Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Klausur zur Vorlesung
Informatik III
Wintersemester 2007/2008

Hier Aufkleber mit Name und Matrikelnr. anbringen

Vorname: ______________________________

Nachname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

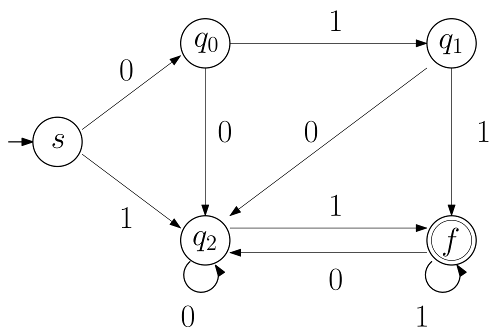
Beachten Sie:

- Bringen Sie den Aufkleber mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer auf diesem Deckblatt an und beschriften Sie jedes Aufgabenblatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Schreiben Sie die Lösungen auf die Aufgabenblätter und Rückseiten. Zusätzliches Papier erhalten Sie bei Bedarf von der Aufsicht.
- Zum Bestehen der Klausur sind **20** der möglichen **60** Punkte hinreichend.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe	Mögliche Punkte					Erreichte Punkte				
	a	b	c	d	Σ	a	b	c	d	Σ
1	1	4	3	4	12					
2	1	3	5	3	12					
3	2	2	2	6	12					
4	1	4	3	4	12					
5	12x1				12					
Σ					60					

Aufgabe 1: (1+4+3+4=12 Punkte)

Gegeben sei folgender deterministischer endlicher Automat (DEA) $\mathcal{A}$ mit Startzustand s, einzigem akzeptierendem Zustand f und dem Alphabet $\{0, 1\}$:



(a) Werden die Wörter 01010 und 10101 von $\mathcal{A}$ akzeptiert? Begründen Sie Ihre Antwort (durch Angabe der durchlaufenen Zustände).

(b) Minimieren Sie den Automaten $\mathcal{A}$ systematisch mittels Konstruktion des Äquivalenzklassenautomaten und geben Sie den daraus resultierenden minimalen deterministischen endlichen Automaten (DEA) vollständig an.

(c) Seien $L_1 = \{aba, bab, ab\}$ und $L_2 = \{bb, ab, ba\}$ zwei Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie $L_1/L_2,\ L_1 \backslash L_2,\ (L_2)^2$ durch Aufzählen der Elemente an.

(d) Beweisen Sie, dass die Sprache $L = \{a^i b^j c^{k+j} \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0, k \geq i\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ nicht regulär ist.

Aufgabe 2: (1+3+5+3=12 Punkte)

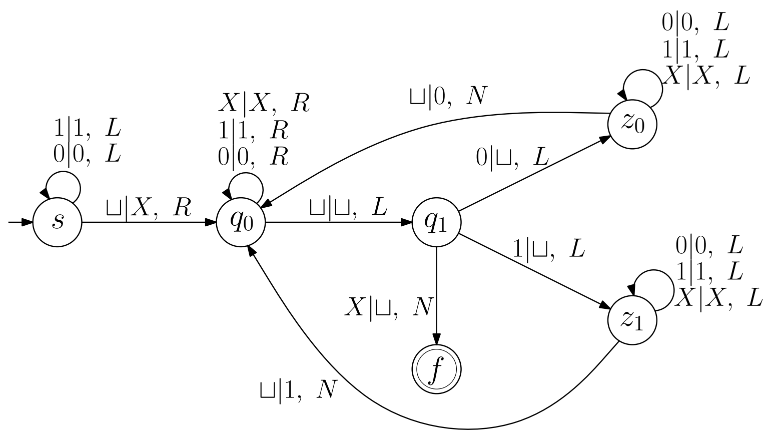
(a) Was besagt die Church'sche These?

(b) Die Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ sei entscheidbar. Ist die Sprache

$$L' = \{w \mid w \in L\} \cup \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0w \mid w \in L\} \cup \{1w \mid w \notin L\}$$

entscheidbar, semi-entscheidbar aber nicht entscheidbar oder nicht semi-entscheidbar? Begründen Sie ihre Antwort.

(c) Gegeben sei folgende Turingmaschine $\mathcal{M}$ über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ mit Startzustand s und akzeptierendem Endzustand f. Beachten Sie, dass der Lesekopf zu Beginn auf dem ersten Zeichen der Eingabe steht.



- Geben Sie die ersten neun Schritte der Verarbeitung des Wortes 01 an (durch Angabe der Konfiguration nach jedem Schritt).
- Erklären Sie kurz die Funktionsweise der Turingmaschine $\mathcal{M}$ und geben Sie an, welche Funktion $\mathcal{M}$ berechnet.

(d) Sei L die Sprache, die durch den regulären Ausdruck $0(0 \cup 1)^*1$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0,1\}$ definiert ist. Weiter sei $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ gegeben durch

$$f(w) := \begin{cases} w1 & \text{, falls } w \in L \\ w & \text{, falls } w \notin L \text{ .} \end{cases}$$

Geben Sie eine Turingmaschine an (entweder graphisch oder mittels Übergangsfunktion), die genau L akzeptiert und f realisiert.

Aufgabe 3: (2+2+2+6=12 Punkte)

(a) Begründen Sie die Gleichheit $\mathcal{P} = co - \mathcal{P}$.

(b) Sei Π ein Suchproblem, für das es einen Polynomialzeitalgorithmus gibt. Sei Π' ein beliebiges weiteres Suchproblem. Begründen Sie, warum $\Pi \propto_T \Pi'$ gilt, d.h. warum sich Π auf Π' Turing-reduzieren lässt.

(c) Gegeben sei ein polynomiales Approximationsschema (PAS) für ein Problem Π. Begründen Sie die Existenz eines polynomialen Approximationsalgorithmus mit relativer Gütegarantie 5 für Π.

(d) Problem ZEHNTELN:

- Gegeben: Eine endliche Menge M, eine Gewichtsfunktion $\widetilde{w} : M \to \mathbb{N}_0$
- Frage: Existiert eine Teilmenge $\widetilde{M} \subseteq M$, so dass $\sum_{a \in \widetilde{M}} \widetilde{w}(a) = 9 \sum_{a \in M \setminus \widetilde{M}} \widetilde{w}(a)$

Problem PARTITION:

- Gegeben: Eine endliche Menge M, eine Gewichtsfunktion $w : M \to \mathbb{N}_0$
- Frage: Existiert eine Teilmenge $M' \subseteq M$, so dass $\sum_{a \in M'} w(a) = \sum_{a \in M \setminus M'} w(a)$

Aus der Vorlesung ist bekannt: PARTITION ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Zeigen Sie, dass das Problem ZEHNTELN $\mathcal{NP}$-vollständig ist. Benutzen Sie hierzu die $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von PARTITION.

Aufgabe 4: (1+4+3+4=12 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik $G = (\Sigma, V, S, R)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ mit der Variablenmenge $V = \{S, B, E, N\}$ und der Regelmenge

$$\begin{aligned} R := \{\ S &\rightarrow 0SE \mid 1BN, \\ B &\rightarrow 1BN \mid 1N, \\ E &\rightarrow 1, \\ N &\rightarrow 0\ \}\ . \end{aligned}$$

(a) Ist die Grammatik G in Greibach-Normalform? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

(b) Geben Sie mit Hilfe des Verfahrens aus der Vorlesung einen Kellerautomaten als 7-Tupel $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ an, der genau $L(G)$ mit leerem Stack akzeptiert. Ist der Kellerautomat deterministisch? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

(c) Transformieren Sie die Grammatik G durch Anwendung eines systematischen Verfahrens in Chomsky-Normalform. Schreiben Sie die Zwischenschritte auf.

(d) Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Beweisen Sie, dass die Sprache $L = \{w \in \Sigma^* : |w|_b = 2|w|_a,\ |w|_c = 3|w|_a\}$ nicht kontextfrei ist. Dabei bezeichne $|w|_x$ die Anzahl der in w vorkommenden x für $x \in \{a, b, c\}$.

Aufgabe 5: (12 Punkte)

Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob diese wahr oder falsch sind.
Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Es wird keine negative Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe geben.

Es gibt Probleme in $\mathcal{NP}$, die in polynomieller Zeit lösbar sind.	☐ Wahr	☐ Falsch
Jedes $\mathcal{NP}$-vollständige Problem ist semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar.	☐ Wahr	☐ Falsch
Die Klasse der von deterministischen Kellerautomaten akzeptierten Sprachen ist gleich der Klasse der von nichtdeterministischen Kellerautomaten akzeptierten Sprachen.	☐ Wahr	☐ Falsch
Das Post'sche Korrespondenzproblem ist $\mathcal{NP}$-vollständig.	☐ Wahr	☐ Falsch
Der Schnitt zweier beliebiger semi-entscheidbarer Sprachen ist entscheidbar.	☐ Wahr	☐ Falsch
Das Problem 2-SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.	☐ Wahr	☐ Falsch
Ein Problem Π ist genau dann $\mathcal{NP}$-vollständig, wenn man jedes andere Problem Π' polynomiell auf Π reduzieren kann.	☐ Wahr	☐ Falsch
Es gibt eine Chomsky-0 Grammatik für die universelle Sprache.	☐ Wahr	☐ Falsch
Der Schnitt zweier beliebiger kontextfreier Sprachen ist kontextfrei.	☐ Wahr	☐ Falsch
Zu jedem NEA gibt es einen DEA mit nicht mehr Zuständen, der die gleiche Sprache akzeptiert.	☐ Wahr	☐ Falsch
Jede endliche Teilmenge der Diagonalsprache ist regulär.	☐ Wahr	☐ Falsch
Folgende Instanz des Post'schen Korrespondenzproblems besitzt keine Lösung: $\{(a, b), (b, a)\}$.	☐ Wahr	☐ Falsch