

Theoretische Grundlagen der Informatik

Andrea Schumm | 21.10.2010

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



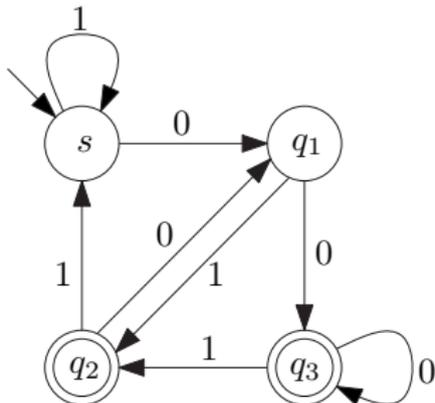
Abgabe der Übungsblätter (Nachtrag):

- Zweierabgaben sind erlaubt, aber nur, wenn beide für das gleiche Tutorium eingeteilt sind
- Kopf des Blattes:
 - Name(n)
 - Vorname(n)
 - Matrikelnummer(n)
 - Tutoriumsnummer
 - Name des Tutors
- Keine losen Blätter, bitte zusammenheften
- Übungsblätter müssen handschriftlich sein, also nicht gedruckt oder kopiert

Wiederholung: Endliche Automaten

Ein (deterministischer) endlicher Automat DEA $(Q, \Sigma, \delta, s, F)$ besteht aus:

- Q , einer endlichen Menge von *Zuständen*
- Σ , einer endlichen Menge von *Eingabesymbolen*
- $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$, einer *Übergangsfunktion*
- $s \in Q$, einem *Startzustand*;
- $F \subseteq Q$, einer Menge von *Endzuständen*.



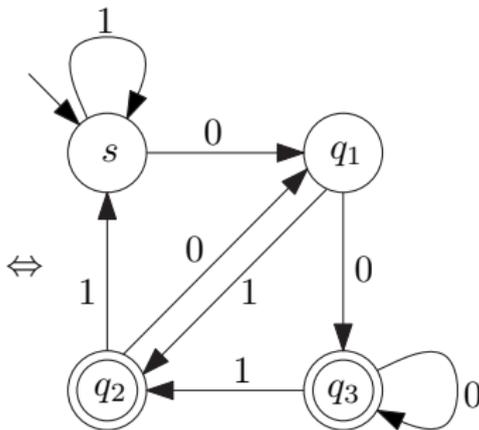
Wiederholung: Reguläre Sprachen

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *regulär*, wenn für sie einer der folgenden Punkte gilt:

- Verankerung:
 - $L = \{a\}$ mit $a \in \Sigma$ oder
 - $L = \emptyset$
- Induktion: Seien L_1, L_2 reguläre Sprachen
 - $L = L_1 \cdot L_2$ oder
 - $L = L_1 \cup L_2$ oder
 - $L = L_1^*$

- Beispiel: Sprache aller Wörter über $\{0, 1\}$, deren vorletztes Zeichen eine 0 ist:

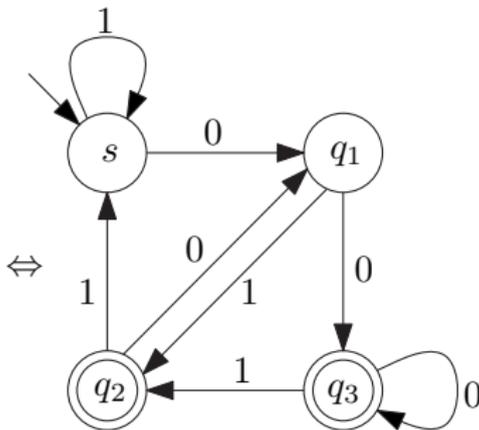
$$L := (0 \cup 1)^* 0 (0 \cup 1)$$



- Gibt es zu jeder regulären Sprache einen endlichen Automaten, der diese erkennt?
- Falls ja: Wie kann man diesen konstruieren?
- Welche Sprachen werden durch endliche Automaten erkannt?

- Beispiel: Sprache aller Wörter über $\{0, 1\}$, deren vorletztes Zeichen eine 0 ist:

$$L := (0 \cup 1)^* 0 (0 \cup 1)$$

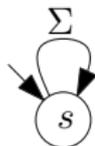


- Gibt es zu jeder regulären Sprache einen endlichen Automaten, der diese erkennt? \Rightarrow **heute**
- Falls ja: Wie kann man diesen konstruieren? \Rightarrow **heute**
- Welche Sprachen werden durch endliche Automaten erkannt?

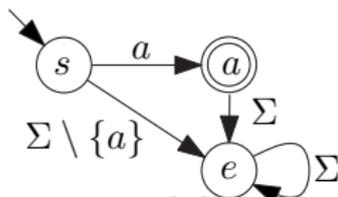
Satz:

Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

- $L := L(\alpha)$ reguläre Sprache über Σ , die durch α beschreibbar ist
- Induktion über $n = \text{Anzahl der } \cup, \cdot \text{ und } * \text{-Zeichen in } \alpha$
- **Induktionsanfang** $n = 0$:



$L = \emptyset$



$L = \{a\}$

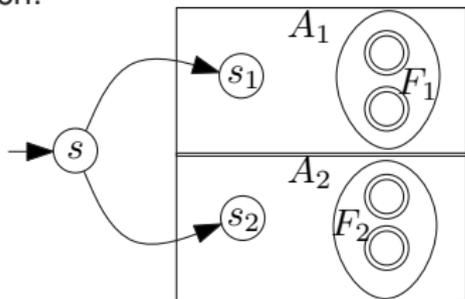
- **Induktionsannahme:** Für alle L , die durch reguläre Ausdrücke mit weniger als n Operationen beschreibbar sind, existiert akzeptierender DEA

Satz:

Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

■ Induktionsschluss:

- $n > 0 \Rightarrow L = L_1 \cup L_2$ oder $L = L_1 \cdot L_2$ oder $L = L_1^*$
- Fall 1: $L = L_1 \cup L_2$
- Sei A_1 DEA, der L_1 akzeptiert und A_2 DEA, der L_2 akzeptiert
- Idee: „Baue“ aus A_1 und A_2 Automaten, der L akzeptiert
- 1. Versuch:



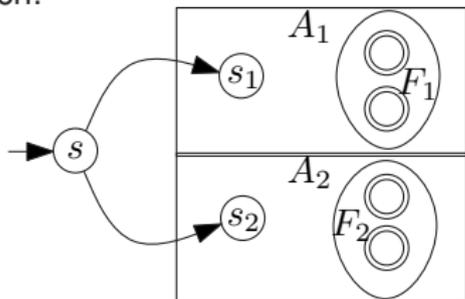
- Brauche Übergang ohne Lesen eines Zeichens mit Wahlmöglichkeit
- DEA's erlauben das nicht
- Rest des Beweises: später!

Satz:

Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

■ Induktionsschluss:

- $n > 0 \Rightarrow L = L_1 \cup L_2$ oder $L = L_1 \cdot L_2$ oder $L = L_1^*$
- Fall 1: $L = L_1 \cup L_2$
- Sei A_1 DEA, der L_1 akzeptiert und A_2 DEA, der L_2 akzeptiert
- Idee: „Baue“ aus A_1 und A_2 Automaten, der L akzeptiert
- 1. Versuch:

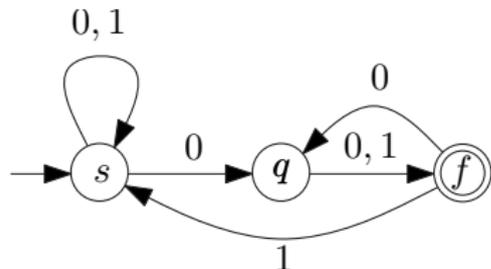


- Brauche Übergang ohne Lesen eines Zeichens mit Wahlmöglichkeit
- DEA's erlauben das nicht
- Rest des Beweises: später!

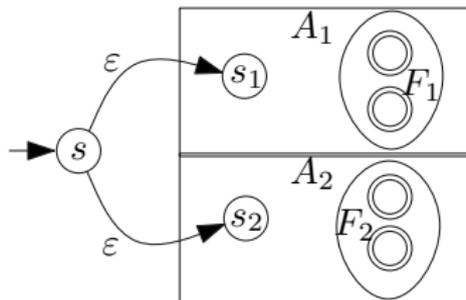
- Ein **nichtdeterministischer endlicher Automat** (NEA) besteht aus:
 - Q , einer endlichen Zustandsmenge;
 - Σ , einem endlichen Alphabet;
 - δ , einer Übergangsfunktion $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$
 - s , einem Startzustand;
 - F , einer Menge von Endzuständen;
- Interpretation von δ :
 - Bei Abarbeitung eines Symbols kann der Automat sich –nichtdeterministisch– aussuchen, in welchen Zustand einer Teilmenge aus Q er übergeht
 - Auch möglich: Springe spontan ohne Lesen eines Zeichens aus Σ in neuen Zustand (ε -Übergang)
- Ein nichtdeterministischer endlicher Automat **akzeptiert** ein Wort $w \in \Sigma^*$, wenn es eine Folge von Übergängen gibt, so dass er bei Eingabe von w in einen Endzustand gelangt, d.h. bei Eingabe von w ein Endzustand *erreichbar* ist.

Beispiele für NEA's

Beispiel 1:

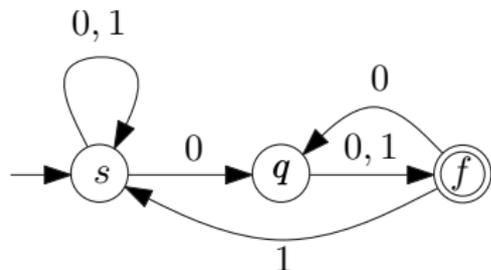


Beispiel 2:



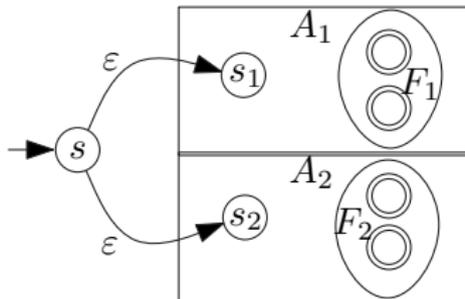
Beispiele für NEA's

Beispiel 1:



- $\delta(s, 0) = \{s, q\}$
- $w = 10$ wird nicht akzeptiert
- $w = 01$ wird akzeptiert
- Sprache aller Wörter über $\{0, 1\}$, deren vorletztes Zeichen 0 ist

Beispiel 2:



Definition:

Für einen Zustand $q \in Q$ ist der ε -Abschluss $E(q)$ wie folgt definiert:

$$E(q) := \{p \in Q \mid p \text{ ist von } q \text{ durch } \varepsilon\text{-Übergänge erreichbar}\}$$

Beachte, dass gilt:

- $E(q) \subseteq Q$, $E(q) \in 2^Q$
- $q \in E(q)$

$E(q_1)$

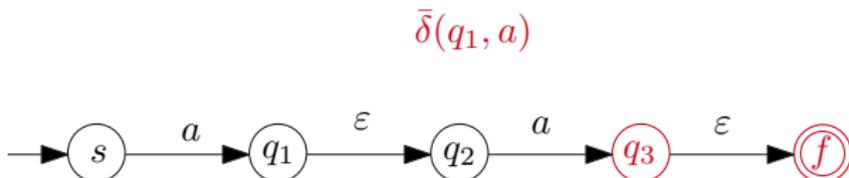


Erweiterung von δ

Idee: Berücksichtige ε -Übergänge bei der Übergangsfunktion

- Beim Lesen eines einzelnen Zeichens

$$\bar{\delta}: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$$
$$\bar{\delta}(q, a) = \begin{cases} E(q) & \text{falls } a = \varepsilon \\ \bigcup_{p \in E(q)} \left(\bigcup_{r \in \delta(p, a)} E(r) \right) & \text{für } a \in \Sigma \end{cases}$$



Erweiterung von δ

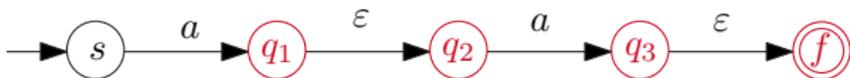
Idee: Berücksichtige ε -Übergänge bei der Übergangsfunktion

- Erweiterung auf Mengen von Zuständen :

$$\bar{\delta}: 2^Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$$

$$\bar{\delta}(P, a) = \begin{cases} \bigcup_{p \in P} E(p) & \text{falls } a = \varepsilon \\ \bigcup_{p \in P} \bar{\delta}(p, a) & \text{für } a \in \Sigma \end{cases}$$

$$\bar{\delta}(\{s, q_1\}, a)$$



Erweiterung von δ

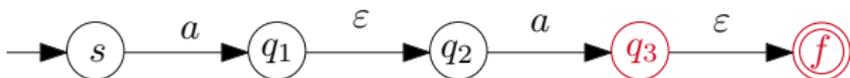
Idee: Berücksichtige ε -Übergänge bei der Übergangsfunktion

- Induktive Erweiterung auf Wörter:

$$\bar{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$$

$$\bar{\delta}(q, w) = \begin{cases} E(q) & \text{falls } w = \varepsilon \\ \bar{\delta}(q, w) & \text{falls } w = a \in \Sigma \\ \bigcup_{p \in \bar{\delta}(q, v)} \bar{\delta}(p, a) & \text{falls } w = va, a \in \Sigma, |v| > 0 \end{cases}$$

$$\bar{\delta}(s, w = aa)$$



- Es gilt: $w \in L(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \bar{\delta}(s, w) \cap F \neq \emptyset$!

Erweiterung von δ

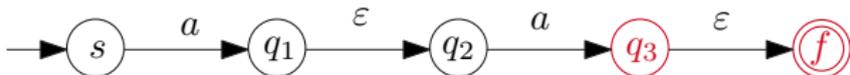
Idee: Berücksichtige ε -Übergänge bei der Übergangsfunktion

- Analog für Mengen von Zuständen:

$$\bar{\delta}: 2^Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$$

$$\bar{\delta}(P, w) = \bigcup_{p \in P} \bar{\delta}(p, w)$$

$$\bar{\delta}(\{s, q_1\}, w = aa)$$



Definition:

Zwei endliche Automaten, die dieselbe Sprache akzeptieren, heißen *äquivalent*.

Satz:

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten gibt es einen äquivalenten deterministischen endlichen Automaten.

Satz:

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten gibt es einen äquivalenten deterministischen endlichen Automaten.

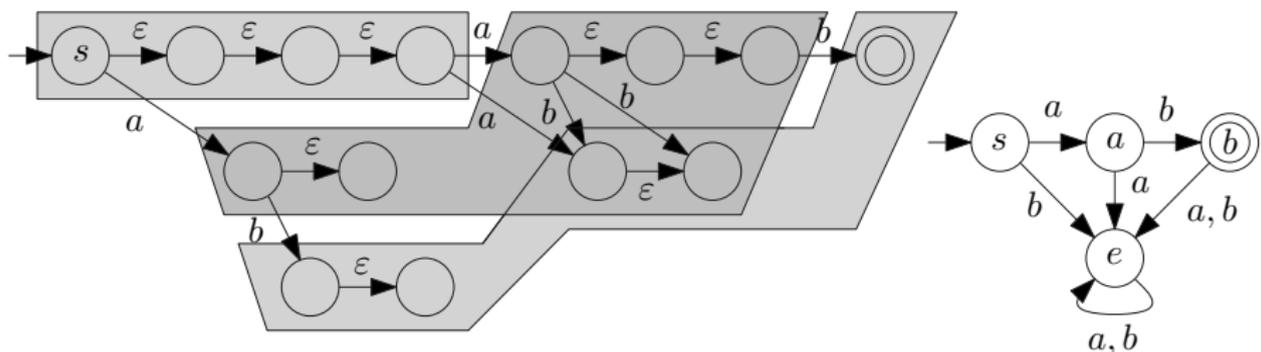
Beweisidee:

- Sei \mathcal{A} NEA
- Falls \mathcal{A} w akzeptiert, so gibt es eine Abarbeitung, die in einem Endzustand endet
- Falls ein Zustand q bei der Eingabe von w erreichbar ist, so sind das auch alle Zustände in $E(q)$
- „Simuliere“ \mathcal{A} durch einen DEA
- Zustände des DEA sind Mengen von Zuständen von \mathcal{A}
- Endzustände des DEA sind alle Mengen, die Endzustände von \mathcal{A} enthalten

Satz:

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten gibt es einen äquivalenten deterministischen endlichen Automaten.

Beispiel: Mögliche Abarbeitungen von $w = ab$ in einem NEA mit $ab \in L$, $a \notin L$ und äquivalenter DEA



Satz:

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten gibt es einen äquivalenten deterministischen endlichen Automaten.

Potenzmengenkonstruktion: Gegeben sei ein NEA $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$.
 Wir konstruieren daraus einen DEA $\tilde{\mathcal{A}} := (\tilde{Q}, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{s}, \tilde{F})$:

- $\tilde{Q} = 2^Q$, d.h. die Zustände des DEA sind Mengen von Zuständen des NEA.
- $\tilde{\delta}: \tilde{Q} \times \Sigma \rightarrow \tilde{Q}$ mit $\tilde{\delta}(\tilde{q}, a) = \bar{\delta}(\tilde{q}, a)$ für $a \in \Sigma$. Es ist also $\tilde{q} \subseteq Q$ und jeder Zustand wird mit seinem ε -Abschluss im NEA identifiziert.
- $\tilde{s} := E(s)$
- $\tilde{F} := \{\tilde{q} \in \tilde{Q} \mid \tilde{q} \cap F \neq \emptyset\}$

Satz:

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten gibt es einen äquivalenten deterministischen endlichen Automaten.

- Zeige per Induktion über $n = |w|$, dass für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\tilde{\delta}(\tilde{s}, w) = \bar{\delta}(s, w)$$

- Dann gilt:

$$\begin{aligned} w \in L(\tilde{\mathcal{A}}) &\Leftrightarrow \tilde{\delta}(\tilde{s}, w) \in \tilde{F} \Leftrightarrow \tilde{\delta}(\tilde{s}, w) \cap F \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \bar{\delta}(s, w) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

- **Induktionsanfang** $n = 0$, d.h. $w = \varepsilon$:

$$\tilde{\delta}(\tilde{s}, \varepsilon) = \bar{\delta}(E(s), \varepsilon) = \cup_{p \in E(s)} E(p) = E(s) = \bar{\delta}(s, \varepsilon)$$

Satz:

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten gibt es einen äquivalenten deterministischen endlichen Automaten.

- **Induktionsannahme:** Für alle Wörter w' mit $|w'| \leq n$ gilt:

$$\tilde{\delta}(\tilde{s}, w') = \bar{\delta}(s, w')$$

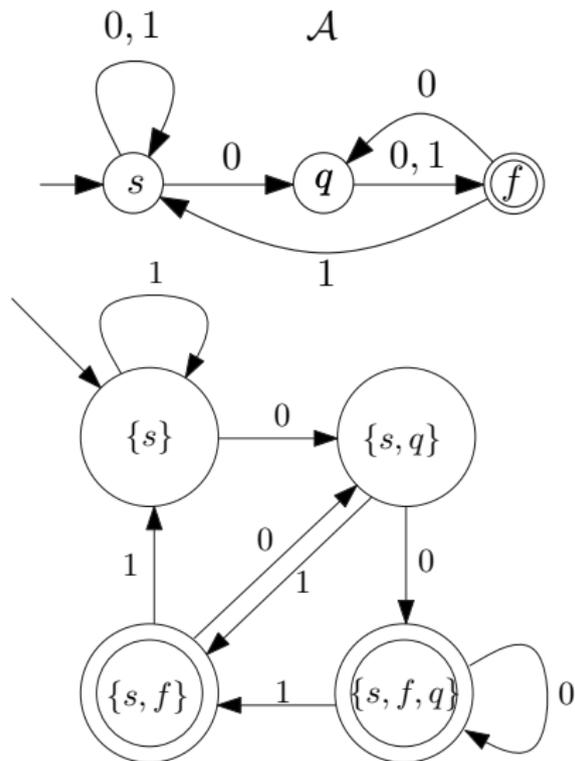
- **Induktionsschluss** $|w| = n + 1$:

Sei $w = w'a$ mit $|w'| = n$ und $a \in \Sigma$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}(\tilde{s}, w) &= \tilde{\delta}(\tilde{\delta}(\tilde{s}, w'), a) \\ &\stackrel{\text{(IV)}}{=} \tilde{\delta}(\bar{\delta}(s, w'), a) \\ &\stackrel{\text{Def } \tilde{\delta}}{=} \bar{\delta}(\bar{\delta}(s, w'), a) = \bigcup_{p \in \bar{\delta}(s, w')} \bar{\delta}(p, a) = \bar{\delta}(s, w) \end{aligned}$$

Beispiel Potenzmengenkonstruktion:

- $L = (0 \cup 1)^* 0(0 \cup 1)$
- NEA \mathcal{A} akzeptiert L
- Konstruiere DEA für L :
 - $\tilde{s} = E(s) = \{s\}$
 - $\tilde{\delta}(\{s\}, 0) = \{s, q\}$
 - $\tilde{\delta}(\{s\}, 1) = \{s\}$
 - $\tilde{\delta}(\{s, q\}, 0) = \{s, q, f\}$
 - $\tilde{\delta}(\{s, q\}, 1) = \{s, f\}$
 - $\tilde{\delta}(\{s, q, f\}, 0) = \{s, q, f\}$
 - $\tilde{\delta}(\{s, q, f\}, 1) = \{s, f\}$
 - $\tilde{\delta}(\{s, f\}, 0) = \{s, q\}$
 - $\tilde{\delta}(\{s, f\}, 1) = \{s\}$
 - Alle anderen Zustände können gestrichen werden



Satz:

Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

Beweis (Fortsetzung):

■ Erinnerung:

- $L := L(\alpha)$ reguläre Sprache über Σ , die durch α beschreibbar ist
- Beweis per Induktion über $n = \text{Anzahl der } \cup, \cdot \text{ und } * \text{-Zeichen in } \alpha$
- Induktionsanfang bereits gezeigt
- noch zu zeigen: Induktionsschritt für reguläre Sprachen $L = L_1 \cup L_2$,
 $L = L_1 \cdot L_2$ und $L = L_1^*$

- Seien L_1 und L_2 reguläre Sprachen, die von $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$ und $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ erkannt werden
- Baue aus \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 NEA's, die $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cdot L_2$ und L_1^* erkennen
- Aus diesen können äquivalente DEA's konstruiert werden

Satz:

Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

Beweis (Fortsetzung):

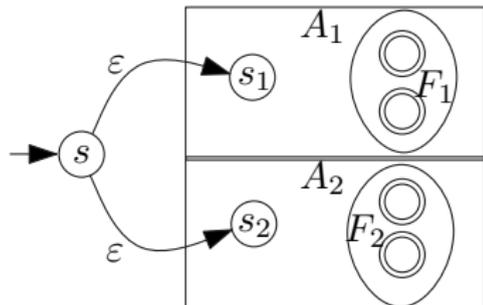
- Fall 1: $L = L_1 \cup L_2$
- NEA $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, der $L_1 \cup L_2$ erkennt:

- $Q := Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\}$ ($s \notin Q_i$)

- $F = F_1 \cup F_2$

- δ :

$$\delta(q, a) := \begin{cases} \{\delta_i(q, a)\} & , q \in Q_i, a \in \Sigma \\ \emptyset & , q \in Q \setminus \{s\}, a = \varepsilon \\ \{s_1, s_2\} & , q = s, a = \varepsilon \\ \emptyset & , q = s, a \neq \varepsilon \end{cases}$$



Satz:

Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

Beweis (Fortsetzung):

- Fall 2: $L = L_1 \cdot L_2$
- NEA $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, der $L_1 \cdot L_2$ erkennt:

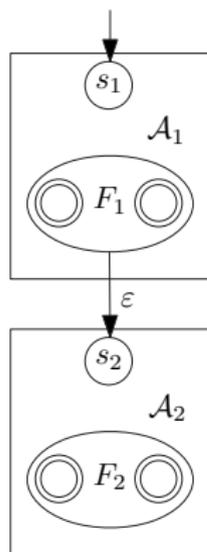
- $Q := Q_1 \cup Q_2, s := s_1, F := F_2$

- $s := s_1$

- $F := F_2$

- δ :

$$\delta(q, a) := \begin{cases} \{\delta_i(q, a)\} & , q \in Q_i, a \in \Sigma \\ \emptyset & , q \in Q \setminus F_1, a = \varepsilon \\ \{s_2\} & , q \in F_1, a = \varepsilon \end{cases}$$



Satz:

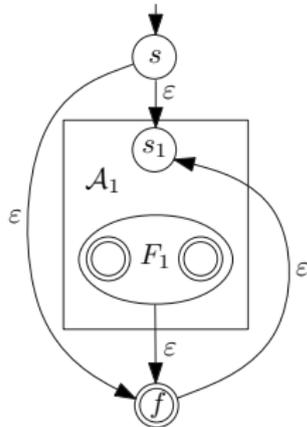
Jede reguläre Sprache wird von einem (deterministischen) endlichen Automaten (DEA) akzeptiert.

Beweis (Fortsetzung):

- Fall 3: $L = L_1^*$
- NEA $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, der L_1^* erkennt:

- $Q := Q_1 \cup \{s, f\}$
- s : neu
- $F := \{f\}$ neuer Zustand
- δ :

$$\delta(q, a) := \begin{cases} \{\delta_1(q, a)\} & , q \in Q_1, a \in \Sigma \\ \emptyset & , q \in Q_1 \setminus F_1, a = \varepsilon \\ \{f\} & , q \in F_1 \cup \{s\}, a = \varepsilon \\ \emptyset & , q \in \{s, f\}, a \neq \varepsilon \\ \{s_1\} & , q \in \{s, f\}, a = \varepsilon \end{cases}$$



- Es wurde gezeigt: Zu jeder regulären Sprache gibt es einen endlichen Automaten, der diese erkennt
- Dazu eingeführt: Konzept des nichtdeterministischen endlichen Automaten (NEA)
- Äquivalenz von NEA's und DEA's gezeigt
- Beweis dazu liefert Konstruktionsvorschrift, um NEA's in DEA's umzuwandeln (Potenzmengenkonstruktion)
- Nächste Vorlesung:
 - Mehr zu endlichen Automaten
 - Beweis, dass jede Sprache, die von einem endlichen Automaten erkannt wird, regulär ist