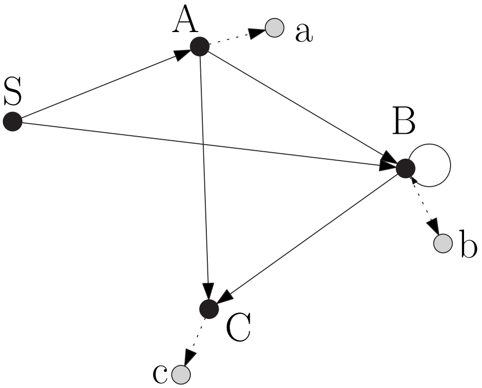
Satz:
Für eine kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ kann (in polynomialer Zeit) entschieden werden, ob $L(G)$ endlich ist.

Beweis:

- Entferne alle nutzlosen Variablen
- Überführe G in eine äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform.
- Betrachte den gerichteten Graphen (V, E) mit
  - Knotenmenge V ist gleich der Variablenmenge von G
  - Kantenmenge $E = \{(A, B) \mid \exists C \in V : A \to BC \in R \vee A \to CB \in R\}$
- Mit Tiefensuche kann entschieden werden, ob dieser Graph einen Kreis enthält.
- Man kann sich leicht überlegen, dass $L(G)$ genau dann endlich ist, wenn der entsprechende Graph keinen Kreis enthält.

Beispielgraph

$$S \rightarrow AB$$
$$A \rightarrow BC$$
$$B \rightarrow BC$$
$$A \rightarrow a$$
$$B \rightarrow b$$
$$C \rightarrow c$$



Satz:
Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen bzgl. Vereinigung, Konkatenation und Kleenschem Abschluss.

Beweis:

- Seien L_1 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_1 = (\Sigma, V_1, S_1, R_1)$
- Seien L_2 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_2 = (\Sigma, V_2, S_2, R_2)$
- o.B.d.A. sei $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Vereinigung: Die Grammatik

$$\begin{array}{lcl} V & = & V_1 \cup V_2 \cup \{S\} \\ S & & \text{neues Startsymbol} \\ R & = & R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\} \end{array}$$

erzeugt $L_1 \cup L_2$.

Satz:
Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen bzgl. Vereinigung, Konkatenation und Kleenschem Abschluss.

Beweis:

- Seien L_1 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_1 = (\Sigma, V_1, S_1, R_1)$
- Seien L_2 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_2 = (\Sigma, V_2, S_2, R_2)$
- o.B.d.A. sei $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Konkatenation: Die Grammatik

$$\begin{array}{lcl} V & = & V_1 \cup V_2 \cup \{S\} \\ S & & \text{neues Startsymbol} \\ R & = & R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 S_2\} \end{array}$$

erzeugt $L_1 \cdot L_2$.

Satz:
Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen bzgl. Vereinigung, Konkatenation und Kleenschem Abschluss.

Beweis:

- Seien L_1 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_1 = (\Sigma, V_1, S_1, R_1)$
- Seien L_2 kontextfreie Sprache mit Grammatik $G_2 = (\Sigma, V_2, S_2, R_2)$
- o.B.d.A. sei $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Kleenscher Abschluss: Die Grammatik

$$\begin{array}{lcl} V & = & V_1 \cup \{S\} \\ S & & \text{neues Startsymbol} \\ R & = & R_1 \cup \{S \to \varepsilon, S \to SS, S \to S_1\} \end{array}$$

erzeugt L_1^*.

Satz:
Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist nicht abgeschlossen bzgl. Komplementbildung und Durchschnitt.

Beweis Schnitt: Betrachte die kontextfreien Sprachen

$$L_1 = \{a^n b^n | n \geq 1\} \qquad L_2 = \{c\}^*$$
$$L_3 = \{a\}^* \qquad L_4 = \{b^n c^n | n \geq 1\}$$

Nach dem letzen Satz sind dann auch $L_1 \cdot L_2$ und $L_3 \cdot L_4$ kontextfrei.
Es ist dann

$$L := L_1 L_2 \cap L_3 L_4 = \{a^n b^n c^n | n \geq 1\} .$$

Diese Sprache ist nicht kontextfrei.

Satz:
Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist nicht abgeschlossen bzgl. Komplementbildung und Durchschnitt.

Beweis Komplementbildung:

- Angenommen, die Klasse der kontextfreien Sprachen wäre bzgl. Komplementbildung abgeschlossen.
- Dann würde für beliebige kontextfreie Sprachen L_1, L_2 gelten $(L_1^c \cup L_2^c)^c = L_1 \cap L_2$ ist wieder kontextfrei.
- Dies ist ein Widerspruch zur ersten Aussage des Satzes.

Greibach Normalform

Eine kontextfreie Grammatik ist in **Greibach-Normalform**, wenn alle Ableitungsregeln von der Form

$$A \to a\alpha \text{ mit } A \in V, a \in \Sigma \text{ und } \alpha \in V^*$$

sind.

Satz:
Für jede kontextfreie Grammatik G, für die $L(G)$ das leere Wort nicht enthält, kann eine (äquivalente) kontextfreie Grammatik G' mit $L(G) = L(G')$ in Greibach-Normalform konstruiert werden.

Beweis - Ersetzung (i)

Folgende Ersetzungen ändern nichts an der erzeugten Sprache:

Ersetzung (i). Eine Regel

$$A \rightarrow \alpha_1 B \alpha_2$$

wobei

$$B \rightarrow \beta_1, \quad B \rightarrow \beta_2, \quad \ldots, \quad B \rightarrow \beta_r$$

alle Regeln sind, deren linke Seite B ist, kann durch die Regeln

$$\begin{gathered} A \rightarrow \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \\ A \rightarrow \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 \\ \ldots \\ A \rightarrow \alpha_1 \beta_r \alpha_2 \end{gathered}$$

ersetzt werden.

Beweis - Ersetzung (ii)

Folgende Ersetzungen ändern nichts an der erzeugten Sprache:

Ersetzung (ii). Seien

$$\begin{aligned} A &\to A\alpha_1, \ldots, A \to A\alpha_r \\ A &\to \beta_1, \ldots, A \to \beta_s \end{aligned}$$

alle Regeln, deren linke Seite A ist, wobei β_i nicht mit A beginnen. Dann können die Regeln

$$A \to A\alpha_1, \ldots, A \to A\alpha_r$$

durch die Regeln

$$\begin{aligned} A &\to \beta_1 B, \ldots, A \to \beta_s B \\ B &\to \alpha_1, \ldots, B \to \alpha_r, \\ B &\to \alpha_1 B, \ldots, B \to \alpha_r B \end{aligned}$$

ersetzt werden. Dabei sei B eine neu eingeführte Variable.

Beweis - Definitionen

Annahme G ist in Chomsky-Normalform mit

$$V = \{A_1, \dots, A_m\}$$
$$\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$$

und damit ausschließlich Regeln der Form

$$A_i \to A_j A_k$$
$$A_i \to a_j \; .$$

Die Grammatik in Greibach-Normalform wird zusätzlich die Variablen $\{B_1, \dots, B_m\}$ benutzen. Sei

$$V' := \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m\}$$

Beweis: Invarianten

$$V' := \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m\} \qquad \Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_i \to A_j A_k$$
$$A_i \to a_j \ .$$

Während der Umformung sind folgende Invarianten erfüllt.

1.Invariante
Die rechte Seite einer Regel, deren rechte Seite mit einer Variablen beginnt, besteht nur aus Variablen.

Beweis: Invarianten

$$V' := \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m\} \qquad \Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_i \to A_j A_k$$
$$A_i \to a_j \; .$$

Während der Umformung sind folgende Invarianten erfüllt.

2.Invariante
Die rechte Seite einer Regel, deren rechte Seite mit einer Variablen beginnt, beginnt mit einer Variablen aus $V = \{A_1, \ldots, A_m\}$.

Beweis: Invarianten

$$V' := \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m\} \qquad \Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_i \to A_j A_k$$
$$A_i \to a_j \ .$$

Während der Umformung sind folgende Invarianten erfüllt.

3.Invariante
Symbole aus Σ kommen nur als erstes Zeichen der rechten Seite einer Regel vor.

Beweis: Invarianten

$$V' := \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m\} \qquad \Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_i \to A_j A_k$$
$$A_i \to a_j \; .$$

Während der Umformung sind folgende Invarianten erfüllt.

4.Invariante
Die rechte Seite einer Regel, deren linke Seite aus $V = \{A_1, \ldots, A_m\}$ ist und deren rechte Seite mit einer Variablen aus V beginnt, beginnt sogar mit zwei Variablen aus V.

Beweis: Invarianten

$$V' := \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m\} \qquad \Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_i \to A_j A_k$$
$$A_i \to a_j \ .$$

Während der Umformung sind folgende Invarianten erfüllt.

5.Invariante
Die rechte Seite einer Regel, deren linke Seite aus $V' \setminus V = \{B_1, \ldots, B_m\}$ ist, besteht nur aus Variablen aus V'.

Beweis: Invarianten

$$V' := \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m\} \qquad \Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

zu Beginn mit Regeln der Form

$$A_i \to A_j A_k$$
$$A_i \to a_j \; .$$

Wir formen G zunächst so um, dass außer Invarianten 1-5 noch die nächste Invariante gilt:

6.Invariante
Falls $A_i \to A_j\alpha$ Regel ist, so gilt $j > i$.

Beweis - Übersicht Invarianten

1.Invariante Die rechte Seite einer Regel, deren rechte Seite mit einer Variablen beginnt, besteht nur aus Variablen.

2.Invariante Die rechte Seite einer Regel, deren rechte Seite mit einer Variablen beginnt, beginnt mit einer Variablen aus $V = \{A_1, \dots, A_m\}$.

3.Invariante Symbole aus Σ kommen nur als erstes Zeichen der rechten Seite einer Regel vor.

4.Invariante Die rechte Seite einer Regel, deren linke Seite aus $V = \{A_1, \dots, A_m\}$ ist und deren rechte Seite mit einer Variablen aus V beginnt, beginnt sogar mit zwei Variablen aus V.

5.Invariante Die rechte Seite einer Regel, deren linke Seite aus $V' \backslash V = \{B_1, \dots, B_m\}$ ist, besteht nur aus Variablen aus V'.

6.Invariante Falls $A_i \to A_j\alpha$ Regel ist, so gilt $j > i$.

Beweis: Beispielgrammatik

$$
\begin{aligned}
V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\
\Sigma &= \{0, 1\} \\
S &= A_1 \\
R &= \{A_1 \to A_2A_3, \\
&\quad A_2 \to A_3A_1,\ A_2 \to 1, \\
&\quad A_3 \to A_1A_2,\ A_3 \to 0\}
\end{aligned}
$$

Beweis - Verfahren - Schritt 1

Vorher: Grammatik in Chomsky-Normalform
Nachher: 6. Invariante hält: Falls $A_i \to A_j\alpha$ Regel ist, so gilt $j > i$.

Aktion: Dabei wenden wir (in dieser Reihenfolge)

Ersetzung (ii)	zur Ersetzung aller Regeln $A_1 \to A_1\alpha$
Ersetzung (i)	zur Ersetzung aller Regeln $A_2 \to A_1\alpha$
Ersetzung (ii)	zur Ersetzung aller Regeln $A_2 \to A_2\alpha$
Ersetzung (i)	zur Ersetzung aller Regeln $A_3 \to A_1\alpha$
Ersetzung (i)	zur Ersetzung aller Regeln $A_3 \to A_2\alpha$
Ersetzung (ii)	zur Ersetzung aller Regeln $A_3 \to A_3\alpha$
	$\vdots$

Beweis - Schritt 1 - Beispiel

Ersetzung (i)

$$\begin{aligned} A &\to \alpha_1 B \alpha_2 \\ B &\to \beta_1 | \beta_2, \ldots | \beta_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &\to \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 | \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 | \ldots | \alpha_1 \beta_r \alpha_2 \\ B &\to \beta_1 | \beta_2, \ldots | \beta_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ S &= A_1 \\ R &= \{A_1 \to A_2 A_3, \\ &\quad A_2 \to A_3 A_1,\ A_2 \to 1, \\ &\quad {\color{red} A_3 \to A_1 A_2},\ A_3 \to 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ S &= A_1 \\ R &= \{A_1 \to A_2 A_3, \\ &\quad A_2 \to A_3 A_1,\ A_2 \to 1, \\ &\quad {\color{red} A_3 \to A_2 A_3 A_2},\ A_3 \to 0\} \end{aligned}$$

Beweis - Schritt 1 - Beispiel

Ersetzung (i)

$$\begin{aligned} A &\to \alpha_1 B \alpha_2 \\ B &\to \beta_1 | \beta_2, \ldots | \beta_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ S &= A_1 \\ R &= \{A_1 \to A_2 A_3, \\ & \quad A_2 \to A_3 A_1,\ A_2 \to 1, \\ & \quad A_3 \to A_2 A_3 A_2,\ A_3 \to 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &\to \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 | \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 | \ldots | \alpha_1 \beta_r \alpha_2 \\ B &\to \beta_1 | \beta_2, \ldots | \beta_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ S &= A_1 \\ R &= \{A_1 \to A_2 A_3, \\ & \quad A_2 \to A_3 A_1,\ A_2 \to 1, \\ & \quad A_3 \to A_3 A_1 A_3 A_2 | 1 A_3 A_2, \\ & \quad A_3 \to 0\} \end{aligned}$$

Beweis - Schritt 1 - Beispiel

Ersetzung (ii)

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A\alpha_1, \ldots, A \rightarrow A\alpha_r \\ A &\rightarrow \beta_1, \ldots, A \rightarrow \beta_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \beta_1 B, \ldots, A \rightarrow \beta_s B \\ B &\rightarrow \alpha_1, \ldots, B \rightarrow \alpha_r, \\ B &\rightarrow \alpha_1 B, \ldots, B \rightarrow \alpha_r B \\ A &\rightarrow \beta_1, \ldots, A \rightarrow \beta_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ S &= A_1 \\ R &= \{A_1 \rightarrow A_2A_3, \\ & \quad A_2 \rightarrow A_3A_1,\ A_2 \rightarrow 1, \\ & \quad A_3 \rightarrow A_3A_1A_3A_2, \\ & \quad A_3 \rightarrow 0|1A_3A_2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ S &= A_1 \\ R &= \{A_1 \rightarrow A_2A_3, \\ & \quad A_2 \rightarrow A_3A_1,\ A_2 \rightarrow 1, \\ & \quad A_3 \rightarrow 0B_3|1A_3A_2B_3, \\ & \quad B_3 \rightarrow A_1A_3A_2|A_1A_3A_2B_3 \\ & \quad A_3 \rightarrow 0|1A_3A_2\} \end{aligned}$$

Beweis - Verfahren - Schritt 2

Vorher: Alle Regeln sind von der Form

$$\begin{aligned} A &\rightarrow a\alpha \\ A &\rightarrow \alpha \text{ mit } \alpha \in (V')^*, a \in \Sigma \end{aligned}$$

wobei es keine ε-Regeln oder Kettenregeln mit linker Seite $A \in V$ gibt.
Wegen Invariante 6

- gibt es keine Regel $A_m \rightarrow \alpha$
- beginnen alle $A_{m-1} \rightarrow \alpha$-Regeln mit A_m.

Aktion: Ersetze mit absteigenden k alle Regeln der Form

$$A_k \rightarrow \alpha \text{ mit } \alpha \in (V')^*$$

mittels Ersetzung (i).

Nachher: Regeln mit linker Seite in V in Form $A_k \rightarrow a\alpha$, $a \in \Sigma, \alpha \in (V')^*$.

Beweis - Schritt 2 - Beispiel

Ersetzung (i)

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \alpha_1 B \alpha_2 \\ B &\rightarrow \beta_1 | \beta_2, \ldots | \beta_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ S &= A_1 \\ R &= \{A_1 \rightarrow A_2 A_3, \\ & \quad A_2 \rightarrow A_3 A_1, \\ & \quad A_2 \rightarrow 1, \\ & \quad A_3 \rightarrow 0 B_3 | 1 A_3 A_2 B_3, \\ & \quad A_3 \rightarrow 0 | 1 A_3 A_2\} \\ & \quad B_3 \rightarrow A_1 A_3 A_2 | A_1 A_3 A_2 B_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 | \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 | \ldots | \alpha_1 \beta_r \alpha_2 \\ B &\rightarrow \beta_1 | \beta_2, \ldots | \beta_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ S &= A_1 \\ R &= \{A_1 \rightarrow A_2 A_3, \\ & \quad A_2 \rightarrow 0 B_3 A_1 | 1 A_3 A_2 B_3 A_1 \\ & \quad A_2 \rightarrow 0 A_1 | 1 A_3 A_2 A_1 \\ & \quad A_2 \rightarrow 1, \\ & \quad A_3 \rightarrow 0 B_3 | 1 A_3 A_2 B_3, \\ & \quad A_3 \rightarrow 0 | 1 A_3 A_2\} \\ & \quad B_3 \rightarrow A_1 A_3 A_2 | A_1 A_3 A_2 B_3 \end{aligned}$$

Beweis - Schritt 2 - Beispiel

Ersetzung (i)

$$
\begin{aligned}
V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\
\Sigma &= \{0, 1\} \\
S &= A_1 \\
R &= \{A_1 \rightarrow A_2 A_3, \\
&\quad A_2 \rightarrow 0 B_3 A_1 \mid 1 A_3 A_2 B_3 A_1 \\
&\quad A_2 \rightarrow 0 A_1 \mid 1 A_3 A_2 A_1 \mid 1 \\
&\quad A_3 \rightarrow 0 B_3 \mid 1 A_3 A_2 B_3, \\
&\quad A_3 \rightarrow 0 \mid 1 A_3 A_2\} \\
&\quad B_3 \rightarrow A_1 A_3 A_2 \mid A_1 A_3 A_2 B_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \{A_1, A_2, A_3\} \\
\Sigma &= \{0, 1\} \\
S &= A_1 \\
R &= \{A_1 \rightarrow 0 B_3 A_1 A_3 \\
&\quad A_1 \rightarrow 1 A_3 A_2 B_3 A_1 A_3, \\
&\quad A_1 \rightarrow 0 A_1 A_3 \mid 1 A_3 A_2 A_1 A_3 \mid 1 A_3, \\
&\quad A_2 \rightarrow 0 B_3 A_1 \mid 1 A_3 A_2 B_3 A_1 \\
&\quad A_2 \rightarrow 0 A_1 \mid 1 A_3 A_2 A_1 \mid 1 \\
&\quad A_3 \rightarrow 0 B_3 \mid 1 A_3 A_2 B_3, \\
&\quad A_3 \rightarrow 0 \mid 1 A_3 A_2\} \\
&\quad B_3 \rightarrow A_1 A_3 A_2 \mid A_1 A_3 A_2 B_3
\end{aligned}
$$

Beweis - Verfahren - Schritt 3

Vorher: Rechte Seiten von Regeln, deren linke Seite aus $V' \setminus V = \{B_1, \ldots, B_m\}$ ist, beginnen mit einer Variablen aus $\{A_1, \ldots, A_m\}$ (wegen Invarianten 2 und 5).

Aktion: Ersetze Regeln $B_i \to A_j\alpha, \qquad \alpha \in (\Sigma \cup V')^*$ mit Ersetzung (i).

Nachher: G ist in Greibach-Normalform.

Beweis - Schritt 3 - Beispiel

Ersetzung (i)

$$
\begin{aligned}
A_1 &\rightarrow 0B_3A_1A_3 \\
A_1 &\rightarrow 1A_3A_2B_3A_1A_3, \\
A_1 &\rightarrow 0A_1A_3 \,|\, 1A_3A_2A_1A_3 \,|\, 1A_3, \\
A_2 &\rightarrow 0B_3A_1 \,|\, 1A_3A_2B_3A_1 \\
A_2 &\rightarrow 0A_1 \,|\, 1A_3A_2A_1 \,|\, 1 \\
A_3 &\rightarrow 0B_3 \,|\, 1A_3A_2B_3, \\
A_3 &\rightarrow 0 \,|\, 1A_3A_2\} \\
B_3 &\rightarrow A_1A_3A_2 \,|\, A_1A_3A_2B_3
\end{aligned}
$$

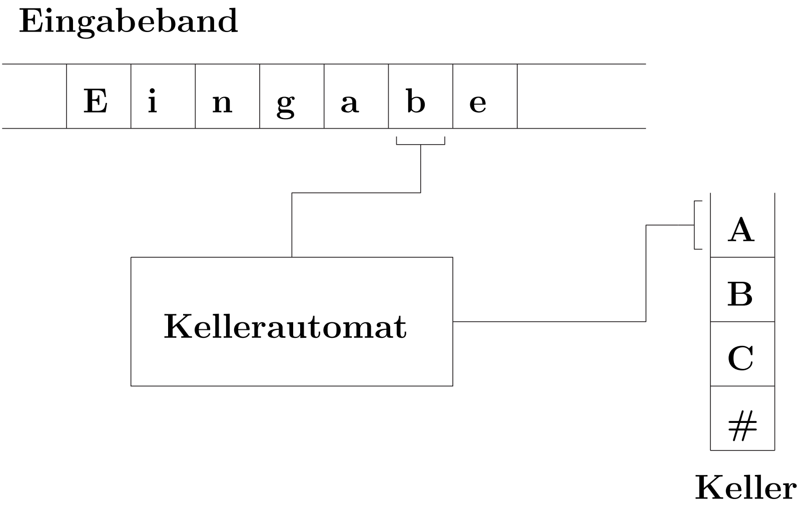
$$
\begin{aligned}
A_1 &\rightarrow 0B_3A_1A_3 \\
A_1 &\rightarrow 1A_3A_2B_3A_1A_3, \\
A_1 &\rightarrow 0A_1A_3 \,|\, 1A_3A_2A_1A_3 \,|\, 1A_3, \\
A_2 &\rightarrow 0B_3A_1 \,|\, 1A_3A_2B_3A_1 \\
A_2 &\rightarrow 0A_1 \,|\, 1A_3A_2A_1 \,|\, 1 \\
A_3 &\rightarrow 0B_3 \,|\, 1A_3A_2B_3, \\
A_3 &\rightarrow 0 \,|\, 1A_3A_2\} \\
B_3 &\rightarrow 1A_3A_3A_2 \,|\, 0B_3A_1A_3A_3A_2 \\
B_3 &\rightarrow 1A_3A_2A_1A_3A_3A_2 \,|\, 0A_1A_3A_3A_2 \\
B_3 &\rightarrow 1A_3A_2B_3A_1A_3A_3A_2 \,|\, 1A_3A_3A_2B_3 \\
B_3 &\rightarrow 0B_3A_1A_3A_3A_2B_3 \,|\, 1A_3A_2A_1A_3A_3A_2B_3 \\
B_3 &\rightarrow 0A_1A_3A_3A_2B_3 \\
B_3 &\rightarrow 1A_3A_2B_3A_1A_3A_3A_2B_3
\end{aligned}
$$

Kellerautomaten

Ein (nichtdeterministischer) **Kellerautomat** (NPDA bzw. PDA, Push-down Automaton) besteht aus $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$, wobei

- Q endliche Zustandsmenge
- Σ endliches Eingabealphabet
- Γ endliches STACK-Alphabet
- $q_0 \in Q$ Anfangszustand
- $Z_0 \in \Gamma$ Initialisierung des STACK
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$, d.h.
  - $\delta(q, a, Z) \subseteq \{(q, \gamma) : q \in Q, \gamma \in \Gamma^*\}$
  - $\delta(q, \varepsilon, Z) \subseteq \{(q, \gamma) : q \in Q, \gamma \in \Gamma^*\}$
- $F \subseteq Q$ Menge der akzeptierenden Endzustände, $F = \emptyset$ ist möglich.

Kellerautomaten - Visualisierung



Kellerautomaten - Arbeitsweise

Eine **Konfiguration eines PDA** ist ein Tripel (q, w, α) mit
- $q \in Q$,
- $w \in \Sigma^*$ der Teil der Eingabe, der noch nicht gelesen wurde,
- $\alpha \in \Gamma^*$ STACK-Inhalt.

Zu Konfiguration $(q, w_1 \dots w_k, Z_1 \dots Z_m)$ gibt es die **Nachfolgekonfigurationen**:

$$(q', w_2 \dots w_k, Z'_1 \dots Z'_r Z_2 \dots Z_m) \text{ für alle } (q', Z'_1 \dots Z'_r) \in \delta(q, w_1, Z_1)$$

und

$$(q', w_1 \dots w_k, Z'_1 \dots Z'_r Z_2 \dots Z_m) \text{ für alle } (q', Z'_1 \dots Z'_r) \in \delta(q, \varepsilon, Z_1).$$

Kellerautomaten - Arbeitsweise

Ein PDA **akzeptiert** ein $w \in \Sigma^*$ **durch leeren Stack**, wenn es eine zulässige Folge von Konfigurationen aus der Anfangskonfiguration (q_0, w, Z_0) in eine Konfiguration $(q, \varepsilon, \varepsilon), q \in Q$, gibt.

Ein PDA **akzeptiert** ein $w \in \Sigma^*$ **durch einen akzeptierenden Endzustand**, wenn es eine zulässige Folge von Konfigurationen aus der Anfangskonfiguration (q_0, w, Z_0) in eine Konfiguration (q, ε, γ) mit $q \in F$ und $\gamma \in \Gamma^*$ gibt.

Ein PDA ist **deterministisch** (DPDA), falls

$$|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \varepsilon, Z)| \leq 1$$

für alle $q \in Q, a \in \Sigma, Z \in \Gamma$.