Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
ILKD Prof. Dr. D. Wagner

Theoretische Informatik
WS 2003/04
20. Februar 2004

1. Klausur zur Vorlesung
Informatik III
Wintersemester 2003/2004

Hier Aufkleber mit Name und Matrikelnr. anbringen

Vorname: ________________________

Nachname: ________________________

Matrikelnummer: ________________________

Beachten Sie:

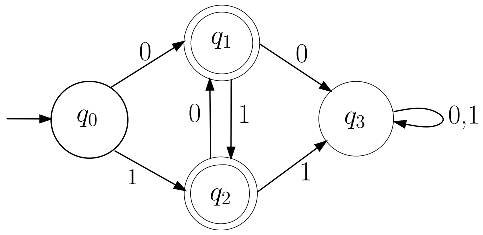
- Bringen Sie den Aufkleber mit Ihrem Namen und Matrikelnummer auf diesem Deckblatt an und beschriften Sie jedes weitere Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Schreiben Sie die Lösungen auf die Aufgabenblätter und Rückseiten. Zusätzliches Papier erhalten Sie bei Bedarf von der Aufsicht.
- Zum Bestehen der Klausur sind **20** der möglichen **60** Punkte hinreichend.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe	Mögliche Punkte					Erreichte Punkte				
	a	b	c	d	Σ	a	b	c	d	Σ
1	2	2	4	4	12					
2	2	2	4	4	12					
3	4	4	4	-	12				-	
4	3	3	2	4	12					
5	12x1				12					
Σ					60					

Aufgabe 1:

(2+2+4+4=12 Punkte)

(a) Gegeben sei folgender deterministischer endlicher Automat (DEA):

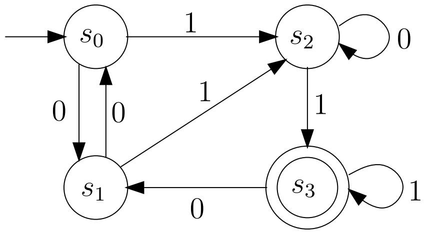


Werden die Wörter '01011' und '10101' von dem Automaten akzeptiert? Begründen Sie Ihre Antwort (durch Angabe der durchlaufenen Zustände).

Geben Sie einen regulären Ausdruck für die von dem Automaten akzeptierte Sprache an.

(b) Seien $L_1 = \{ab, b, abc\}$ und $L_2 = \{b, bc\}$ zwei Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Bestimmen Sie $L_1 \cdot L_2$, L_1/L_2 und $(L_2)^2$.

(c) Minimieren Sie folgenden Automaten mittels Konstruktion des Äquivalenzklassenautomaten. Geben Sie die Übergangsfunktion des Minimalautomaten tabellarisch an.



(d) Beweisen Sie, dass die Sprache $L = \{a^n b a^m b a^{n+m} \mid n, m \geq 1\}$ nicht regulär ist.

Aufgabe 2:

(2+2+4+4=12 Punkte)

Betrachten Sie eine Turingmaschine $\mathcal{M}$ mit $\Sigma = \{a\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{\sqcup\}$, $Q = \{s, q, f\}$, s Startzustand und f der einzige akzeptierende Endzustand. Die Übergangsfunktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\delta(s, a) &= (q, a, R)\\
\delta(s, \sqcup) &= (f, \sqcup, N)\\
\delta(q, a) &= (s, a, R)\\
\delta(q, \sqcup) &= (s, a, N)\\
\delta(f, a) &= (f, a, N)\\
\delta(f, \sqcup) &= (f, \sqcup, N),
\end{aligned}$$

und die von $\mathcal{M}$ akzeptierte Sprache sei $L_{\mathcal{M}}$.

(a) Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob diese wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Es wird keine negative Gesamtpunktzahl für diese Teilaufgabe geben.

$aaaa \in L_{\mathcal{M}}$.	☐ Wahr	☐ Falsch
Für alle $n \in I\!N$ ist $a^n \in L_{\mathcal{M}}$.	☐ Wahr	☐ Falsch

(b) Geben Sie für obige Turingmaschine eine modifizierte Übergangsfunktion an, so dass die Funktion

$$f : \Sigma^* \to \Gamma^* : \; f(a^n) = a^{n+1} \quad (n \in I\!N_0)$$

realisiert wird und die neue Turingmaschine stets hält.

(c) Sei $L \subset \{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*$ eine Sprache, die nicht entscheidbar ist. Beweisen Sie, dass die Sprache

$$L' = \{\mathtt{1}w \mid w \in L\}$$

nicht entscheidbar ist.

(d) Zeigen Sie, dass das Post'sche Korrespondenzproblem semientscheidbar ist.

Aufgabe 3: (4+4+4 = 12 Punkte)

[Hinweis: Für die in dieser Aufgabe vorkommenden Probleme sind jeweils am Ende des Aufgabentextes nochmals die Definitionen angegeben.]

(a) Zeigen Sie: Das Problem DOUBLE-SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

[Hinweis: Verwenden Sie SAT für die polynomiale Transformation.]

Problem DOUBLE-SAT

Gegeben: Eine Menge $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ von booleschen Variablen, eine Menge C von Klauseln über U.

Frage: Existieren *zwei verschiedene* Wahrheitsbelegungen von U, so dass C erfüllt wird, d.h., dass alle Klauseln aus C den Wahrheitswert `wahr` annehmen?

(b) Zeigen Sie, dass es keinen Approximationsalgorithmus mit absoluter Gütegarantie für die Minimierungsversion des $\mathcal{NP}$-vollständigen Problems VERTEX COVER gibt, falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

Ein *Vertex-Cover* eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $V' \subseteq V$, so dass für jede Kante aus E mindestens einer ihrer Endknoten in V' ist.

Problem VERTEX COVER

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Konstante K.

Frage: Hat G ein Vertex-Cover der Größe höchstens K?

(c) Zeigen Sie: MISSING EDGE $\in$ co-$\mathcal{NP}$.

Problem MISSING EDGE

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Konstante K

Frage: Existieren für jede Teilmenge $V' \subseteq V$ mit $|V'| = K$ zwei Knoten $s, t \in V'$ mit $\{s, t\} \notin E$.

Aufgabe 4: (3+3+2+4=12 Punkte)

Die Grammatik G sei gegeben durch das Alphabet $\{0,1,2\}$, die Variablen $\{S, A, B\}$, das Startsymbol S und die folgenden Regeln:

$$S \to AB,\ A \to 0A \mid 0,\ B \to 1B2 \mid 12$$

(a) Geben Sie einen Kellerautomaten an, der die Sprache $L(G)$ akzeptiert (ohne Begründung).

(b) Bringen Sie G durch eine systematische Konstruktion in Chomsky-Normalform.

(c) Sei $G' = (\Sigma, V, S, R)$ die Grammatik mit $\Sigma = \{a, b, c\}$, $V = \{S, A, B, C, Q, X, Y\}$ und

$$R = \{S \to XY,\ X \to AQ \mid AB,\ Q \to XB,\ Y \to YC \mid c,\ A \to a,\ B \to b,\ C \to c\}.$$

Wenden Sie den CYK-Algorithmus auf das Wort $abcc$ und die Grammatik G' an.

(d) Zeigen Sie, dass die Sprache $\{0^i 1^j 2^i 3^j \mid i, j \geq 1\}$ nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 5: (12x1=12 Punkte)

Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob diese wahr oder falsch sind.
Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Es wird keine negative Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe geben.

Aussage	Wahr	Falsch
Seien L_1, L_2 reguläre Sprachen. Dann ist auch $L_1 \cap L_2$ regulär.	☐	☐
Die regulären Ausdrücke $(a^*b^*)^*$ und $(a^*b)^*$ sind äquivalent.	☐	☐
Jede Turingmaschine mit zwei Bändern kann durch eine Turingmaschine mit einem Band simuliert werden.	☐	☐
Jeder Kellerautomat mit zwei Stacks kann durch einen Kellerautomat mit einem Stack simuliert werden.	☐	☐
Sei L_1 semientscheidbar und L_2 entscheidbar. Dann ist $L_1 \cap L_2$ immer entscheidbar.	☐	☐
Σ^* und $\emptyset$ sind $\mathcal{NP}$-vollständig.	☐	☐
Für jede Sprache L gilt: Aus $L \in \mathcal{P}$ folgt $L^C \in \mathcal{P}$.	☐	☐
Für jedes Optimierungsproblem Π gilt: Es gibt für Π einen Approximationsalgorithmus mit relativer Gütegarantie 2 wenn es ein PAS für Π gibt.	☐	☐
Das KNAPSACK-Problem, eingeschränkt auf Kosten aus $\{0,1\}$ und Gewichte aus $\{3,5,7\}$ ist in $\mathcal{P}$.	☐	☐
Sei Σ ein endliches Alphabet. Dann ist Σ^* kontextfrei.	☐	☐
Es existiert ein NEA, der die Sprache aller Java-Programme erkennt.	☐	☐
Wenn für eine Sprache L gilt: $\exists n \in \mathbb{N} : \ \forall w \in L, \lvert w\rvert > n : \ \exists$ Zerlegung $w = uvx, \lvert uv\rvert \leq n, v \neq \varepsilon : \forall i \in \mathbb{N}_0 : \ uv^ix \in L$, dann ist L regulär.	☐	☐