Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
ILKD Prof. Dr. D. Wagner

Theoretische Informatik
WS 2004/05
5. April 2005

# 2. Klausur zur Vorlesung
# Informatik III
# Wintersemester 2004/2005

Aufkleber

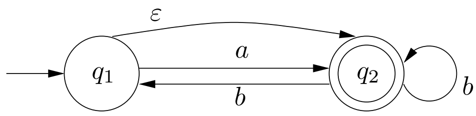
**Beachten Sie:**

- Bringen Sie Ihren *Aufkleber* auf diesem Deckblatt an, und beschriften Sie *jedes weitere Blatt* mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen auf die Aufgabenblätter und Rückseiten. Zusätzliches Papier erhalten Sie bei Bedarf von der Aufsicht.
- Zum Bestehen der Klausur sind **20** der möglichen **60** Punkte hinreichend.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

| Aufgabe | Mögliche Punkte | | | | | Erreichte Punkte | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | c | d | Σ | a | b | c | d | Σ |
| 1 | 3 | 5 | 4 | - | 12 | | | | - | |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 3 | 12 | | | | | |
| 3 | 4 | 4 | 4 | - | 12 | | | | - | |
| 4 | 3 | 4 | 5 | - | 12 | | | | - | |
| 5 | 12 × 1 | | | | 12 | | | | | |
| Σ | | | | | 60 | | | | | |

## Aufgabe 1: $(3 + 5 + 4 = 12$ Punkte)

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe einer systematischen Konstruktion einen zu folgendem NEA $\mathcal{A}$ äquivalenten DEA, und geben Sie diesen als Übergangsdiagramm an.

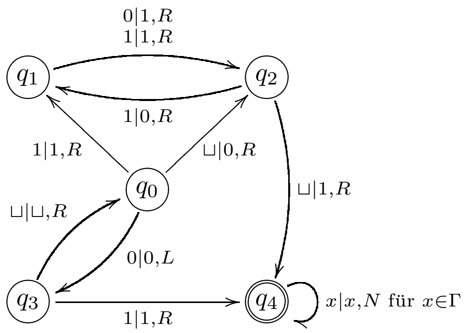



(b) Bestimmen Sie mit Hilfe einer systematischen Konstruktion die von $\mathcal{A}$ akzeptierte Sprache, und geben Sie diese als möglichst einfachen regulären Ausdruck an.

(c) Zeigen Sie, dass die Sprache $L = \{0^{2^n} \mid n \geq 1\}$ nicht regulär ist.

## Aufgabe 2: (2 + 3 + 4 + 3 = 12 Punkte)

Betrachten Sie die Turingmaschine $\mathcal{M}$ mit Zustandsmenge $Q = \{q_0, \ldots, q_4\}$, Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, Bandalphabet $\Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup\}$, Startzustand $q_0$, Endzustandsmenge $F = \{q_4\}$ und folgender partieller Übergangsfunktion $\delta$:




(a) Geben Sie die von $\mathcal{M}$ durchlaufenen Konfigurationen bei Abarbeitung des Wortes 1011 an. Geben Sie ein Wort an, bei dessen Eingabe $\mathcal{M}$ nicht stoppt.

(b) Zeigen Sie, dass die von $\mathcal{M}$ akzeptierte Sprache $L(\mathcal{M})$ kontextfrei ist.

(c) Modifizieren Sie $\mathcal{M}$ zu $\mathcal{M}'$ so, dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

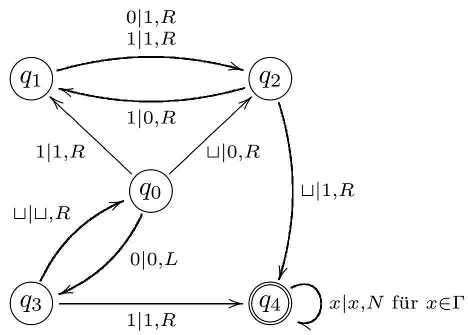
(1) $\mathcal{M}'$ hält stets,

(2) $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}')$,

(3) die Ausgaben von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ sind für die Eingaben aus $L(\mathcal{M})$ identisch und

(4) sei $L' := \{w \in \Sigma^* : \mathcal{M}$ hält bei Eingabe $w$ nicht$\}$, dann soll die Ausgabe von $\mathcal{M}'$ bei Eingaben aus $L'$ in $L(\mathcal{M})$ sein.

*Hinweis:* Zur besseren Übersicht sei nachfolgend noch einmal das Übergangsdiagramm von $\mathcal{M}$ gegeben.




(d) Seien $L_1, \ldots, L_k$ semientscheidbare Sprachen über einem Alphabet $\Sigma$ so, dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) für alle $i \neq j$ ist $L_i \cap L_j = \emptyset$ und

(ii) $\bigcup_{i=1}^{k} L_i = \Sigma^*$.

Zeigen Sie, dass die Sprachen $L_i$ (für $i \in \{1, \ldots, k\}$) entscheidbar sind.

## Aufgabe 3: (4 + 4 + 4 = 12 Punkte)

(a) **Problem HAMILTONKREIS (HC)**

*Gegeben:* Graph $G = (V, E)$.
*Frage:* Existiert ein einfacher Kreis in $G$, der alle Knoten in $V$ enthält, also eine Folge $(v_1, \ldots, v_n)$ von paarweise verschiedenen Knoten $v_i \in V$ $(i = 1, \ldots, n)$ mit $n := |V|$ und $\{v_j, v_{j+1}\}, \{v_n, v_1\} \in E$ $(j = 1, \ldots, n-1)$?

*Hinweis:* HC ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

**Problem RURAL POSTMAN (RP)**

*Gegeben:* Graph $G = (V, E)$, Teilmenge $\tilde{E} \subseteq E$ und Parameter $K \in \mathbb{N}$.
*Frage:* Existiert ein (nicht notwendigerweise einfacher) Kreis der Länge höchstens $K$ in $G$, der alle Kanten aus $\tilde{E}$ enthält, also eine Folge $(v_1, \ldots, v_\ell)$ mit $v_i \in V$ $(i = 1, \ldots, \ell)$, $\ell \leq K$ und $\tilde{E} \subseteq \big\{\{v_j, v_{j+1}\} \mid j = 1, \ldots, \ell - 1\big\} \cup \big\{\{v_\ell, v_1\}\big\} \subseteq E$?

*Hinweis:* Der Graph $G$ ist nicht notwendig schleifenfrei, d. h. er kann auch Kanten $\{v, v\}$ enthalten.

Zeigen Sie die $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von RP.

(b) **Problem SUBSET PRODUCT**

*Gegeben:* Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und Parameter $K \in \mathbb{N}$.
*Frage:* Existiert eine Indexmenge $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\prod_{j \in J} a_j = K$?

Beschreiben Sie einen pseudopolynomiellen Algorithmus für SUBSET PRODUCT, der auf dem Prinzip der dynamischen Programmierung beruht.

(c) Zeigen Sie, dass co-INDEPENDENT SET $\in \mathcal{DTAPE}(n)$, wobei $n$ die Eingabelänge einer co-INDEPENDENT SET-Instanz bezeichne.

## Aufgabe 4: (3 + 4 + 5 = 12 Punkte)

Gegeben sei eine Grammatik $G = (\Sigma := \{0, 1\}, V := \{S, A, B\}, S, R)$ mit

$$R := \{\ S \to 0A \mid 1B, \quad A \to 1 \mid 1S, \quad B \to 0 \mid 0S\ \}\ .$$

(a) Ist die Grammatik $G$ in Greibach-Normalform? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

Geben Sie mit Hilfe des Verfahrens aus der Vorlesung einen Kellerautomaten als vollständiges 7-Tupel $(Q, \Sigma', \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ an, der genau $L(G)$ mit leerem Stack akzeptiert.

(b) Bringen Sie die Grammatik $G$ in Chomsky-Normalform und entscheiden Sie mit Hilfe des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus, ob das Wort 0110 in $L(G)$ enthalten ist.

(c) Geben Sie die Sprache $L(G)$ an und zeigen Sie anschließend für $L(G)$ *explizit*, dass die im Pumping-Lemma (für kontextfreie Sprachen) formulierte notwendige Bedingung für die Kontextfreiheit erfüllt ist. (Geben Sie also eine konkrete 'Belegung' für die existenzquantifizierten Ausdrücke an, und begründen Sie.)

## Aufgabe 5: (12 × 1 = 12 Punkte)

Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob diese wahr oder falsch sind.
*Hinweis:* Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Es wird keine negative Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe gegeben.

Sei $\mathcal{A}$ ein NEA über einem Alphabet $\Sigma$. Dann akzeptiert $\mathcal{A}$ ein Wort $w \in \Sigma^*$ genau dann, wenn $\mathcal{A}$ bei der Abarbeitung von $w$ mindestens einen Endzustand benutzt. ☐ wahr ☐ falsch

Es existiert ein endlicher Automat, der die durch die Grammatik $(\{a,b,c\},\{S,A,B,C\},S,R)$ mit

$$R = \{S \longrightarrow ABC,\ A \longrightarrow C,\ A \longrightarrow AA \mid a,\ B \longrightarrow BB \mid b,\ C \longrightarrow CC \mid c\}$$

erzeugte Sprache erkennt. ☐ wahr ☐ falsch

Die Sprache $L = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{0^{pn} \mid p \text{ prim}\} \subseteq \{0\}^*$ hat endlichen Nerodeindex. ☐ wahr ☐ falsch

Seien $f_1$ und $f_2$ turingberechenbare Funktionen und $\mathcal{M}$ eine deterministische Turingmaschine. Dann existiert keine nicht-deterministische Turingmaschine, die entscheidet, ob $\mathcal{M}$ Funktion $f_1$ oder $f_2$ berechnet. ☐ wahr ☐ falsch

Sei $L$ eine semientscheidbare Sprache über dem Alphabet $\{0,1\}$. Dann ist $\chi^*_{L\cap L_u}$ berechenbar, wobei $L_u$ die universelle Sprache bezeichne. ☐ wahr ☐ falsch

Sei $L$ eine Sprache über dem Alphabet $\{0,1\}$ und $w \in \{0,1\}^*$. Dann gibt es eine Gödelnummer $g$ so, dass die universelle Turingmaschine die Eingabe $(g,w)$ genau dann akzeptiert, falls $w \in L$. ☐ wahr ☐ falsch

Es gilt: co-2SAT $\notin \mathcal{NP}$. ☐ wahr ☐ falsch

Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, dann kann mit Hilfe eines Algorithmus für SET COVER eine Instanz von INDEPENDENT SET in polynomieller Gesamtzeit gelöst werden. ☐ wahr ☐ falsch

Falls es ein PAS für COLOR gibt, dann ist $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. ☐ wahr ☐ falsch

Jede Sprache, die durch einen nicht-deterministischen endlichen Automaten erkannt wird, kann auch durch einen deterministischen Kellerautomaten erkannt werden. ☐ wahr ☐ falsch

Die Sprache

$$\Big[\big(\{a^n cb^n cd^k : k,n \in \mathbb{N}\} \cap a^*cb^*cd^*\big) \cup a^*cb^*\Big] \cap \Big[a^*c \cdot \{b^n cd^n : n \in \mathbb{N}\}\Big]$$

ist kontextfrei. ☐ wahr ☐ falsch

Sei $G$ eine kontextfreie Grammatik und $\alpha$ ein regulärer Ausdruck. Es ist nicht entscheidbar, ob $L(G) \cap L(\alpha) = \emptyset$ ist. ☐ wahr ☐ falsch