Algorithmen zur Visualisierung von Graphen

Winkelauflösung in geradlinigen Layouts

Vorlesung im Wintersemester 2010/2011

Robert Görke

21.12.2010

Konstruktion des Flussnetzwerks

- $W := V \cup \mathcal{F}$

Konstruktion des Flussnetzwerks

- $W := V \cup \mathcal{F}$
- $A := \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} : v \text{ inzident zu } f\}$

Konstruktion des Flussnetzwerks

- $W := V \cup \mathcal{F}$
- $A := \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} : v \text{ inzident zu } f\}$
- $\ell(a) = 0 \quad \forall a \in A$

Konstruktion des Flussnetzwerks

- $W := V \cup \mathcal{F}$
- $A := \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} : v \text{ inzident zu } f\}$
- $\ell(a) = 0 \quad \forall a \in A$
- $u(a) = 2\pi \quad \forall a \in A$

Konstruktion des Flussnetzwerks

- $W := V \cup \mathcal{F}$
- $A := \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} : v \text{ inzident zu } f\}$
- $\ell(a) = 0 \quad \forall a \in A$
- $u(a) = 2\pi \quad \forall a \in A$
- $b(v) = 2\pi \quad \forall v \in V$

Konstruktion des Flussnetzwerks

- $W := V \cup \mathcal{F}$
- $A := \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} : v \text{ inzident zu } f\}$
- $\ell(a) = 0 \quad \forall a \in A$
- $u(a) = 2\pi \quad \forall a \in A$
- $b(v) = 2\pi \quad \forall v \in V$
- $b(f) = \begin{cases} -(\deg(f) - 2)\pi & \text{falls} f \neq f_0 \\ -(\deg(f) + 2)\pi & \text{sonst} \end{cases}$

Konstruktion des Flussnetzwerks

- $W := V \cup \mathcal{F}$
- $A := \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} : v$ inzident zu $f\}$
- $\ell(a) = 0 \quad \forall a \in A$
- $u(a) = 2\pi \quad \forall a \in A$
- $b(v) = 2\pi \quad \forall v \in V$
- $b(f) = \begin{cases} -(\deg(f) - 2)\pi & \text{falls} f \neq f_0 \\ -(\deg(f) + 2)\pi & \text{sonst} \end{cases}$

Zuweisung von Winkelwerten liefert:

1. Knotenbed.: $\forall v \in V : \sum_{f \sim v} x(v, f) = 2\pi$
2. Facettenbed.: $\forall f \in \mathcal{F} : \sum_{v \sim f} x(v, f) = (\deg(f) \mp 2)\pi$

Konstruktion des Flussnetzwerks

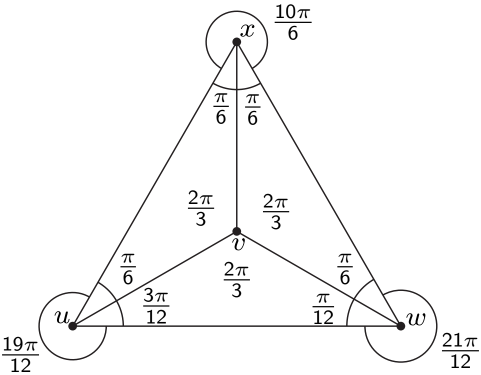
- $W := V \cup \mathcal{F}$
- $A := \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} : v \text{ inzident zu } f\}$
- $\ell(a) = 0 \quad \forall a \in A$
- $u(a) = 2\pi \quad \forall a \in A$
- $b(v) = 2\pi \quad \forall v \in V$
- $b(f) = \begin{cases} -(\deg(f) - 2)\pi & \text{falls} f \neq f_0 \\ -(\deg(f) + 2)\pi & \text{sonst} \end{cases}$

Zuweisung von Winkelwerten liefert:

1. Knotenbed.: $\forall v \in V : \sum_{f \sim v} x(v, f) = 2\pi$
2. Facettenbed.: $\forall f \in \mathcal{F} : \sum_{v \sim f} x(v, f) = (\deg(f) \mp 2)\pi$

1. und 2. erfüllt: Zuweisung *lokal konsistent*

Gegenbeispiel Lokalkonsistenz



Charakterisierung bei Dreiecksgraphen

Satz (Di Battista & Vismara '93)

Gegeben planarer Dreiecksgraph mit kombinatorischer Einbettung und Winkelzuweisung, dann gilt:
Es existiert eine geradlienige Realisierung Einbettung mit f_0 konvex

$$\Longleftrightarrow$$

1. $\sum$ Knotenwinkel $= 2\pi$
2. $\sum$ Facettenwinkel $= \pi$
3. $\forall v \not\sim f_0$: im Rad R_d^v gilt: $\prod_{i=1}^{d} \frac{\sin \alpha_i}{\sin \beta_i} = 1$
4. $\sum_{v \sim f_0} x(v, f_0) \leq \pi$

Charakterisierung bei Dreiecksgraphen

Satz (Di Battista & Vismara '93)

Gegeben planarer Dreiecksgraph mit kombinatorischer Einbettung und Winkelzuweisung, dann gilt:
Es existiert eine geradlienige Realisierung Einbettung mit f_0 konvex

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \sum \text{Knotenwinkel} = 2\pi \\ 2.\ \sum \text{Facettenwinkel} = \pi \\ 3.\ \forall v \nsim f_0\text{: im Rad } R_d^v \text{ gilt: } \prod_{i=1}^{d} \frac{\sin \alpha_i}{\sin \beta_i} = 1 \\ 4.\ \sum_{v \sim f_0} x(v, f_0) \leq \pi \end{array}\right\} \text{Konstruktion in } O(n)$$

Charakterisierung bei Dreiecksgraphen

Satz (Di Battista & Vismara '93)

Gegeben planarer Dreiecksgraph mit kombinatorischer Einbettung und Winkelzuweisung, dann gilt:
Es existiert eine geradlienige Realisierung Einbettung mit f_0 konvex

$$\Longleftrightarrow$$

1. $\sum$ Knotenwinkel $= 2\pi$
2. $\sum$ Facettenwinkel $= \pi$
3. $\forall v \not\sim f_0$: im Rad R_d^v gilt: $\prod_{i=1}^{d} \frac{\sin \alpha_i}{\sin \beta_i} = 1$
4. $\sum_{v \sim f_0} x(v, f_0) \leq \pi$

Konstruktion in $O(n)$

3. $+$ 4. nicht durch Fluss erfüllt

Untere Schranke

Satz (Malitz & Papkostas '92)

In einem triangulierten, planar eingebetteten Graph $G = (V, E)$, gibt es im zugehörigen Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x, dessen minimaler Kantenwert $x_{\text{min}} \geq \frac{\pi}{3 \cdot (\deg_{\max}(G) - 1)}$ ist, wobei $\deg_{\max}$ der maximale Grad eines Knoten in G ist.