Theoretische Grundlagen der Informatik

Vorlesung am 14. Dezember 2010

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Definition

Zu einem polynomialen Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ sei

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} := \inf \left\{ r \geq 1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt ein } N_0 > 0 \text{, so dass } \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) \leq r \\ \text{für alle } I \text{ mit } \mathrm{OPT}(I) \geq N_0 \end{array} \right\}$$

Approximierbarkeit von COLOR

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} := \inf \left\{ r \geq 1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt ein } N_0 > 0 \text{, so dass } \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) \leq r \\ \text{für alle } I \text{ mit } \mathrm{OPT}(I) \geq N_0 \end{array} \right\}$$

Problem COLOR (Optimalwertfassung)

Gegeben: Graph $G = (V, E)$

Frage: Wieviele Farben benötigt man um V zu färben, so dass je zwei adjazente Knoten verschiedene Farben besitzen?

Satz:
Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, dann existiert kein relativer Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ für COLOR mit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} < \frac{4}{3}$.

Approximierbarkeit von COLOR

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} := \inf \left\{ r \geq 1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt ein } N_0 > 0 \text{, so dass } \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) \leq r \\ \text{für alle } I \text{ mit } \mathrm{OPT}(I) \geq N_0 \end{array} \right\}$$

Satz:
Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, dann existiert kein relativer Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ für COLOR mit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} < \frac{4}{3}$.

Beweis:

- Angenommen es gibt einen relativen Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ für COLOR mit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} < \frac{4}{3}$.
- Wir benutzen $\mathcal{A}$ um 3COLOR zu lösen.
- Dies ist ein Widerspruch zu $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$

Approximierbarkeit von COLOR

Zu zwei Graphen

$$G_1 = (V_1, E_1) \text{ und } G_2 = (V_2, E_2)$$

sei

$$G := (V, E) := G_1[G_2]$$

definiert durch

$$V := V_1 \times V_2$$

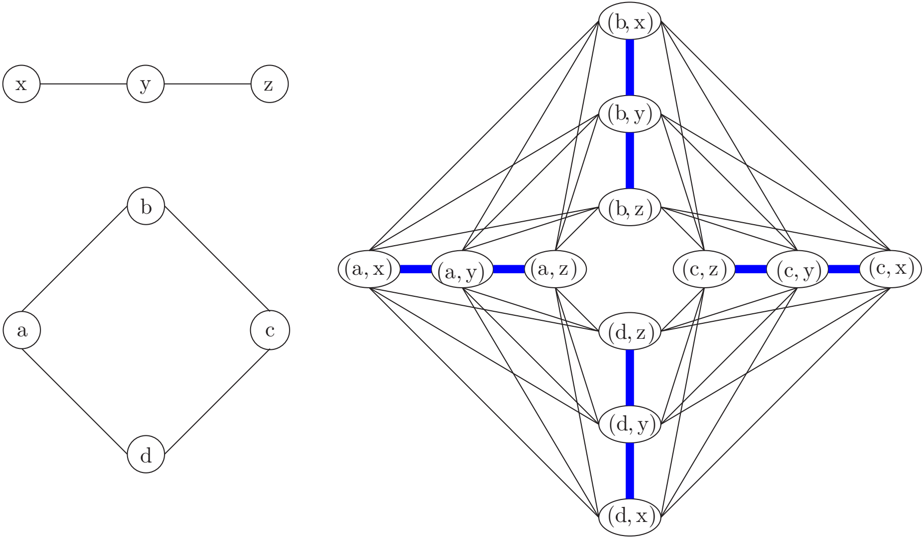
und

$$E := \left\{ \{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{entweder } \{u_1, v_1\} \in E_1 \text{, oder} \\ u_1 = v_1 \text{ und } \{u_2, v_2\} \in E_2 \end{array} \right\}$$

Anschaulich

- Jeder Knoten aus G_1 wird durch eine Kopie von G_2 ersetzt
- Jede Kante aus E_1 durch einen vollständig bipartiten Graphen zwischen den entsprechenden Kopien.

Approximierbarkeit von COLOR



Approximierbarkeit von COLOR

Karlsruher Institut für Technologie

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} := \inf \left\{ r \geq 1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt ein } N_0 > 0 \text{, so dass } \mathcal{R}_{\mathcal{A}}(I) \leq r \\ \text{für alle } I \text{ mit } \mathrm{OPT}(I) \geq N_0 \end{array} \right\}$$

- Angenommen es gibt einen relativen Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ für COLOR mit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}^{\infty} < \frac{4}{3}$.
- Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\mathcal{A}(G) < \frac{4}{3}\,\mathrm{OPT}(G)$ für alle Graphen G mit $\mathrm{OPT}(G) \geq N$.

Approximierbarkeit von COLOR

- Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\mathcal{A}(G) < \frac{4}{3}\,\mathrm{OPT}(G)$ für alle Graphen G mit $\mathrm{OPT}(G) \geq N$.
- Sei also $G = (V, E)$ ein beliebiges Beispiel für 3COLOR.
- Dann definiere $G^* := K_N[G]$, wobei K_N der vollständige Graph über N Knoten ist.
- Dann gilt: $\mathrm{OPT}(G^*) = N \cdot \mathrm{OPT}(G) \geq N$.

Fallunterscheidung:

- Falls G dreifärbbar ist, gilt:

$$\mathcal{A}(G^*) < \frac{4}{3}\,\mathrm{OPT}(G^*) = \frac{4}{3} \cdot N \cdot \mathrm{OPT}(G) \leq \frac{4}{3} \cdot N \cdot 3 = 4N.$$

- Andererseits, falls G nicht dreifärbbar ist, gilt

$$\mathcal{A}(G^*) \geq \mathrm{OPT}(G^*) = N \cdot \mathrm{OPT}(G) \geq 4N.$$

Fazit: G ist dreifärbbar genau dann, wenn $\mathcal{A}(G^*) < 4N$.

Approximierbarkeit von COLOR

- Die Größe von G^* ist polynomial in der Größe von G.
- Also kann G^* in polynomialer Zeit konstruiert werden.
- Damit ist die Anwendung von $\mathcal{A}$ auf G^* polynomial in der Größe von G.
- Also haben wir einen polynomialen Algorithmus zur Lösung von 3COLOR konstruiert.
- Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

Approximierbarkeit von TSP

TSP-Optimalwertproblem mit Dreiecksungleichung

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ vollständig und gewichtet mit Gewichtsfunktion $c\colon E \to \mathbb{Q}$.
Es gilt $c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$ für alle $u, v, w \in V$

Frage: Wie lange ist eine optimale Tour zu G bezüglich c?

Satz:
Für das TSP-Optimalwertproblem mit Dreiecksungleichung existiert ein Approximationsalgorithmus $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{R}_{\mathcal{A}} \leq 2$ für alle Instanzen I.

Approximierbarkeit von TSP

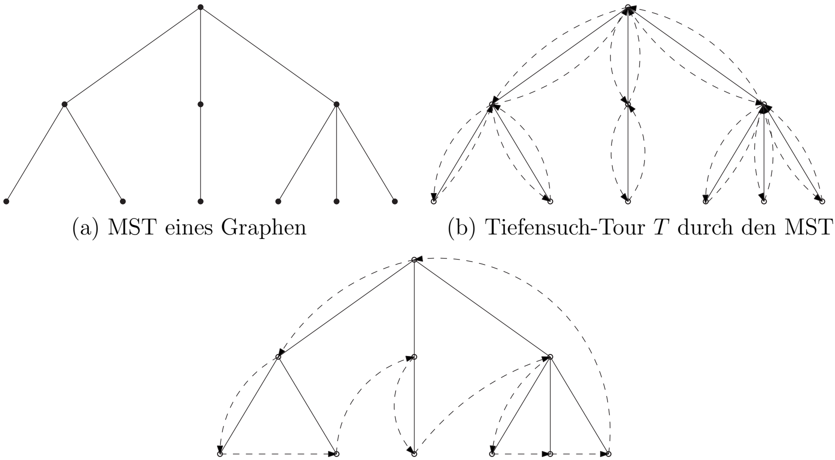
Beweis.

- Sei $(G = (V, E), c)$ eine Instanz des TSP-Optimalwertproblems mit Dreiecksungleichung.

Betrachte folgenden Algorithmus:

- Berechne einen MST (Minimum Spanning Tree) von G.
- Wähle einen beliebigen Knoten w als Wurzel.
- Durchlaufe den MST in einer Tiefensuche mit Startpunkt w
- **Ergebnis:** Tour T mit Start- und Endpunkt w, die jede Kante zweimal durchläuft.
- Konstruiere aus T eine Tour T', indem bereits besuchte Knoten übersprungen werden und die Tour beim nächsten unbesuchten Knoten fortgesetzt wird.

Approximierbarkeit von TSP



(a) MST eines Graphen (b) Tiefensuch-Tour T durch den MST

(c) TSP-Tour T' als abgekürzte Tiefensuch-Tour

Approximierbarkeit von TSP

- Bezeichne $c(G')$ die Summe der Kantengewichte in Subgraph G'

Es gilt

$$c(T') \leq c(T) = 2 \cdot c(MST) \; .$$

Eine TSP-Tour kann als ein aufspannender Baum plus eine zusätzliche Kante betrachtet werden. Also gilt

$$c(MST) \leq c(\mathrm{OPT}).$$

Insgesamt erhält man

$$c(T') \leq c(T) = 2 \cdot c(MST) \leq 2 \cdot c(\mathrm{OPT}),$$

also

$$\mathcal{R}_{\mathcal{A}} = \frac{c(T')}{c(\mathrm{OPT})} \leq 2 \; .$$