Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

# Übungsblatt 2

Vorlesung Theoretische Grundlagen der Informatik im WS 10/11

**Ausgabe** 4. November 2010
**Abgabe** 18. November 2010, 11:00 Uhr (im Kasten im UG von Gebäude 50.34)

## Aufgabe 1 (1+1+3 Punkte)

Wir betrachten den endlichen Automaten über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ mit den Zuständen $\{A, B, C, D, E, F, G\}$. Startzustand ist $A$, Endzustände sind $D$ und $E$. Die Übergangsfunktion ist gegeben durch folgende Tabelle:

| $\delta$ | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | C | F | A | C | F | F | F |
| 1 | B | E | D | B | E | E | D |

(a) Zeichnen Sie den Automaten.

(b) Entfernen Sie daraus alle nicht erreichbaren Zustände

(c) Konstruieren Sie daraus den zugehörigen Minimalautomaten

## Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas die Nicht-Regularität folgender Sprachen:

(a) $L_1 = \{ww^R | w \in \{a, b\}^*\}$, wobei $w^R$ das ‚Spiegelwort' zu $w$ ist (Sprache der Palindrome gerader Länge).

(b) Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $L_2$ die Sprache aller Wörter aus $\Sigma^*$, die mehr Nullen als Einsen enthalten.

(c) $L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i < j < k\}$.

## Aufgabe 3 (2+1+1 Punkte)

Seien $L$, $L_1$ und $L_2$ reguläre Sprachen. Beweisen Sie:

(a) $L^c := \Sigma^* \setminus L$ ist regulär

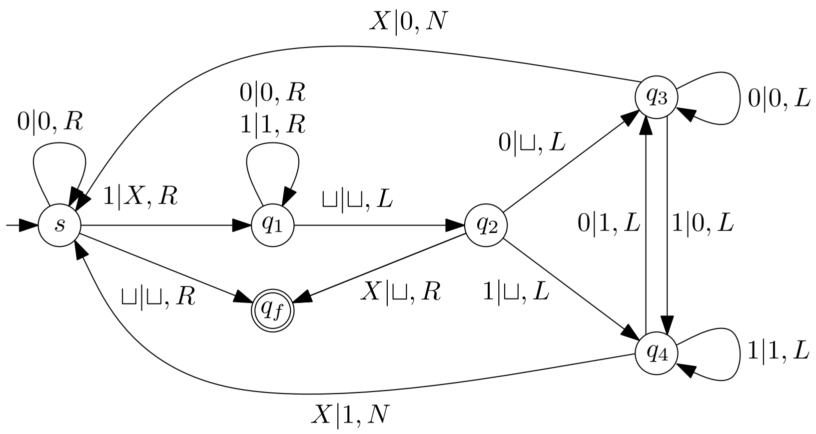
(b) $L_3 := L_1 \cap L_2$ ist regulär

(c) $L_4 := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ ist in } L_1, \text{ aber nicht in } L_2\}$ ist regulär

## Aufgabe 4 (3+1+1 Punkte)

Oft wird die Situation, in der sich eine Turingmaschine $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ befindet, durch die Angabe der *Konfiguration* in der Form $w(q)av$ codiert, wobei $w, v \in \Gamma^*, a \in \Gamma$ und $q \in Q$ sind. Dies bedeutet, dass sich $\mathcal{M}$ gerade im Zustand $q$ befindet; der Lesekopf steht auf dem Zeichen $a$; links davon steht das Wort $w$ und rechts davon das Wort $v$ auf dem Rechenband.

Gegeben sei nun die Turingmaschine $\mathcal{M}$ durch das folgende Zustandsdiagramm:




(a) Welche Konfigurationen durchläuft die Maschine bei Eingabe des Wortes 01010?

(b) Welche Aufgabe haben die Zustände $q_2, q_3$ und $q_4$? (Hinweis: Überlegen Sie dazu, was passiert, wenn $\mathcal{M}$ sich im Zustand $q_2$ befindet und der Lesekopf auf dem letzten Zeichen der Eingabe steht, bis zu dem Zeitpunkt, zu dem das erste Mal $X$ gelesen wird.)

(c) Wie verändert $\mathcal{M}$ die Eingabe?

## Aufgabe 5 (4 Punkte)

Entwerfen Sie eine deterministische Turing-Maschine $\mathcal{M} := (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$, die genau die Sprache $L := \{ww^R \in \{a,b\}^*\}$, wobei $w^R$ das „Spiegelwort" zu $w$ ist, akzeptiert. Dies ist die Sprache der Palindrome gerade Länge, die Sie bereits aus Aufgabe 2 kennen. Beschreiben Sie zunächst kurz in Worten, wie Ihre Turing-Maschine arbeitet. Spezifizieren Sie $\mathcal{M}$ dann explizit durch Angabe eines Zustandsdiagramms oder einer formalen Spezifikation.

## Aufgabe 6 (3+2+1+2 Punkte)

Zeige:

(a) Eine Sprache $L$ ist genau dann entscheidbar, wenn $L$ und $L^c$ semientscheidbar sind.

(b) Die Menge der semi-entscheidbaren Sprachen ist unter Vereinigung und Schnitt abgeschlossen.

(c) Die Menge der semi-entscheidbaren Sprachen ist unter Komplementbildung nicht abgeschlossen.

(d) Ist die Menge der ungeraden Zahlen entscheidbar? Geben Sie eine kurze Begründung. (Hinweis: Dabei kann angenommen werden, dass natürliche Zahlen binär kodiert vorliegen.)

Hinweis: Denken Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe daran, dass eine 2-Band-Turingmaschine durch eine 1-Band-Turingmaschine simuliert werden kann.

**Erläuterung zu $k$-Band-Turingmaschinen:**

Eine $k$-Band-Turingmaschine ist eine Turingmaschine mit $k$ Arbeitsbändern und der Übergangsfunktion

$$\delta : Q \times \Gamma \times \{1, \ldots, k\} \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\} \times \{1, \ldots, k\},$$

wobei $\delta(q, a, i) = (p, b, X, j)$ bedeute:

> Wenn sich die Maschine im Zustand $q$ befindet und auf Band $i$ das Symbol $a$ liest, so springt die Maschine in Zustand $p$, überschreibt $a$ mit $b$, der Lese-Schreib-Kopf bewegt sich auf Band $i$ gemäß $X$ und springt auf Band $j$ an die Stelle, an der er sich auf diesem Band zuletzt befunden hat.

Die Eingabe befinde sich auf Band 1, und im Zustand $s$ befinde sich der Kopf an der ersten Stelle der Eingabe. Die Stelle, auf die der Kopf bei einem Wechsel auf ein bis dahin ‚unbenutztes' Band springt, sei festgelegt.