Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Nachklausur zur Vorlesung
Theoretische Grundlagen der Informatik
Wintersemester 2010/2011

Hier Aufkleber mit Name und Matrikelnr. anbringen

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Beachten Sie:

- Bringen Sie den Aufkleber mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer auf diesem Deckblatt an und beschriften Sie jedes Aufgabenblatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Schreiben Sie die Lösungen auf die Aufgabenblätter und Rückseiten. Zusätzliches Papier erhalten Sie bei Bedarf von der Aufsicht.
- Zum Bestehen der Klausur sind **20** der möglichen **60** Punkte hinreichend.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe	Mögliche Punkte					Erreichte Punkte				
	a	b	c	d	Σ	a	b	c	d	Σ
1	4	-	-	-	4		-	-	-	
2	3	-	-	-	3		-	-	-	
3	3	3	-	-	6			-	-	
4	4	-	-	-	4		-	-	-	
5	3	4	-	-	7			-	-	
6	5	-	-	-	5		-	-	-	
7	6	-	-	-	6		-	-	-	
8	4	-	-	-	4		-	-	-	
9	1	2	1	1	5					
10	2	4	-	-	6			-	-	
11	10x1				10					
Σ					60					

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Sprache $L = \{0^k 1 0^j \mid k, j \in \mathbb{N}_0, k > j\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ nicht regulär ist.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Entwerfen Sie eine kontextfreie Grammatik, die die Sprache $\{a^j b^k c^l \mid j, k, l \in \mathbb{N}_0, j > l\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ erzeugt.

Aufgabe 3: (3+3 Punkte)

(a) In einem Wort $w = w_1 \dots w_n$ steht Zeichen x *neben* Zeichen y, wenn es ein $i \in \{1, \dots n-1\}$ gibt, so dass $x = w_i$ und $y = w_{i+1}$ oder $y = w_i$ und $x = w_{i+1}$. Gegeben sei das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Entwerfen Sie einen endlichen Automaten, der genau alle Wörter aus Σ^* akzeptiert, bei denen jede vorkommende 1 neben mindestens einer weiteren 1 steht. Geben Sie dazu das Zustandsübergangsdiagramm des Automaten an.

(b) Ein Wort w' ist *Präfix* eines Wortes w, wenn w sich schreiben lässt als $w = w'u$. Gilt darüber hinaus noch $u \neq \varepsilon$, so ist w' ein *echtes Präfix* von w. Sei L eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass dann auch $L' = \{w \in L \mid \text{ jedes echte Präfix von } w \text{ ist nicht in } L\}$ regulär ist.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

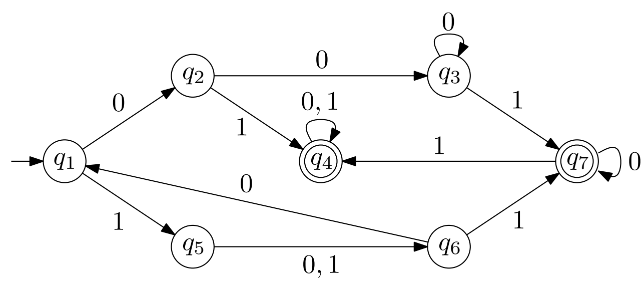
Gegeben ist die Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit Terminalen $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$, Nichtterminalen $V = \{S, A, B, C, D, E\}$ und Produktionen

$$\begin{aligned} R = \{S &\to DE, \\ A &\to AA|CC|e, \\ C &\to CD|a, \\ D &\to DD|d, \\ E &\to e\} \end{aligned}$$

Überprüfen Sie mit dem Cocke-Younger-Kasami Algorithmus, ob das Wort *aadea* in der Sprache $L(G)$ enthalten ist. Geben Sie dazu alle Zwischenergebnisse an.

Aufgabe 5: (3+4 Punkte)

Gegeben ist folgender endlicher Automat $\mathcal{A}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.



(a) Geben Sie die Sprache $L(\mathcal{A})$ an, die $\mathcal{A}$ akzeptiert. Dazu ist nicht verlangt, dass Sie das Verfahren aus der Vorlesung verwenden.

(b) Konstruieren Sie den Minimalautomaten zu $\mathcal{A}$. Verwenden Sie dazu ein systematisches Verfahren und geben Sie den zugehörigen Rechenweg an. Sie dürfen dazu benutzen, dass der Minimalautomat 5 Zustände hat.

Aufgabe 6: (5 Punkte)

Entwerfen Sie eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$, die als Eingabe eine positive, binärcodierte Zahl erhält und zu dieser 2 addiert. Sie dürfen annehmen, dass die Eingabezahl mit 01 beginnt. Stellen Sie $\mathcal{M}$ dazu grafisch durch Angabe eines Zustandsdiagrammes dar und bezeichnen Sie den Startzustand mit s. Beschreiben Sie kurz in Worten, wie ihre Turingmaschine arbeitet.

Aufgabe 7: (6 Punkte)

Zwei Knoten u und v eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißen *adjazent*, falls sie durch eine Kante verbunden sind, das heißt, falls $\{u, v\}$ in E ist. Eine *Knotenfärbung* von G ist eine Funktion, die jedem Knoten eine Farbe zuordnet.

Problem 4Color

Gegeben:	Ungerichteter Graph $G = (V, E)$
Frage:	Gibt es eine Knotenfärbung von G mit höchstens 4 Farben, so dass je zwei adjazente Knoten verschiedene Farben besitzen?

Zeigen Sie, dass das Problem 4COLOR $\mathcal{NP}$-vollständig ist. Benutzen Sie dazu, dass das Problem 3COLOR NP-vollständig ist:

Problem 3Color

Gegeben:	Ungerichteter Graph $G = (V, E)$
Frage:	Gibt es eine Knotenfärbung von G mit höchstens 3 Farben, so dass je zwei adjazente Knoten verschiedene Farben besitzen?

Aufgabe 8: (4 Punkte)

Sei L_1 eine nichtentscheidbare Sprache und L_2 eine entscheidbare Sprache mit $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.
Zeigen Sie: $L_1 \cup L_2$ ist nicht entscheidbar.

Aufgabe 9: (1+2+1+1 Punkte)

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, s, Z, \delta, \{f\})$ der Kellerautomat mit Zustandsmenge $Q = \{s, f\}$, Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, STACK-Alphabet $\Gamma = \{Y, Z\}$, Anfangszustand s, Stack-Initialisierung Z, einzigem Endzustand f und der folgenden Übergangsrelation δ:

$$\begin{array}{rcl} (s, 1, Z) & \mapsto & (s, ZY) \\ (s, \varepsilon, Z) & \mapsto & (f, \varepsilon) \\ (f, 0, Y) & \mapsto & (f, \varepsilon) \end{array}$$

(a) Ist $\mathcal{A}$ determininistisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Dokumentieren Sie eine durch Endzustand akzeptierende Berechung des Wortes 1110. Geben Sie dazu für jeden Schritt die aktuelle Konfiguration an.

(c) Welche Sprache akzeptiert $\mathcal{A}$ durch akzeptierenden Endzustand?

(d) Welche Sprache akzeptiert $\mathcal{A}$ durch leeren Stack?

Aufgabe 10: (2+4 Punkte)

Gegegeben sei eine Grundmenge $S = \{1, \ldots, n\}$ und ein Mengensystem $\mathcal{X} \subseteq 2^S$. Jedes Element aus S sei dabei in höchstens 3 Mengen aus $\mathcal{X}$ enthalten.
Ein *Cover* für S ist eine Teilmenge $C \subseteq \mathcal{X}$, so dass jedes $s \in S$ in mindestens einer Menge aus C enthalten ist. Das Problem COVER-3FREQ besteht dann darin, ein Cover minimaler Kardinalität zu finden.
Betrachten Sie folgenden Algorithmus:

Algorithmus 1: COVER-3FREQ APPROXIMATION

Eingabe : Menge S, $\mathcal{X} \subseteq 2^S$, so dass jedes s aus S in höchstens 3 Mengen aus $\mathcal{X}$ enthalten ist
Ausgabe : Cover C für S
$C \leftarrow \emptyset$;
solange $S \neq \emptyset$ **tue**
  $a \leftarrow$ wähle ein Element $a \in S$;
  $C \leftarrow C \cup \{X \in \mathcal{X} \mid a \in X\}$;
  $S \leftarrow \{s \in S \mid$ Es gibt kein $A \in C$ mit s $\in A\}$;

(a) Gegeben sei die folgende COVER-3FREQ Instanz $I = (S, \mathcal{X})$ mit Grundmenge S und Mengensystem $\mathcal{X}$ wie folgt:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \mathcal{X} = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}\}.$$

Geben Sie ein Cover $C_1 \subseteq \mathcal{X}$ von S minimaler Kardinalität an. Geben Sie zusätzlich das Cover C_2 an, das Algorithmus 1 mit Eingabe I berechnet, falls in jedem Schritt das Element a in S mit der kleinsten Nummer gewählt wird.

(b) Zeigen Sie, dass Algorithmus 1 2-approximativ ist, d.h. dass Algorithmus 1 eine relative Gütegarantie von $2 + 1 = 3$ hat.

Aufgabe 11: (10 Punkte)

Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob diese wahr oder falsch sind.
Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Es wird keine negative Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe geben.

Die Sprache $\{a^k a^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a\}$ ist regulär. ☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: Wahr.

Seien L_1 und L_2 nicht entscheidbar. Dann ist $L_1 \cup L_2$ nicht entscheidbar. ☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: Falsch.

Sei $\mathcal{L}_u := \{wv \in \{0,1\}^* \mid v \in L(T_w)\}$ die universelle Sprache. Dann ist $\mathcal{L}_u^c := \{0,1\}^* \setminus \mathcal{L}_u$ semi-entscheidbar. ☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: Falsch.

Um zu zeigen, dass ein Problem Π in $\mathcal{NP}$ liegt, genügt es, eine polynomielle Transformation von Π auf 3SAT ($\Pi \propto$ 3SAT) anzugeben. ☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: Wahr. Baue NTM für 3SAT um, so dass sie Π löst.

Jede von einem Kellerautomaten durch akzeptierende Endzustände akzeptierte Sprache ist kontextfrei. ☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: Wahr. Siehe Skript.

Sei Π ein Optimierungsproblem. Ein Algorithmus, der Π löst, heißt pseudopolynomiell, falls seine Laufzeit durch ein Polynom der beiden Variablen Eingabegröße und Größe der größten in der Eingabe vorkommenden Zahl beschränkt ist. ☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: Wahr. Siehe Folien und Übungsblatt.

Für jedes Entscheidungsproblem in $\mathcal{P}$ gibt es eine polynomiale Transformation auf 2SAT. ☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: Wahr.

Zu jeder Sprache L_1 gibt es eine Grammatik G mit $L(G) = L_1$. ☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: Falsch. Grammatiken können nur semi-entscheidbare Sprachen erzeugen.

Jede Sprache, die von einem nichtdeterministischen endlichen Automaten akzeptiert wird, ist regulär. ☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: Wahr. NEA's und DEA's sind gleichmächtig.

Ein (polynomiales) Approximationsschema (PAS) für ein Optimierungsproblem Π ist eine Familie von Algorithmen $\{\mathcal{A}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$, so dass $\mathcal{A}_\varepsilon$ ein polynomialer Algorithmus ist, der für jede Instanz I von Π einen Wert $\mathcal{A}_\varepsilon(I)$ liefert mit $|\mathrm{OPT}(I) - \mathcal{A}_\varepsilon(I)| \leq \varepsilon$. ☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: Falsch. Siehe Skript.