Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Klausur zur Vorlesung
Theoretische Grundlagen der Informatik
Wintersemester 2010/2011

Hier Aufkleber mit Name und Matrikelnr. anbringen

Vorname: ______________________________

Nachname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Beachten Sie:

- Bringen Sie den Aufkleber mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer auf diesem Deckblatt an und beschriften Sie jedes Aufgabenblatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Schreiben Sie die Lösungen auf die Aufgabenblätter und Rückseiten. Zusätzliches Papier erhalten Sie bei Bedarf von der Aufsicht.
- Zum Bestehen der Klausur sind **20** der möglichen **60** Punkte hinreichend.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe	Mögliche Punkte				Erreichte Punkte			
	a	b	c	Σ	a	b	c	Σ
1	4	-	-	4		-	-	
2	4	-	-	4		-	-	
3	3	-	-	3		-	-	
4	4	-	-	4		-	-	
5	3	4	-	7			-	
6	6	-	-	6		-	-	
7	4	2	-	6			-	
8	1	2	3	6				
9	3	-	-	3		-	-	
10	2	5	-	7			-	
11	10x1			10				
Σ				60				

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Sprache $L = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in \{a,b\}^k,\ w_2 = c^j,\ k < j,\ k,j \in \mathbb{N}_{>0}\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a,b,c\}$ nicht regulär ist.

Lösung:
Annahme: L ist regulär. Sei dann n wie im Pumping-Lemma gefordert, d.h., so dass für jedes Wort $w \in L$ mit $|w| > n$ eine Darstellung $w = uvx$ mit $|uv| \leq n$, $v \neq \epsilon$, existiert, bei der auch $uv^i x \in L$ ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Betrachte das Wort $w = a^n c^{n+1} \in L$. Für jede Zerlegung $w = uvx$ mit $|uv| \leq n$, $v \neq \epsilon$ ist $uv^2x = a^{n+\ell} c^{n+1} \notin L$ weil $\ell > 0$. Dies ist ein Widerspruch zum Pumping-Lemma.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Gegeben sei das Alphabet $\Sigma = \{a,b,c,d\}$.
Definitionen:

- Es sei L die Sprache aller Wörter über Σ in denen a nie neben b, b nie neben c und c nie neben d steht, wobei gilt:
- In einem Wort $w = w_1 \dots w_n$ *steht Zeichen x neben Zeichen y*, wenn es ein $i \in \{1, \dots, n-1\}$ gibt, so dass $x = w_i$ und $y = w_{i+1}$ oder $y = w_i$ und $x = w_{i+1}$.

Entwerfen Sie eine Grammatik, die die Sprache L erzeugt.

Lösung:
Die Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit $V = \{S, A, B, C, D\}$ und Regeln

$$\begin{array}{lcl} S & \to & A|B|C|D|\epsilon \\ A & \to & a|aA|aC|aD \\ B & \to & b|bB|bD \\ C & \to & c|cA|cC \\ D & \to & d|dA|dB|dD \end{array}$$

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit Terminalalphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, Variablen $V = \{S, A, B\}$ und Produktionen

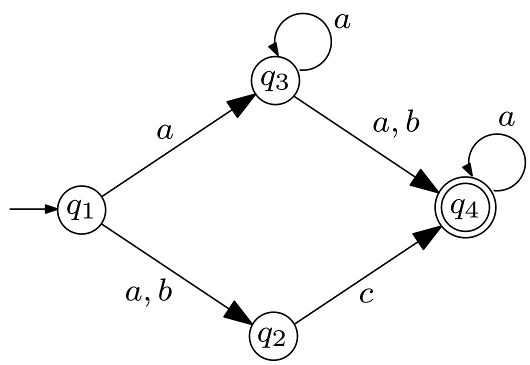
$$\begin{aligned} R = \{ \quad S &\rightarrow \quad 0B|1A, \\ A &\rightarrow \quad 0|0S|1AA \\ B &\rightarrow \quad 1|1S|0BB \quad \} . \end{aligned}$$

Welche Sprache erzeugt G?

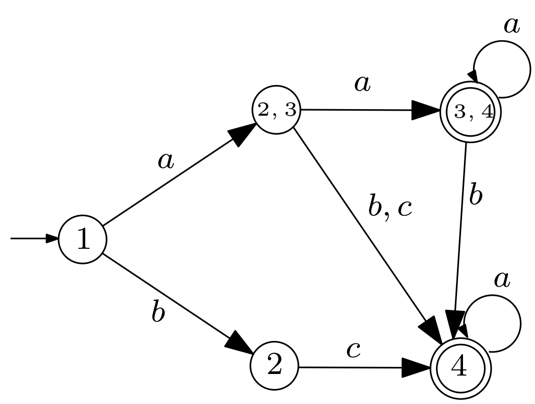
Lösung:
Die Sprache aller Wörter über dem Alphabet $\{0, 1\}$ der Länge mindestens 1, die genauso häufig 1 wie 0 enthalten.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Konstruieren Sie zu folgendem NEA über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ einen DEA, der dieselbe Sprache akzeptiert und zeichnen Sie das entsprechende Zustandsübergangsdiagramm.

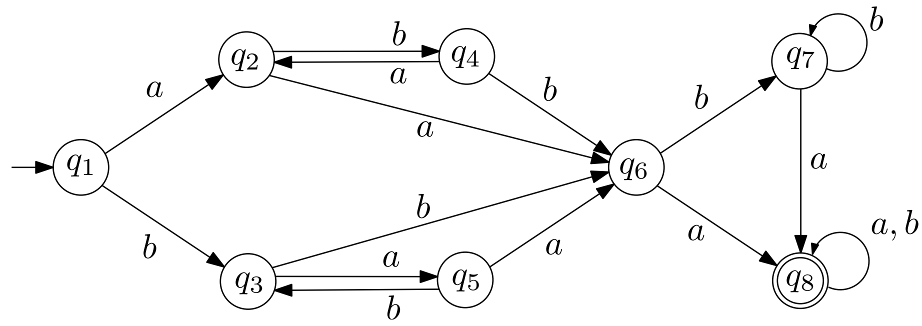


Lösung:



Aufgabe 5: (3+4 Punkte)

Gegeben ist folgender endlicher Automat $\mathcal{A}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.



(a) Geben Sie einen regulären Ausdruck für die Sprache an, die $\mathcal{A}$ akzeptiert. Hinweis: Hier ist nicht verlangt, dass sie das Verfahren aus der Vorlesung benutzen.

Lösung:

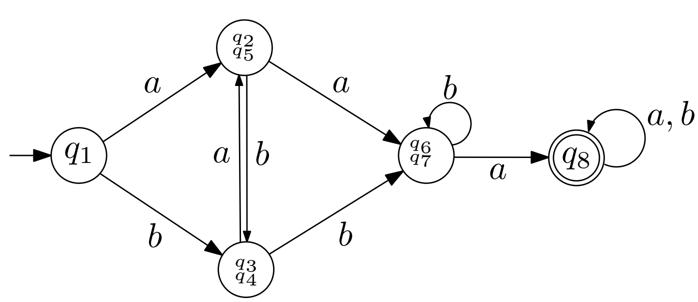
$$\big(a(ba)^*(a \cup bb) \cup b(ab)^*(b \cup aa)\big)\big(bb^*a \cup a\big)\big(a \cup b\big)^*$$

(b) Konstruieren Sie den Minimalautomaten zu $\mathcal{A}$. Sie dürfen benutzen, dass der Minimalautomat aus 5 Zuständen besteht.

Lösung:

		$\{q_1, \ldots q_8\}$
ϵ	trennt	$\{q_1, \ldots q_7\}, \{q_8\}$
a	trennt	$\{q_1, \ldots q_5\}, \{q_6, q_7\}, \{q_8\}$
b	trennt	nichts
aa	trennt	$\{q_2, q_5\}, \{q_1, q_3, q_4\}, \{q_6, q_7\}, \{q_8\}$
ba	trennt	$\{q_1\}, \{q_2, q_5\}, \{q_3, q_4\}, \{q_6, q_7\}, \{q_8\}$

Das sind bereits 5 Zustände.



Aufgabe 6: (6 Punkte)

Problem SUBSET 3-INTERVALL (S-3INT)

Gegeben: Endliche Menge M, Gewichtsfunktion $w : M \to \mathbb{N}_{>0}$, Zahl $k \in \mathbb{N}_{>0}$.
Frage: Gibt es eine Teilmenge $M' \subseteq M$, so dass $\sum_{m \in M'} w(m) \in [k, k+3]$ gilt?

Zeigen Sie, dass das Problem SUBSET 3-INTERVALL NP-vollständig ist. Benutzen Sie dazu, dass das Problem SUBSET SUM NP-vollständig ist:

Problem SUBSET SUM (S-SUM)

Gegeben: Endliche Menge M, Gewichtsfunktion $w : M \to \mathbb{N}_{>0}$, Zahl $k \in \mathbb{N}_{>0}$.
Frage: Gibt es eine Teilmenge $M' \subseteq M$, so dass $\sum_{m \in M'} w(m) = k$ gilt?

Lösung:

Problem S-3INT liegt in NP, denn für eine gegebene Menge M' lässt sich in Polynomialzeit $\sum_{m \in M'} w(m)$ ausrechnen und überprüfen, ob $\sum_{m \in M'} w(m) \in [k, k+3]$ gilt.

Um zu zeigen, dass S-3INT NP-schwer ist, zeigen wir S-SUM $\propto$ S-3INT. Gegeben sei eine S-SUM Instanz (M, w, k). Wir konstruieren die S-3INT-Instanz $(M, w', 4k)$ mit $w'(m) = 4w(m)$ für jedes $m \in M$. Dann gilt (M, w, k) lösbar $\Leftrightarrow$ $(M, w', 4k)$ lösbar.

- $\Rightarrow$. Sei M' eine Lösung von S-SUM Instanz (M, w, k). Dann ist M' eine Lösung von S-3INT Instanz $(M, w', 4k)$.
- $\Leftarrow$. Sei M' eine Lösung von S-3INT Instanz $(M, w', 4k)$. Dann gilt

$$\sum_{m \in M'} w'(m) = \sum_{m \in M'} 4w(m) \in [4k, 4k+3] \ .$$

Daraus folgt

$$\sum_{m \in M'} w(m) \in [k, k+3/4] = \{k\} \ ,$$

da $\sum_{m \in M'} w(m) \in \mathbb{N}$. Die Transformation ist polynomial.

Aufgabe 7: (4+2 Punkte)

(a) Sei L eine nicht entscheidbare Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ und sei $(01)^k \notin L$ für jedes $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie: Die Sprache

$$L' = \{w_1 \# w_2 \mid (w_1 \in L \land w_2 \notin L) \text{ oder } (w_1 \notin L \land w_2 \in L)\}$$

über dem Alphabet $\Sigma' = \{0, 1, \#\}$ ist nicht entscheidbar.

Lösung:
Annahme: L' sei entscheidbar. Sei M' eine TM die L' entscheidet. Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ konstruiere das Wort $w' = w\#01$. Dann gilt $w' \in L' \Leftrightarrow w \in L$. Damit kann man L wie folgt entscheiden, im Widerspruch zur Nichtentscheidbarkeit von L:

Für $w \in \Sigma^*$ konstruiere $w' = w\#01$. Simuliere dann die TM M' auf Eingabe w' und entscheide $w \in L$ gdw M' $w' \in L'$ entscheidet.

(b) Sei $\mathcal{A} = (Q = \{s, f\}, \Sigma = \{a, b\}, \Gamma = \{Y, Z\}, \delta, s, Z, \{f\})$ der Kellerautomat mit Zustandsmenge Q, Eingabealphabet Σ, STACK-Alphabet Γ, Anfangszustand s, Stack-Initialisierung Z, akzeptierendem Endzustand F und der folgenden Übergangsrelation δ:

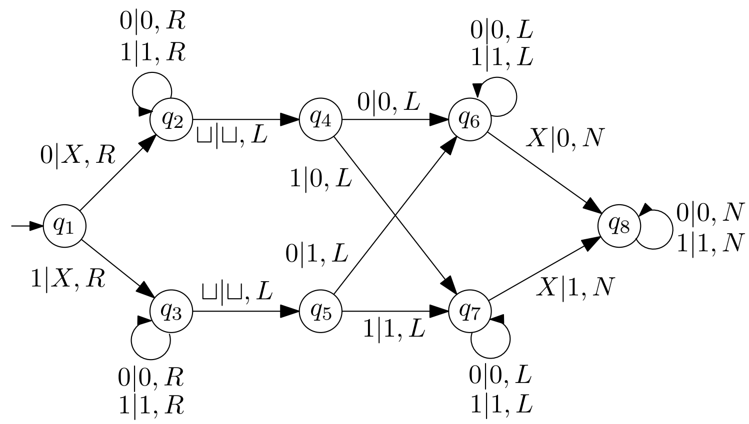
$$\begin{array}{ccc}
(s, a, Z) & \mapsto & (s, YZ) \\
(s, a, Y) & \mapsto & (s, YY) \\
(s, b, Y) & \mapsto & (s, \epsilon) \\
(s, \epsilon, Z) & \mapsto & (f, Z)
\end{array}$$

Sei L die Sprache, die $\mathcal{A}$ durch akzeptierenden Endzustand erkennt. Formen Sie $\mathcal{A}$ in einen Kellerautomaten $\mathcal{A}'$ um, der L durch leeren Stack erkennt.

Lösung:
Ergänze δ um $(s, \epsilon, Z) \mapsto (s, \epsilon)$.

Aufgabe 8: (1+2+3 Punkte)

Gegeben sei die folgende Turingmaschine M mit Eingabealphabet $\{0,1\}$ und Bandalphabet $\{0,1,\sqcup,X\}$ wobei $\sqcup$ das Blanksymbol ist.



(a) Ist die Turingmaschine M deterministisch? **Lösung:**

Ja.

(b) Rechnen Sie das Verhalten der Turingmaschine M bei Eingabe des Wortes 0101 durch. Geben Sie dazu alle auftretenden Konfigurationen an. **Lösung:**

	(q_1)	0101
X	(q_2)	101
$X1$	(q_2)	01
$X10$	(q_2)	1
$X101$	(q_2)	$\sqcup$
$X10$	(q_4)	1
$X1$	(q_7)	00
X	(q_7)	100
	(q_7)	$X100$
	(q_8)	1100

(c) Was berechnet die Turingmaschine M für eine Eingabe der Länge mindestens 2? **Lösung:**

M vertauscht erstes und letztes Zeichen, d.h. für Eingabewort $w_1 \dots w_n$ wird $w_n w_2 \dots w_{n-1} w_1$ berechnet.

Aufgabe 9: (3 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ mit Terminalen $\Sigma = \{a, b, c, d, x, f\}$, Nichtterminalen $V = \{S, A, B, C\}$ und Produktionen

$$\begin{array}{rrl} R = \{ & S \to & ABx|BCd|A \\ & A \to & AAf|a|CC \\ & B \to & b \\ & C \to & c \ \} . \end{array}$$

Berechnen Sie durch ein systematisches Verfahren eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform, die die gleiche Sprache wie G erzeugt.

Lösung:
Schritt 1: Rechte Seite nur Terminale oder nur Variablen

$$\begin{array}{rrl} R = \{ & S \to & ABX|BCD|A \\ & A \to & AAF|a|CC \\ & B \to & b \\ & C \to & c \\ & X \to & x \\ & D \to & d \\ & F \to & f \ \} \end{array}$$

mit neuen Variablen X, D, F.
Schritt 2: Rechte Seite hat Länge höchstens 2

$$\begin{array}{rrl} R = \{ & S \to & AY_1|BY_2|A \\ & A \to & AY_3|a|CC \\ & B \to & b \\ & C \to & c \\ & X \to & x \\ & D \to & d \\ & F \to & f \\ & Y_1 \to & BX \\ & Y_2 \to & CD \\ & Y_3 \to & AF \ \} \end{array}$$

mit neuen Variablen Y_1, Y_2, Y_3.
Schritt 3: Kettenregeln beseitigen

$$
\begin{aligned}
R = \{ \quad S &\rightarrow \quad AY_1|BY_2|AY_3|a|CC \\
A &\rightarrow \quad AY_3|a|CC \\
B &\rightarrow \quad b \\
C &\rightarrow \quad c \\
X &\rightarrow \quad x \\
D &\rightarrow \quad d \\
F &\rightarrow \quad f \\
Y_1 &\rightarrow \quad BX \\
Y_2 &\rightarrow \quad CD \\
Y_3 &\rightarrow \quad AF \quad \}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10: (2+5 Punkte)

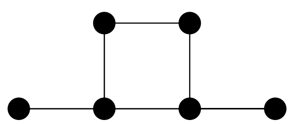
Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

- Zwei Kanten $e_1, e_2 \in E$ sind **adjazent**, wenn sie einen gleichen Endknoten haben.
- Ein **Matching** $E' \subseteq E$ von G ist eine Menge von Kanten die paarweise nicht adjazent sind.
- Ein **kardinalitätsmaximales Matching** E^* für G ist ein Matching mit maximal vielen Kanten, d.h. mit maximalem $|E^*|$.
- Ein **inklusionsmaximales Matching** E^{**} für G ist ein Matching, das nicht echte Teilmenge eines anderen Matchings ist, d.h. für das es kein Matching E'' für G gibt mit $E^{**} \subsetneq E''$.

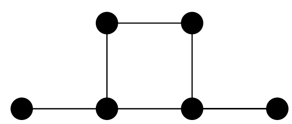
(a) Zeichnen Sie in

- Graphen (i) ein kardinalitätsmaximales Matching
- Graphen (ii) ein inklusionsmaximales Matching, das nicht kardinalitätsmaximal ist,

ein.

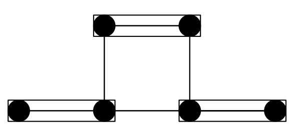


(i) kardinalitätsmaximales Matching

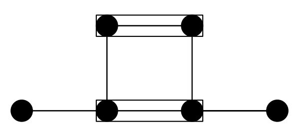


(ii) inklusionsmaximales, nicht kardinalitätsmaximales Matching

Lösung:



(i) kardinalitätsmaximales Matching



(ii) inklusionsmaximales, nicht kardinalitätsmaximales Matching

(b) Sei das folgende Maximierungsproblem MAXIMUM MATCHING gegeben:

Problem MAXIMUM MATCHING

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, der mindestens eine Kante enthält.

Gesucht: Ein Matching E' möglichst großer Kardinalität in G, d.h. wir haben ein Maximierungsproblem mit Zielfunktion $|E'|$ und der Bedingung, dass E' ein Matching in G ist.

Sei $\mathcal{A}$ ein Algorithmus, der für einen Eingabegraphen G ein beliebiges inklusionsmaximales Matching zurückliefert. Zeigen Sie: $\mathcal{A}$ ist 1-approximativ für Problem MAXIMUM MATCHING (d.h. $\mathcal{A}$ hat eine relative Gütegarantie von $1 + 1 = 2$).

Lösung:
Sei M' ein beliebiges inklusionsmaximales Matching. Sei M^* ein beliebiges kardinalitätsmaximales Matching.

Jede Kante $e \in M^*$ ist adjazent zu mindestens einer Kante in M' sonst wäre $M' \cup \{e\}$ ein Matching mit Widerspruch zur Inklusionsmaximalität von M'.

Sei $f : M^* \to M'$ eine Abbildung, die jeder Kante $e^* \in M^*$ eine zu e^* adjazente Kante $e' \in M'$ zuordnet.

Für jedes $e' \in M'$ gilt

$$|\{e^* \in M^* \mid f(e^*) = e'\}| \leq 2 \ .$$

Damit ist

$$|M^*| \leq 2|M'| \ .$$

Dies ist äquivalent zu

$$\frac{|M|^*}{|M'|} \leq 2 \ .$$

Das war zu zeigen.

Aufgabe 11: (10 Punkte)

Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob diese wahr oder falsch sind.
Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Es wird keine negative Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe geben.

Die Sprache $L = \{(xyz)^i(abc)^i \mid i \in \mathbb{N}_{>0},\ i < 27\}$ ist regulär. ☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: Wahr, denn L ist endlich.

Für jeden Kellerautomaten $\mathcal{K}$ gilt: Die Sprache, die $\mathcal{K}$ durch akzeptierenden Endzustand erkennt, ist gleich der Sprache, die $\mathcal{K}$ durch leeren Stack erkennt. ☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: Falsch

Seien L_1, L_2 Sprachen vom Chomsky-Typ 2. Dann ist $L_1 \cap L_2$ vom Chomsky Typ 2. ☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: Falsch

Sei K ein Kellerautomat, der nie ein Zeichen vom Stack löscht oder auf den Stack schreibt und durch Endzustand akzeptiert. Dann gibt es einen NEA, der die gleiche Sprache akzeptiert wie K. ☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: Wahr

Wenn es für jedes Wort $w \in L$ einer Sprache L einen DEA A_w gibt, der w akzeptiert, dann ist L regulär. ☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: Falsch, das gilt für jede Sprache, es gibt aber nichtreguläre Sprachen.

Es gibt ein Entscheidungsproblem $\Pi \in NP$, für das es keine polynomiale Transformation $\Pi \propto SAT$ gibt. ☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: Falsch, folgt aus Definition von NP.

Jede Sprache, die von einer Grammatik erzeugt wird, ist entscheidbar. ☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: Falsch. Aus Vorlesung bekannt: Chomsky-0 ist gleich der Klasse der semi-entscheidbaren Sprachen.

Sei Π ein Optimalwertproblem und $\mathcal{A}$ ein 4-Approximationsalgorithmus für Π. Dann liefert $\mathcal{A}$ mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ die richtige Lösung für Π. ☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: Falsch

Das Problem 2-SAT liegt in NP. ☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: Wahr.

Sei L eine Sprache, die von einer nichtdeterministischen Turingmaschine $\mathcal{M}$ in Polynomialzeit akzeptiert wird. Dann folgt daraus, dass es eine deterministische Turing-Maschine gibt, die L entscheidet. ☐ Wahr ☐ Falsch

Lösung: Wahr.