Theoretische Grundlagen der Informatik

Vorlesung am 09.11.2010

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Die Church'sche These

Church'sche These
Die Menge der (Turing-)berechenbaren Funktionen ist genau die Menge der im intuitiven Sinne überhaupt berechenbaren Funktionen.

Die Church'sche These

Church'sche These
Die Menge der (Turing-)berechenbaren Funktionen ist genau die Menge der im intuitiven Sinne überhaupt berechenbaren Funktionen.

Interpretation

- Turing-Maschinen sind formale Modelle für Algorithmen.
- Kein Berechnungsverfahren kann algorithmisch genannt werden, wenn es nicht von einer Turing-Maschine ausführbar ist.

Bemerkung

- Die Church'sche These ist nur eine These, kann also nicht bewiesen werden.
- Sie ist aber in der Informatik allgemein akzeptiert.

Die Church'sche These

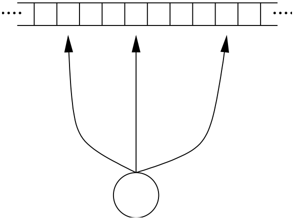
Church'sche These
Die Menge der (Turing-)berechenbaren Funktionen ist genau die Menge der im intuitiven Sinne überhaupt berechenbaren Funktionen.

Begründung

- Es existieren keine Beispiele von Funktionen, die als intuitiv berechenbar angesehen werden, aber nicht Turing-berechenbar sind.
- Alle Versuche, realistische Modelle aufzustellen, die mächtiger sind als Turing-Maschinen, schlugen fehl.
- Eine Reihe von völlig andersartigen Ansätzen, den Begriff der Berechenbarkeit formal zu fassen, wie zum Beispiel die Registermaschine, haben sich als äquivalent erwiesen.

Erweiterungen der Turing-Maschine

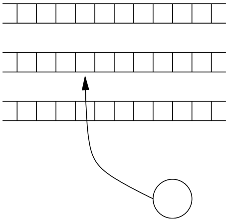
Mehrere Lese-/Schreibköpfe



- Mehrere Lese-/Schreibköpfe $(n \in \mathbb{N})$ greifen auf das eine Eingabeband zu und werden von der endlichen Kontrolle gesteuert.
- Die Übergangsfunktion ist dann vom Typ $\delta\colon Q \times \Gamma^n \to Q \times \Gamma^n \times \{L, N, R\}^n$
- Die Zustände $q \in Q$ kann man als n–Tupel auffassen.
- Es nötig eine Prioritätenregel für die einzelnen Köpfe anzugeben, falls mehrere auf einem Feld des Eingabebandes stehen.

Erweiterungen der Turing-Maschine

Mehrere Bänder



- Ein Lese-/Schreibkopf kann auf mehrere Eingabebänder ($n \in \mathbb{N}$) zugreifen.
- Die Übergangsfunktion ist dann vom Typ

$$\delta\colon Q \times \Gamma \times \{1, \ldots, n\} \to Q \times \Gamma \times \{L, N, R\} \times \{1, \ldots, n\}.$$

Erweiterungen der Turing-Maschine

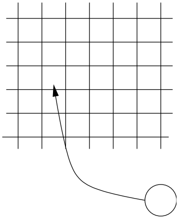
Mehrere Lese-/Schreibköpfe für mehrere Bänder

- Wir haben jetzt m Bänder und n Lese-/Schreibköpfe.
- Die Übergangsfunktion ist dann vom Typ

$$\delta\colon Q \times \Gamma^n \times \{1, \ldots, m\}^n \to Q \times \Gamma^n \times \{L, N, R\}^n \times \{1, \ldots, m\}^n.$$

Erweiterungen der Turing-Maschine

Mehrdimensionale Bänder



- Das Eingabeband ist nun mehrdimensional, es hat zum Beispiel die Dimension zwei.
- Wir sprechen dann von einem Arbeitsfeld.
- Dabei ist

$$\delta \colon Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L(eft), U(p), R(ight), D(own), N(othing)\}$$

Erweiterungen der Turing-Maschine

Karlsruher Institut für Technologie

Bemerkungen

- Fragestellungen der Art:
  - Wann stoppt eine Mehrkopf-Maschine?
  - Welcher Kopf ‚gewinnt', wenn mehrere Köpfe (verschiedene) Symbole an dieselbe Stelle schreiben wollen?

  müssen bei solchen Modifikationen noch geklärt werden.
- Es hat sich allerdings gezeigt, dass keine dieser Erweiterunge nmehr leistet, als eine normale Turing-Maschine.
- **Alle angegebenen Modifikationen können durch eine normale 1–Band Turing-Maschine simuliert werden.**

Kapitel

- **Die universelle Turing-Maschine**
- **Unentscheidbare Probleme**

Die universelle Turing-Maschine

Ziel

- Bisher: Nur Turing-Maschinen die eine bestimmte Aufgabe erfüllen
- Jetzt: Konstruktion einer Turing-Maschine, die als Eingabe
  - ein Programm und
  - eine spezielle Eingabe

  erhält.
- Die Aufgabe besteht darin, das gegebene Programm auf der gegebenen speziellen Eingabe auszuführen.

Die universelle Turing-Maschine

Wir betrachten dazu eine normierte Turing-Maschine, d.h.

- $Q := \{q_1, \ldots, q_n\}$
- $\Sigma := \{a_1, \ldots, a_k\}$
- $\Gamma := \{a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_l\}$
- $s := q_1$
- $F := \{q_2\}$

- Dies bedeutet keine Einschränkung in der Mächtigkeit der Turing-Maschinen:
- Jede beliebige Turing-Maschine kann durch eine derart normiert Turing-Maschine der obigen Form simuliert werden.
- Jede normierte Turing-Maschine $\mathcal{M}$ lässt sich eindeutig als Wort aus $(0 \cup 1)^*$ kodieren.

Die Gödelnummer

Sei $\mathcal{M} := (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ eine Turing-Maschine.

Die Gödelnummer von $\mathcal{M}$, bezeichnet als $\langle \mathcal{M} \rangle$, ist definiert durch folgende Kodierungsvorschrift:

- Kodiere

  $$\delta(q_i, a_j) = (q_r, a_s, d_t) \text{ durch } 0^i\,1\,0^j\,1\,0^r\,1\,0^s\,1\,0^t,$$

  wobei $d_t \in \{d_1, d_2, d_3\}$ und

  - d_1 für L,
  - d_2 für R und
  - d_3 für N steht.

- Die Turing-Maschine wird dann kodiert durch:

  $$111\text{code}_1 11\text{code}_2 11 \ldots 11\text{code}_z 111,$$

  wobei code_i für $i = 1, \ldots, z$ alle Funktionswerte von δ in beliebiger Reihenfolge beschreibt.

Die Gödelnummer - Bemerkungen

- Die eigentlichen Werte der Turing-Maschine werden also (unär) durch Nullen beschrieben und die Einsen dienen als Begrenzung der Eingabewerte.
- Jede Turing-Maschine kann also durch ein Wort aus $(0 \cup 1)^*$ kodiert werden.
- Umgekehrt beschreibt jedes Wort aus $(0 \cup 1)^*$ (höchstens) eine Turing-Maschine.
- Wir vereinbaren, dass ein Wort, das keine Turing-Maschine in diesem Sinne beschreibt, (zum Beispiel ε, 0, 000) eine Turing-Maschine kodiert, die $\emptyset$ akzeptiert.
- Eine *universelle Turing-Maschine* erhält als Eingabe ein Paar $(\langle \mathcal{M} \rangle, w)$, wobei $w \in \{0, 1\}^*$ ist, und sie simuliert $\mathcal{M}$ auf w.

Die Gödelnummer - Beispiel

Sei $\mathcal{M} = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \sqcup, \{0, 1, \sqcup\}, \delta, q_1, \{q_2\})$, mit

$$\begin{aligned} \delta(q_1, 1) &= (q_3, 0, R) \\ \delta(q_3, 0) &= (q_1, 1, R) \\ \delta(q_3, 1) &= (q_2, 0, R) \\ \delta(q_3, \sqcup) &= (q_3, 1, L) \end{aligned}$$

$\mathcal{M}$ zusammen mit der Eingabe 1011 ist dann:

1110100100010100110001010100100110001001001010011000100010001001011110 11

Definition

Zu $w \in \{0, 1\}^*$ sei T_w

- die Turing-Maschine mit der Gödelnummer (GN) w, bzw
- die Turing-Maschine, die $\emptyset$ akzeptiert.

Es sei $L(T_w)$ ist die Sprache, die von T_w akzeptiert wird.

Die Diagonalsprache

Wir konstruieren die sogenannte **Diagonalsprache** L_d , wie folgt:

- Betrachte die Wörter aus $\{0, 1\}^*$ in *kanonischer* Reihenfolge, d.h. w_i steht vor w_j $(i < j)$, falls
  - $|w_i| < |w_j|$, oder
  - $|w_i| = |w_j|$ und w_i lexikographisch vor w_j steht.
- $\mathcal{M}_j$ sei die TM, die durch die Gödelnummer w_j kodiert ist.
- Wir konstruieren eine unendliche Tabelle,
  - an deren Position (i, j) für $1 \leq i, j < \infty$ eine Null oder eine Eins steht, und
  - welche beinhaltet, ob w_i in $L(\mathcal{M}_j)$ ist.
- Damit gilt für die Einträge

$$(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{M}_j \ w_i \text{ akzeptiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Diagonalsprache

- Damit gilt für die Einträge

$$(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{M}_j \ w_i \text{ akzeptiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Definiere dazu

$$L_d := \{ w_i \mid \mathcal{M}_i \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht} \} .$$

- L_d enthält also alle w_i, für die auf der Diagonalen an der Stelle (i, i) eine Null steht.
- Dies führt später zu einem Diagonalbeweis (Cantor).

Die Diagonalsprache - Veranschaulichung

$w \in \{0,1\}^*$	Gödelnummer							
		w_i	w_j	w_k				
$\vdots$	$\vdots$							
w_i	1	**0**	1	0	1	0	0	$w_i \in L_d$
w_j	0	0	**1**	0	0	1	1	$w_j \notin L_d$
w_k	1	0	0	**1**	1	0	1	$w_k \notin L_d$
$\vdots$	$\vdots$							

Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache

Satz (Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache):
Die Sprache L_d ist nicht entscheidbar.

Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache

Satz (Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache):
Die Sprache L_d ist nicht entscheidbar.

Beweis:

Falls L_d entscheidbar ist, gibt es eine Turing-Maschine $\mathcal{M}_i$, die

- (1) stets hält
- (2) genau die $w \in L_d$ akzeptiert.

Wende nun $\mathcal{M}_i$ auf w_i an:

- Falls $w_i \in L_d$, dann wird w_i, wegen (2) von $\mathcal{M}_i$ akzeptiert.
- Falls $w_i \notin L_d$, dann akzeptiert $\mathcal{M}_i$ das Wort w_i wegen (2) nicht.

Beides ist ein Widerspruch zur Definition von L_d.

Korollar

Korollar
Die Sprache $L_d^c := \{0,1\}^* \setminus L_d$ ist nicht entscheidbar.

Korollar

Korollar
Die Sprache $L_d^c := \{0,1\}^* \backslash L_d$ ist nicht entscheidbar.

Beweis:

- Falls L_d^c entscheidbar ist, gibt es eine Turing-Maschine, die L_d^c entscheidet.
- Diese kann aber leicht zu einer Turing-Maschine modifiziert werden, die L_d entscheidet.
- Dies ist ein Widerspruch zur Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache.

Korollar

Korollar
Die Sprache $L_d^c := \{0,1\}^* \backslash L_d$ ist nicht entscheidbar.

Beweis:

- Falls L_d^c entscheidbar ist, gibt es eine Turing-Maschine, die L_d^c entscheidet.
- Diese kann aber leicht zu einer Turing-Maschine modifiziert werden, die L_d entscheidet.
- Dies ist ein Widerspruch zur Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache.

Interpretation:

- Das Problem, ob eine Turing-Maschine auf einer Eingabe w stoppt, ist nicht entscheidbar.

Das Halteproblem

Das **Halteproblem** definiert folgende Sprache

$$\mathcal{H} := \{ wv \mid T_w \text{ hält auf der Eingabe } v \} .$$

Satz (Unentscheidbarkeit des Halteproblems):
$\mathcal{H}$ ist nicht entscheidbar.

Das Halteproblem

Satz (Unentscheidbarkeit des Halteproblems):
$\mathcal{H} = \{wv \mid T_w \text{ hält auf der Eingabe } v\}$ ist nicht entscheidbar.

Beweis:

- Angenommen es existiert eine stets haltende Turing-Maschine, die $\mathcal{H}$ entscheidet.
- Wir konstruieren daraus eine stets haltende Turing-Maschine, die L_d^c entscheidet, mit Widerspruch zum letzten Korollar.

Sei w eine Eingabe, für die wir entscheiden wollen, ob $w \in L_d^c$.
Wir können wie folgt vorgehen:

- Berechne das i, so dass $w = w_i$ ist.
- Betrachte die durch w_i kodierte Turing-Maschine $\mathcal{M}_i$.
- Wende die Turing-Maschine für $\mathcal{H}$ auf $\langle \mathcal{M}_i \rangle \cdot w_i$ an.

Das Halteproblem

Satz (Unentscheidbarkeit des Halteproblems):
$\mathcal{H} = \{wv \mid T_w$ hält auf der Eingabe $v\}$ ist nicht entscheidbar.

Sei w eine Eingabe, für die wir entscheiden wollen, ob $w \in L_d^c$.
Wir können wie folgt vorgehen:

- Berechne das i, so dass $w = w_i$ ist.
- Betrachte die durch w_i kodierte Turing-Maschine $\mathcal{M}_i$.
- Wende die Turing-Maschine für $\mathcal{H}$ auf $\langle \mathcal{M}_i \rangle \cdot w_i$ an.

Wir machen folgende Fallunterscheidung:

- Falls $\langle \mathcal{M}_i \rangle \cdot w_i$ nicht akzeptiert wird, dann hält $\mathcal{M}_i$ nicht auf w_i.
- Nach Definition von $\mathcal{H}$ ist also $w_i \in L_d$ und damit $w_i \notin L_d^c$.
- Falls $\langle \mathcal{M}_i \rangle \cdot w_i$ akzeptiert wird, dann hält $\mathcal{M}_i$ auf w_i.
- Dann können wir auf der universellen Turing-Maschine die Berechnung von $\mathcal{M}_i$ auf w_i simulieren.

Die Universelle Sprache

Die **universelle Sprache** L_u über $\{0,1\}$ ist definiert durch

$$L_u := \{wv \mid v \in L(T_w)\}.$$

L_u ist also die Menge aller Wörter wv für die T_w bei der Eingabe v hält und v akzeptiert.

Satz (Unentscheidbarkeit der Universellen Sprache):
Die Sprache L_u ist nicht entscheidbar.

Die Universelle Sprache

Satz (Unentscheidbarkeit der Universellen Sprache):
Die Sprache $L_u := \{wv \mid v \in L(T_w)\}$ ist nicht entscheidbar.

Beweis:

- Wir zeigen, dass L_u eine Verallgemeinerung von L_d^c ist.
- Wir nehmen an, dass es eine TM gibt, die L_u entscheidet.
- Dann zeigen wir, dass wir damit auch L_d^c entscheiden können.

Wir gehen wie folgt vor:

- Berechne das i, für das $w = w_i$.
- Betrachte die durch w_i codierte Turing-Maschine $\mathcal{M}_i$.
- Wende die Turing-Maschine für L_u auf $\langle \mathcal{M}_i \rangle \, w_i$ an.

Wäre L_u entscheidbar, so auch L_d^c mit Widerspruch zum letzen Korollar.

Die Universelle Sprache

Karlsruher Institut für Technologie

Satz (Semi-Entscheidbarkeit der Universellen Sprache):
Die Sprache $L_u := \{wv \mid v \in L(T_w)\}$ ist semi-entscheidbar.

Die Universelle Sprache

Satz (Semi-Entscheidbarkeit der Universellen Sprache):
Die Sprache $L_u := \{wv \mid v \in L(T_w)\}$ ist semi-entscheidbar.

Beweis:
Wir benutzen die universelle Turing-Maschine, mit der Eingabe wv:

- Falls T_w die Eingabe v akzeptiert, geschieht dies nach endlich vielen Schritten und die universelle Turing-Maschine akzeptiert wv.
- Falls T_w die Eingabe v nicht akzeptiert, wird wv von der universellen Turing-Maschine ebenfalls nicht akzeptiert. Dies ist unabhängig davon, ob die Simulation stoppt oder nicht.

Die Universelle Sprache

Satz (Semi-Entscheidbarkeit der Universellen Sprache):
Die Sprache $L_u := \{wv \mid v \in L(T_w)\}$ ist semi-entscheidbar.

Beweis:
Wir benutzen die universelle Turing-Maschine, mit der Eingabe wv:

- Falls T_w die Eingabe v akzeptiert, geschieht dies nach endlich vielen Schritten und die universelle Turing-Maschine akzeptiert wv.
- Falls T_w die Eingabe v nicht akzeptiert, wird wv von der universellen Turing-Maschine ebenfalls nicht akzeptiert. Dies ist unabhängig davon, ob die Simulation stoppt oder nicht.

Bemerkung:
Die Begriffe entscheidbar und semi-entscheidbar unterscheiden sich tatsächlich.