Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

# Nachklausur zur Vorlesung
# Informatik III
# Wintersemester 2007/2008

**Hier Aufkleber mit Name und Matrikelnr. anbringen**

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

**Beachten Sie:**

- Bringen Sie den Aufkleber mit Ihrem Namen und Matrikelnummer auf diesem Deckblatt an und beschriften Sie jedes Aufgabenblatt mit Ihren Namen und Matrikelnummer.
- Schreiben Sie die Lösungen auf die Aufgabenblätter und Rückseiten. Zusätzliches Papier erhalten Sie bei Bedarf von der Aufsicht.
- Zum Bestehen der Klausur sind **20** der möglichen **60** Punkte hinreichend.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

| Aufgabe | Mögliche Punkte | | | | | Erreichte Punkte | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a | b | c | d | Σ | a | b | c | d | Σ |
| 1 | 2 | 2 | 4 | 4 | 12 | | | | | |
| 2 | 2 | 4 | 6 | - | 12 | | | | - | |
| 3 | 1 | 1 | 5 | 5 | 12 | | | | | |
| 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 12 | | | | | |
| 5 | 12x1 | | | | 12 | | | | | |
| Σ | | | | | 60 | | | | | |

## Aufgabe 1: (2+2+4+4=12 Punkte)

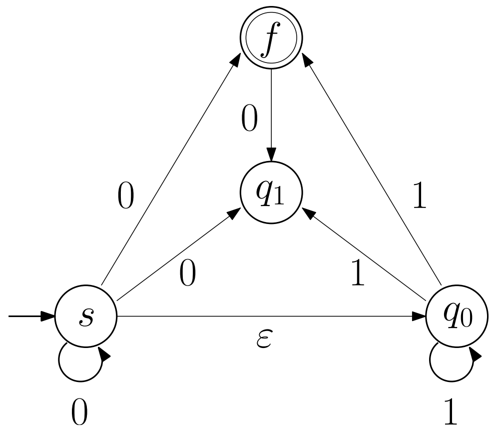
Die Sprache $L$ bestehe aus allen Wörtern $w$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ mit der folgenden Eigenschaft: Das Wort $w$ enthält mindestens zwei Nullen, zwischen denen der Teilstring 11 vorkommt.

(a) Geben Sie einen regulären Ausdruck für die Sprache $L$ an.

(b) Geben Sie einen endlichen Automaten an, der genau $L$ akzeptiert.

(c) Sei $L_0$ die Sprache der Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, die genau zwei Nullen enthalten. Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen der Nerode-Relation zu $L_0$ und geben Sie diese jeweils als Menge an (eine Begründung ist nicht erforderlich).

(d) Gegeben sei der folgende nichtdeterministische endliche Automat (NEA) $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$:



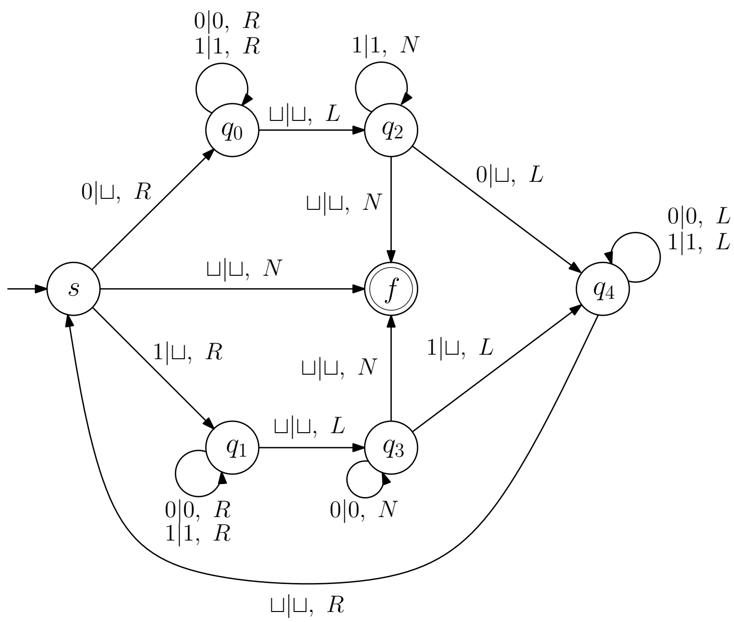

Konstruieren Sie einen zu $\mathcal{A}$ äquivalenten deterministischen endlichen Automaten (DEA) $\mathcal{A}'$ mittels Potenzmengenkonstruktion. Geben Sie $\mathcal{A}'$ als 5-Tupel $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma', \delta', s', F')$ an. Sie können die Übergangsfunktion $\delta'$ tabellarisch darstellen. Nicht erreichbare Zustände müssen dabei nicht explizit angegeben werden.

## Aufgabe 2: (2+4+6=12 Punkte)

(a) Seien $L_1$ und $L_2$ Sprachen über einem Alphabet $\Sigma$ mit $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ und $L_1 \cup L_2 = \Sigma^*$. Außerdem sei $L_2$ semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar. Zeigen Sie, dass dann $L_1$ nicht semi-entscheidbar ist.

(b) Entwerfen Sie eine Turingmaschine, die zu einem Eingabewort $b \in \{0,1\}^*$ den Wert $b$ mod 8 berechnet und nur solche Eingaben akzeptiert, die größer oder gleich 8 sind. Das Eingabealphabet sei $\Sigma = \{0,1\}$. Die Eingabe wird als Binärzahl interpretiert. Die Ausgabe darf führende Nullen enthalten.

(c) Gegeben sei folgende Turingmaschine $\mathcal{M}$:




- Geben Sie die ersten 9 Schritte der Verarbeitung des Wortes 0100 durch $\mathcal{M}$ an (durch Angabe der Konfiguration nach jedem Schritt).
- Welche Sprache wird von $\mathcal{M}$ akzeptiert? Erklären Sie als Begründung kurz die Funktionsweise der Turingmaschine.

## Aufgabe 3: (1+1+5+5=12 Punkte)

(a) Wie ist die Klasse $\mathcal{NPI}$ definiert?

(b) Ist folgende Instanz $I := (X, S)$ von EXACT COVER mit

$$\begin{aligned} X &:= \{1,2,3,4,5,6\} \quad \text{und} \\ S &:= \{\{1,3,5\},\{2,3,4\},\{1,2,3\},\{2\},\{4,6\},\{5,6\}\} \end{aligned}$$

lösbar? Geben Sie eine Lösung an, falls eine solche existiert, oder begründen Sie gegebenenfalls, warum die Instanz keine Lösung besitzt:

(c) Ein Independent Set eines Graphen ist eine Teilmenge seiner Knoten, so dass es keine zwei Knoten aus dem Independent Set gibt, die durch eine Kante verbunden sind.

Problem INDEPENDENT SET (IS)

- Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Wert $k \in \mathbb{N}$
- Frage: Gibt es ein Independent Set $S$ von $G$ mit $|S| \geq k$?

Ein Vertex Cover (VC) eines Graphen ist eine Teilmenge seiner Knoten, so dass jede Kante an mindestens einem Knoten des VC anliegt.

Problem VERTEX COVER DECISION (VCD)

- Gegeben: Graph $G = (V, E)$, Wert $\ell \in \mathbb{N}$
- Frage: Gibt es ein Vertex Cover $C$ von $G$ mit $|C| \leq \ell$?

Aus der Übung ist bekannt, dass das Problem VCD $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

Zeigen Sie, dass das Problem INDEPENDET SET (IS) $\mathcal{NP}$-vollständig ist. Benutzen Sie hierzu die $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von VERTEX COVER DECISION (VCD). Hinweis: Ein Teil des Beweises besteht darin, zu zeigen, dass $S$ genau dann ein Independent Set für $(V, E)$ ist, wenn $V \setminus S$ ein Vertex Cover ist.

(d) Problem VERTEX COVER OPTIMIZATION (VCO)

- Gegeben: Graph $G = (V, E)$
- Gesucht: Wieviele Knoten enthält ein knotenminimales Vertex Cover von $G$?

Zeigen Sie, dass es unter der Annahme $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ keinen Polynomialzeit-Approximationsalgorithmus mit absoluter Gütegarantie für VCO geben kann. Benutzen Sie hierzu die $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von VCD.

## Aufgabe 4: (2+4+2+4=12 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ mit der Variablenmenge $V = \{S, A, B\}$ und der Regelmenge

$$\begin{aligned} R := \{\ S &\rightarrow AbBa, \\ A &\rightarrow Aa \mid \varepsilon, \\ B &\rightarrow S \mid b\ \}\ . \end{aligned}$$

(a) Geben Sie einen Syntaxbaum für das Wort *abba* an. Ist der Syntaxbaum eindeutig? Begründen Sie ihre Antwort.

(b) Transformieren Sie die Grammatik $G$ durch Anwendung eines systematischen Verfahrens in Chomsky-Normalform. Schreiben Sie die Zwischenschritte auf.

(c) Gegeben sei die Grammatik $G' = \{\Sigma, V, S, R'\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ mit der Variablenmenge $V = \{S, A, B\}$ und der Regelmenge

$$\begin{aligned} R' := \{\ S &\rightarrow AB \mid BA, \\ A &\rightarrow SB \mid a, \\ B &\rightarrow BS \mid b\ \} \end{aligned}$$

in Chomsky-Normalform. Überprüfen Sie mit Hilfe des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus, ob das Wort *babb* in $L(G')$ enthalten ist. Geben Sie alle Zwischenschritte des Algorithmus an.

(d) Beweisen Sie, das die Sprache $L = \{w_1 \cdots w_{2k}\#w_1 \cdots w_k \mid k \geq 0, w_i \in \{a, b\}\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, \#\}$ nicht kontextfrei ist.

## Aufgabe 5: (12 Punkte)

Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob diese wahr oder falsch sind.
*Hinweis:* Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Es wird keine negative Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe geben.

Sei $L$ eine Sprache, die nicht regulär ist. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$, so dass für jede Zerlegung $w = uvx$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| > 0$ ein $i \in \mathbb{N}_0$ existiert, so dass $uv^ix \notin L$. ☐ Wahr ☐ Falsch

Für jede Sprache vom Typ Chomsky 3, die nicht das leere Wort erzeugt, gibt es eine Grammatik in Greibach Normalform. ☐ Wahr ☐ Falsch

Das Komplement einer entscheidbaren Sprache ist semi-entscheidbar. ☐ Wahr ☐ Falsch

Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, gilt $\mathcal{P} \neq co - \mathcal{P}$. ☐ Wahr ☐ Falsch

Sei $L$ eine Sprache mit Nerode-Index $k < \infty$. Dann gibt es einen DEA mit $k$ Zuständen der genau $L$ akzeptiert. ☐ Wahr ☐ Falsch

Es gibt einen deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ mit der Eigenschaft, dass das Komplement der von $\mathcal{A}$ akzeptierten Sprache semi-entscheidbar aber nicht entscheidbar ist. ☐ Wahr ☐ Falsch

Wenn $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, dann ist jedes Problem aus $\mathcal{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}$ $\mathcal{NP}$-vollständig. ☐ Wahr ☐ Falsch

Sei $L$ $\mathcal{NP}$-vollständig. Dann gibt es keine deterministische Turingmaschine, die genau $L$ akzeptiert. ☐ Wahr ☐ Falsch

Das Problem SAT ist entscheidbar. ☐ Wahr ☐ Falsch

Sei $L$ eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Turingmaschine $\mathcal{M}$, die genau $L$ akzeptiert und für jede Eingabe $w$ zu jedem Zeitpunkt der Berechnung höchstens $|w|$ Speicherzellen auf dem Band belegt. ☐ Wahr ☐ Falsch

Seien $L_1$ und $L_2$ Sprachen für die es je einen Kellerautomaten gibt, der genau sie akzeptiert. Dann gibt es einen Kellerautomaten der $L_1 \cap L_2$ akzeptiert. ☐ Wahr ☐ Falsch

Es gibt eine deterministische Turingmaschine $\mathcal{M}$, die zu jedem deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ einen zu $\mathcal{A}$ äquivalenten deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}'$ mit minimaler Anzahl an Zuständen berechnet. ☐ Wahr ☐ Falsch