Algorithmen zur Visualisierung von Graphen

Kombinatorische Optimierung mittels Flussmethoden

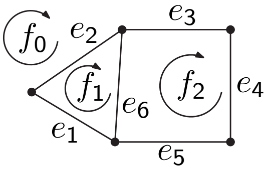
Vorlesung im Wintersemester 2010/2011

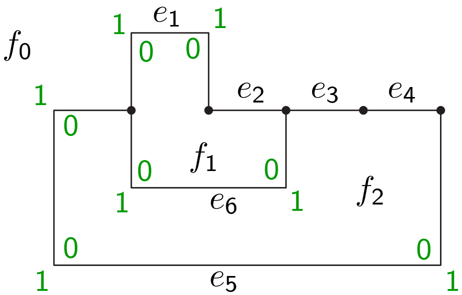
Robert Görke

24.11.2010

Beispiel: Orthogonale Beschreibung

$$H(f_0) = ((e_1, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_5, 111, \tfrac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$
$$H(f_1) = ((e_1, 00, \tfrac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$$
$$H(f_2) = ((e_5, 000, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$





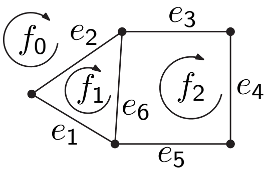
Beispiel: Orthogonale Beschreibung

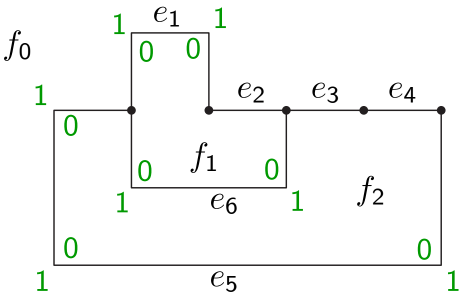
$$H(f_0) = ((e_1, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_5, 111, \tfrac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$

$$H(f_1) = ((e_1, 00, \tfrac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$$

f_0 falsch rum!?

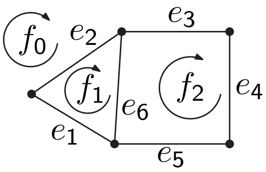
$$H(f_2) = ((e_5, 000, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$

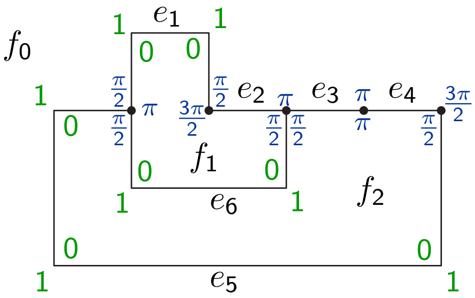




Beispiel: Orthogonale Beschreibung

$$H(f_0) = ((e_1, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_5, 111, \tfrac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$
$$H(f_1) = ((e_1, 00, \tfrac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$$
$$H(f_2) = ((e_5, 000, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$





Korrektheit einer orthogonalen Beschreibung

(H1) $H(G)$ entspricht $\mathcal{F}, f_0$

Korrektheit einer orthogonalen Beschreibung

(H1) $H(G)$ entspricht $\mathcal{F}, f_0$

(H2) für gemeinsame Randkante $\{u, v\}$ zweier Facetten f und g mit $((u, v), \delta_1, \alpha_1) \in H(f)$ und $((v, u), \delta_2, \alpha_2) \in H(g)$ gilt δ_1 ist invertierte und umgedrehte Folge δ_2

Korrektheit einer orthogonalen Beschreibung

(H1) $H(G)$ entspricht $\mathcal{F}, f_0$

(H2) für gemeinsame Randkante $\{u,v\}$ zweier Facetten f und g mit $((u,v),\delta_1,\alpha_1) \in H(f)$ und $((v,u),\delta_2,\alpha_2) \in H(g)$ gilt δ_1 ist invertierte und umgedrehte Folge δ_2

(H3) Sei $|\delta|_0$ (bzw. $|\delta|_1$) die Anzahl Nullen (bzw. Einsen) in δ und $r = (e,\delta,\alpha)$. Für $C(r) := |\delta|_0 - |\delta|_1 + 2 - 2\alpha/\pi$ gilt:
$$\sum_{r \in H(f)} C(r) = 4 \text{ für } f \neq f_0 \text{ und } \sum_{r \in H(f_0)} C(r) = -4$$

Korrektheit einer orthogonalen Beschreibung

(H1) $H(G)$ entspricht $\mathcal{F}, f_0$

(H2) für gemeinsame Randkante $\{u, v\}$ zweier Facetten f und g mit $((u, v), \delta_1, \alpha_1) \in H(f)$ und $((v, u), \delta_2, \alpha_2) \in H(g)$ gilt δ_1 ist invertierte und umgedrehte Folge δ_2

(H3) Sei $|\delta|_0$ (bzw. $|\delta|_1$) die Anzahl Nullen (bzw. Einsen) in δ und $r = (e, \delta, \alpha)$. Für $C(r) := |\delta|_0 - |\delta|_1 + 2 - 2\alpha/\pi$ gilt:
$$\sum_{r \in H(f)} C(r) = 4 \text{ für } f \neq f_0 \text{ und } \sum_{r \in H(f_0)} C(r) = -4$$

(H4) Für jeden Knoten v ist die Summe der anliegenden Winkel gleich 2π

Erinnerung: Problem

Problem 2': Orthogonale Beschreibung

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\text{deg}_{\text{max}} \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0, finde eine gültige orthogonale Beschreibung $H(G)$, die $(\mathcal{F},\ f_0)$ erhält und die Knickanzahl minimiert.

Erinnerung: Problem

Problem 2': Orthogonale Beschreibung

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\deg_{\max} \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0, finde eine gültige orthogonale Beschreibung $H(G)$, die $(\mathcal{F},\ f_0)$ erhält und die Knickanzahl minimiert.

Ansatz: Baue Flussnetzwerk!

$\gg$ Währung $= \measuredangle\ \frac{\pi}{2}$

Erinnerung: Problem

Problem 2': Orthogonale Beschreibung

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\deg_{\max} \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0, finde eine gültige orthogonale Beschreibung $H(G)$, die $(\mathcal{F}, f_0)$ erhält und die Knickanzahl minimiert.

Ansatz: Baue Flussnetzwerk!

- Währung $= \measuredangle\ \frac{\pi}{2}$
- Knoten $\xrightarrow{\measuredangle}$ Facetten ($\#\ \frac{\pi}{2}$ zur Facette)
- Facetten $\xrightarrow{\measuredangle}$ Nachbar-Facetten ($\#$ Knicke zum Nachbar)

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup \{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup$
  $\{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$
- $b(v) = 4 \quad \forall v \in V$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup$
  $\{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$
- $b(v) = 4 \quad \forall v \in V$
- $b(f) = -2(d_G(f) - 2) \quad \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\}$
- $b(f_0) = -2(d_G(f) + 2)$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup \{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$

$$\left.\begin{array}{ll} b(v) = 4 & \forall v \in V \\ b(f) = -2(d_G(f) - 2) & \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\} \\ b(f_0) = -2(d_G(f) + 2) & \end{array}\right\} \Rightarrow \sum b \stackrel{?}{=} 0$$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup \{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$

$$\left.\begin{array}{ll} b(v) = 4 & \forall v \in V \\ b(f) = -2(d_G(f) - 2) & \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\} \\ b(f_0) = -2(d_G(f) + 2) & \end{array}\right\} \Rightarrow \sum b = 0$$

(Euler)

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup$
  $\{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$
- $b(v) = 4 \quad \forall v \in V$
- $b(f) = -2(d_G(f) - 2) \quad \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\}$
- $b(f_0) = -2(d_G(f) + 2)$

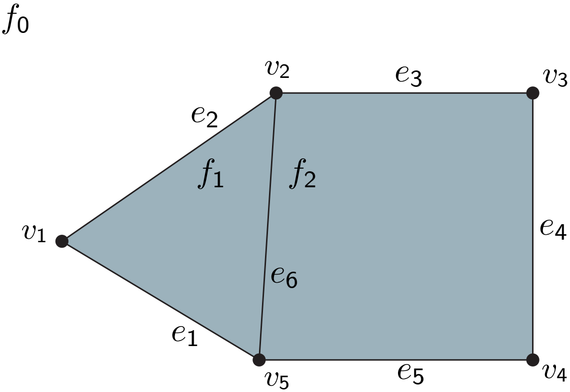
$\Rightarrow \sum b = 0$ (Euler)

$$\forall (f, g) \in A, f, g \in \mathcal{F} \qquad l(f, g) := 0 \leq X(f, g) \leq \infty =: u(f, g)$$

$$\forall (v, f) \in A, v \in V, f \in \mathcal{F} \qquad l(v, f) := 1 \leq X(v, f) \leq 4 =: u(v, f)$$

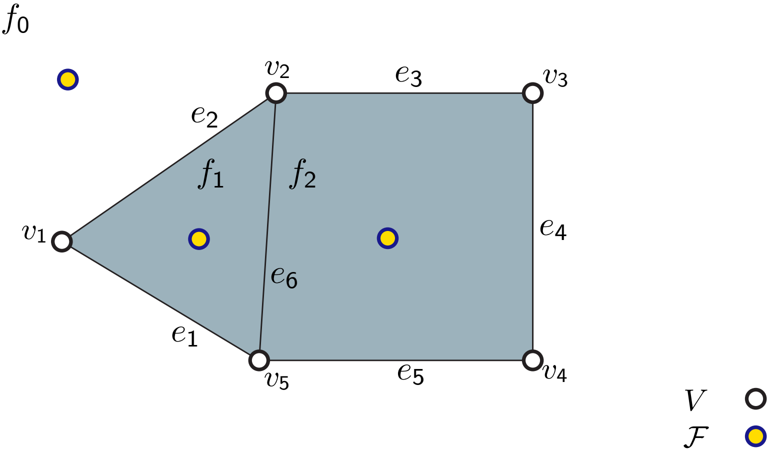
$$\forall i \in V \qquad \sum_{(i,j) \in A} X(i, j) - \sum_{(j,i) \in A} X(j, i) = b(i)$$

Beispiel Flussnetzwerk

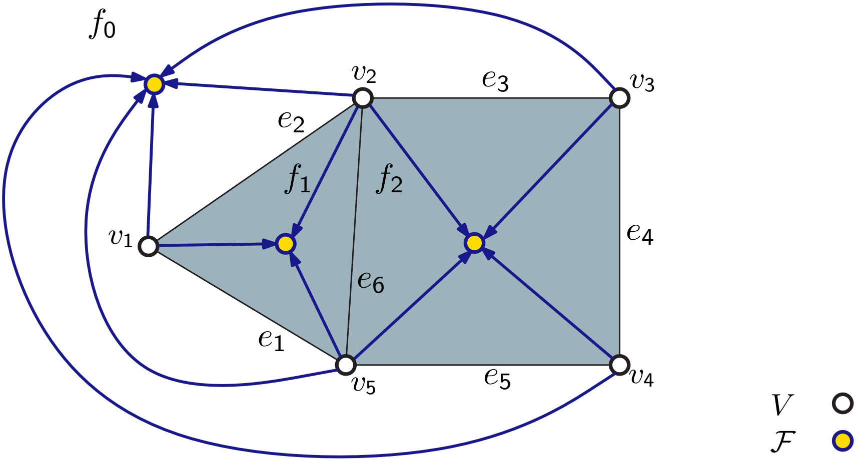


Beispiel Flussnetzwerk

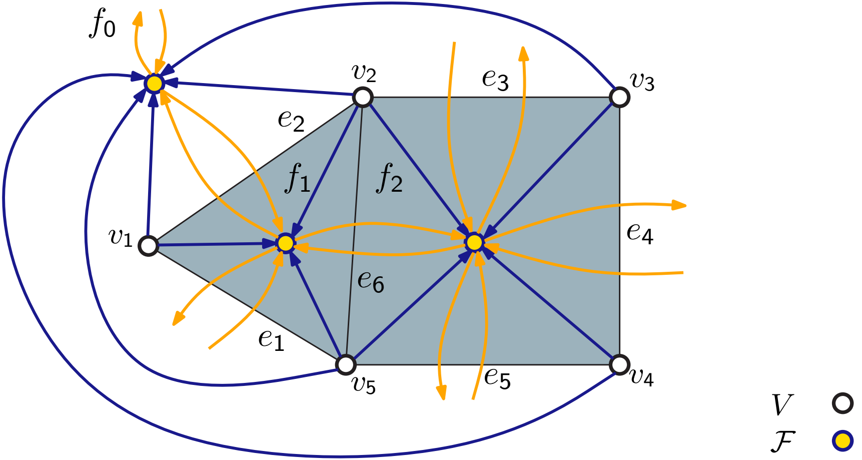
Karlsruher Institut für Technologie



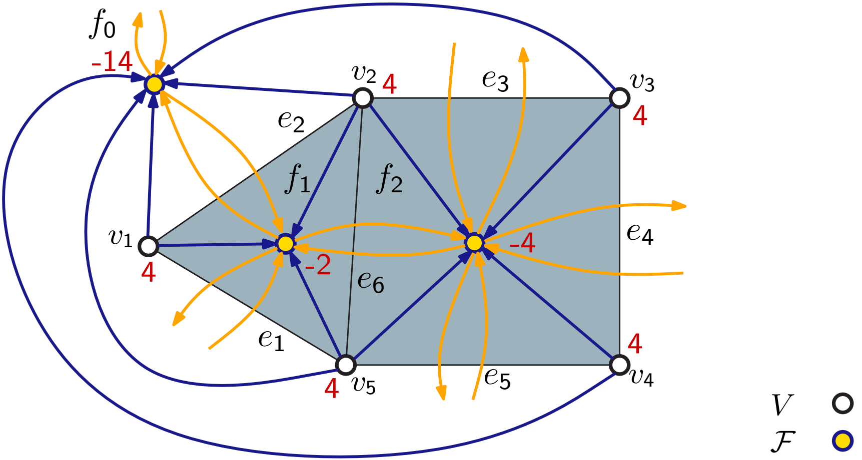
Beispiel Flussnetzwerk



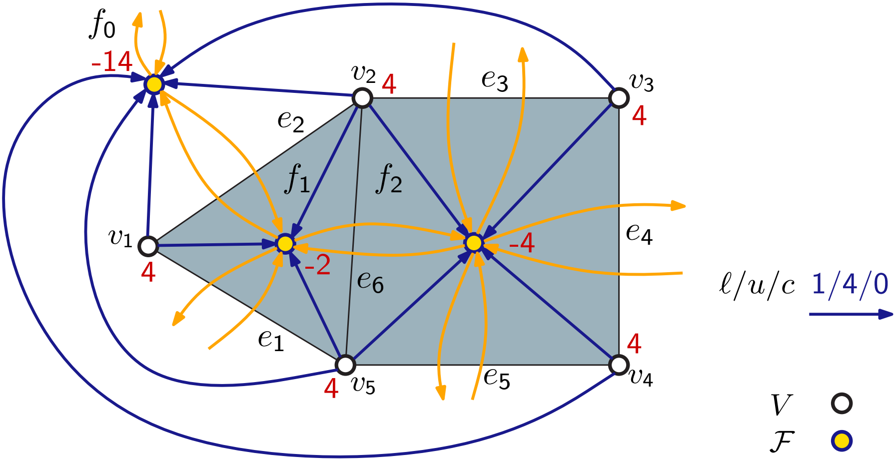
Beispiel Flussnetzwerk



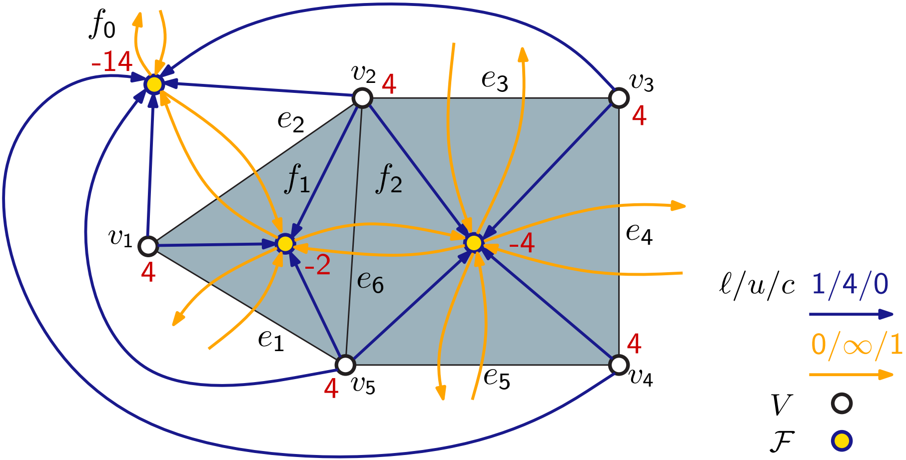
Beispiel Flussnetzwerk



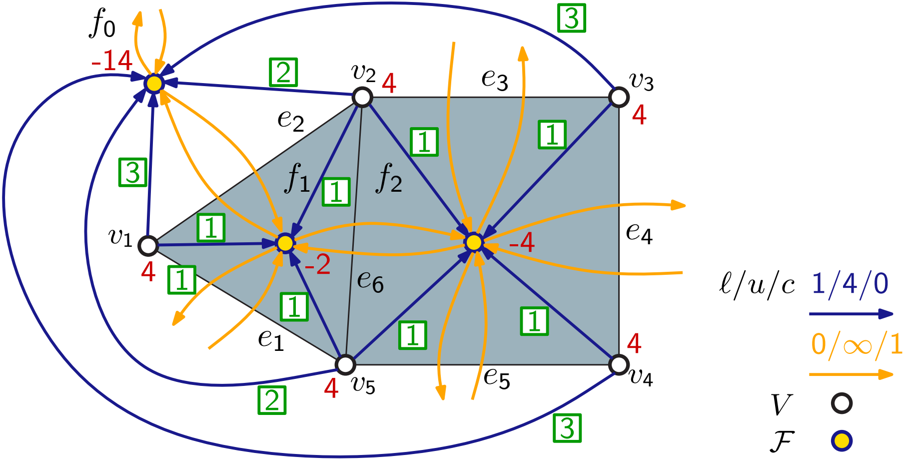
Beispiel Flussnetzwerk



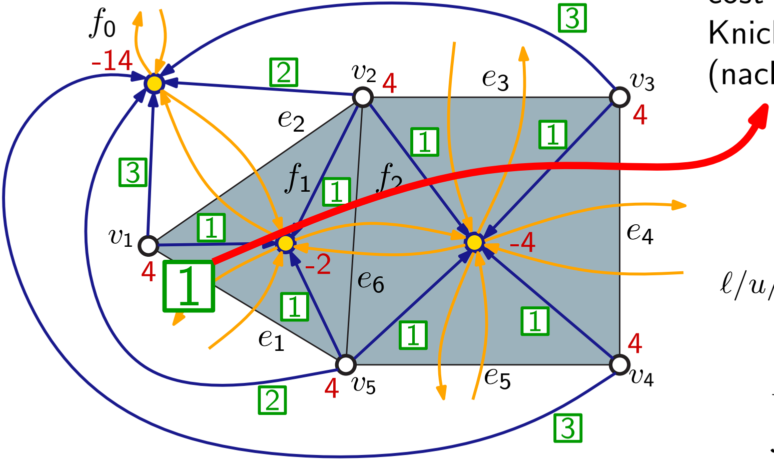
Beispiel Flussnetzwerk



Beispiel Flussnetzwerk



Beispiel Flussnetzwerk



cost $=1$
Knick!
(nach außen)

$\ell/u/c$ $1/4/0$

$0/\infty/1$

V

$\mathcal{F}$

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Leftarrow$: Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k
Ges.: orthogonale Beschreibung

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Leftarrow$: Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k
Ges.: orthogonale Beschreibung

(H4) Summe Winkel an Knoten 2π $\surd$

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Leftarrow$: Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k
Ges.: orthogonale Beschreibung

(H2) Kantenbeschr. von anderer Seite invertiert + umgedreht $\surd$

(H4) Summe Winkel an Knoten 2π $\surd$

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Leftarrow$: Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k
Ges.: orthogonale Beschreibung

(H1) H(G) entspricht $\mathcal{F}, f_0$ $\surd$

(H2) Kantenbeschr. von anderer Seite invertiert + umgedreht $\surd$

(H4) Summe Winkel an Knoten 2π $\surd$

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Leftarrow$: Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k
Ges.: orthogonale Beschreibung

(H1) H(G) entspricht $\mathcal{F}, f_0$ $\surd$

(H2) Kantenbeschr. von anderer Seite invertiert + umgedreht $\surd$

(H3) Winkelsumme an f: $b(f)$ ohne gestreckte Winkel $= 4$ $\surd$

(H4) Summe Winkel an Knoten 2π $\surd$

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k

(N1) $x(v, f) = 1/2/3/4$,

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k

(N1) $x(v, f) = 1/2/3/4$,

(N2) $x(f, g) := |\delta_{(f,g)}|_0$, $(e, \delta_{(f,g)}, x)$ Beschr. v. $e \stackrel{*}{=} (f, g)$ für f

Kernaussage + Korrektheit

Karlsruher Institut für Technologie

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k

(N1) $x(v, f) = 1/2/3/4$,

(N2) $x(f, g) := |\delta_{(f,g)}|_0$, $(e, \delta_{(f,g)}, x)$ Beschr. v. $e \overset{*}{=} (f, g)$ für f

(N3) Kapazitäten $\surd$, Flusserhaltung

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k

(N1) $x(v, f) = 1/2/3/4$,

(N2) $x(f, g) := |\delta_{(f,g)}|_0$, $(e, \delta_{(f,g)}, x)$ Beschr. v. $e \stackrel{*}{=} (f, g)$ für f

(N3) Kapazitäten $\surd$, Flusserhaltung $\surd$

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung

Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k

(N1) $x(v, f) = 1/2/3/4$,

(N2) $x(f, g) := |\delta_{(f,g)}|_0$, $(e, \delta_{(f,g)}, x)$ Beschr. v. $e \stackrel{*}{=} (f, g)$ für f

(N3) Kapazitäten $\surd$, Flusserhaltung $\surd$

(N4) Kosten $= k$ $\surd$

Kompaktierung

Problem: Kompaktes Layout zu orthogonaler Beschreibung

Gegeben ein planerer Graph $G = (V, E)$ mit $\text{deg}_{\text{max}} \leq 4$ und eine orthogonale Beschreibung $H(G)$. Finde ein orthogonales Layout von G, das $H(G)$ realisiert.

Kompaktierung

Problem: Kompaktes Layout zu orthogonaler Beschreibung

Gegeben ein planerer Graph $G = (V, E)$ mit $\mathsf{deg}_{\mathsf{max}} \leq 4$ und eine orthogonale Beschreibung $H(G)$. Finde ein orthogonales Layout von G, das $H(G)$ realisiert.

Spezialfall: alle Facetten sind Rechtecke

$\Rightarrow$: erlaubt Garantien:
- $\gg$ minimale Gesamtkantenlänge
- $\gg$ minimale Fläche

Kompaktierung

Problem: Kompaktes Layout zu orthogonaler Beschreibung

Gegeben ein planerer Graph $G = (V, E)$ mit $\text{deg}_{\text{max}} \leq 4$ und eine orthogonale Beschreibung $H(G)$. Finde ein orthogonales Layout von G, das $H(G)$ realisiert.

Spezialfall: alle Facetten sind Rechtecke

$\Rightarrow$: erlaubt Garantien:
- minimale Gesamtkantenlänge
- minimale Fläche

- Knicke sind außen
- gegenüberliegende Seiten gleich lang $\Rightarrow$ Layout ok

Flussnetzwerk Längenzuweisung

Definition Flussnetzwerk $N_{\text{hor}} = ((W_{\text{hor}}, A_{\text{hor}}); l; u; b; \text{cost})$

- $W_{\text{hor}} = \mathcal{F}$
- $A_{\text{hor}} = \{(f, g) \mid f, g$ besitzen gemeinsames horizontales Kantensegment und f liegt unterhalb von $g\}$
- $l(a) = 1 \quad \forall a \in A_{\text{hor}}$
- $u(a) = \infty \quad \forall a \in A_{\text{hor}}$
- $\text{cost}(a) = 1 \quad \forall a \in A_{\text{hor}}$
- $b(f) = 0 \quad \forall f \in W_{\text{hor}}$

Flussnetzwerk Längenzuweisung

Definition Flussnetzwerk $N_{\text{vert}} = ((W_{\text{vert}}, A_{\text{vert}}); l; u; b; \text{cost})$

- $W_{\text{vert}} = \mathcal{F}$
- $A_{\text{vert}} = \{(f, g) \mid f, g$ besitzen gemeinsames vertikales Kantensegment und f liegt links von $g\}$
- $l(a) = 1 \quad \forall a \in A_{\text{vert}}$
- $u(a) = \infty \quad \forall a \in A_{\text{vert}}$
- $\text{cost}(a) = 1 \quad \forall a \in A_{\text{vert}}$
- $b(f) = 0 \quad \forall f \in W_{\text{vert}}$

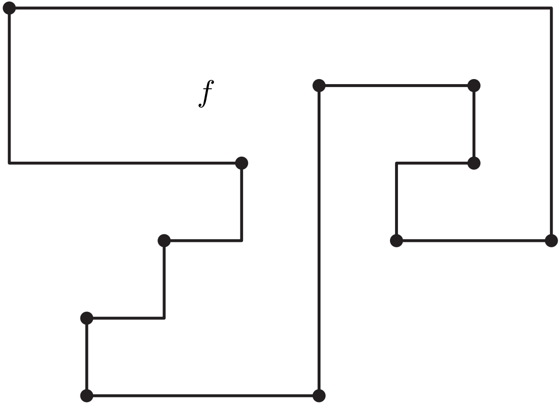
Optimal bei Rechtecken

Satz:

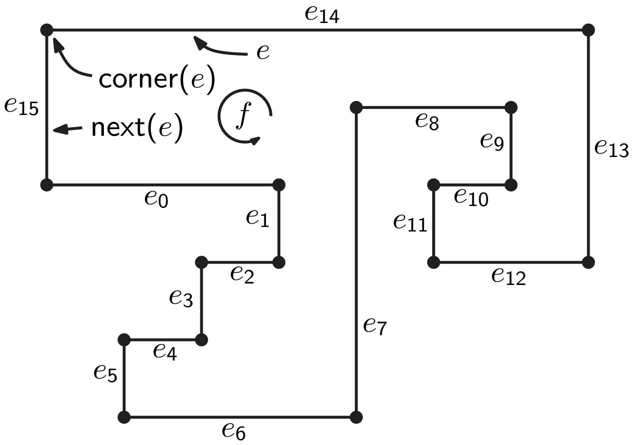
Lösung für Min-Cost Flüsse für N_{hor} und N_{ver} liefert:

1. x Fluss $\Leftrightarrow$ entspr. Kantenlängen induzieren Layout
2. $|x(N_{\text{hor}})|$ =Höhe, $|x(N_{\text{ver}})|$ =Breite
3. $\text{cost}(x(N_{\text{hor}})) + \text{cost}(x(N_{\text{ver}})) =$ Gesamtkantenlänge

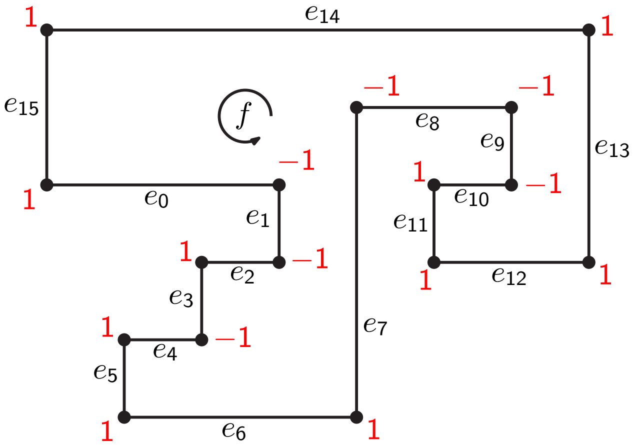
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



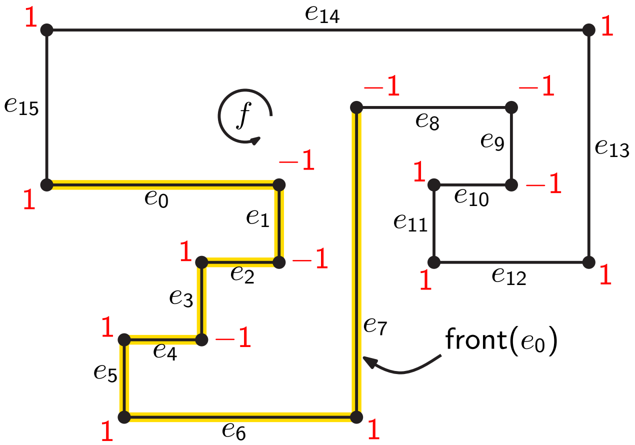
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



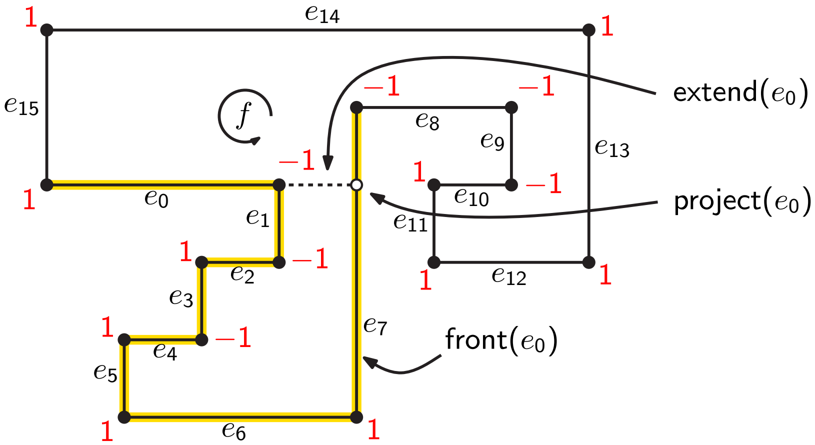
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



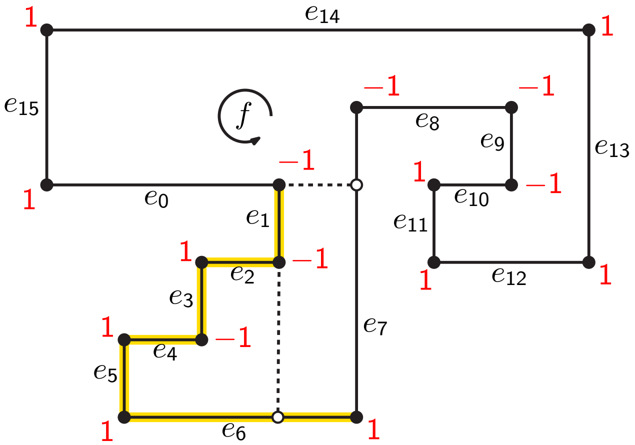
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



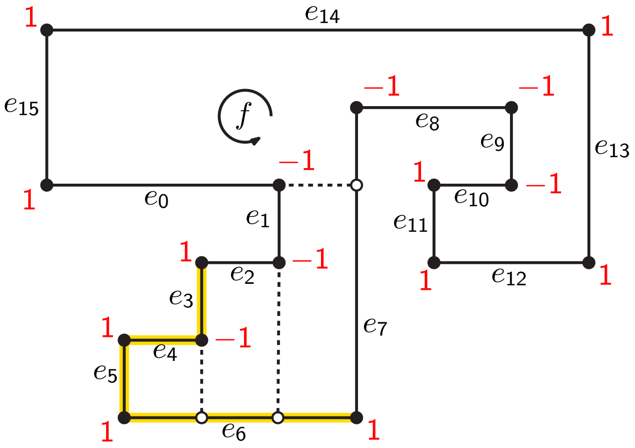
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



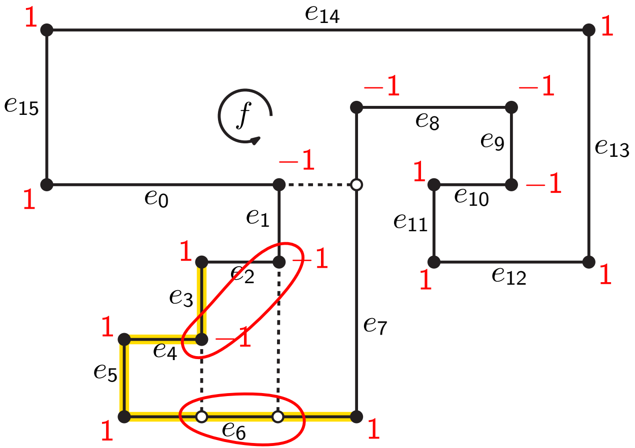
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



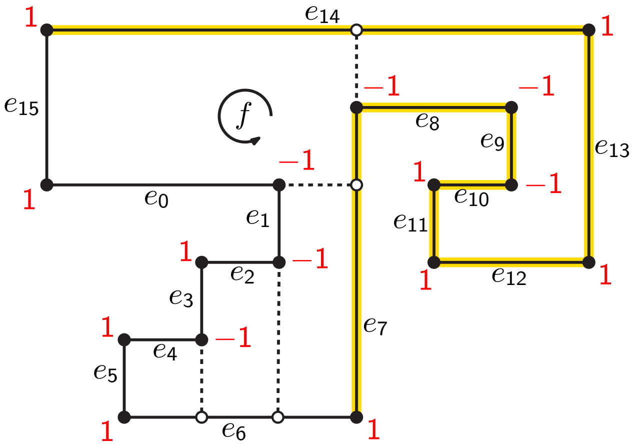
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



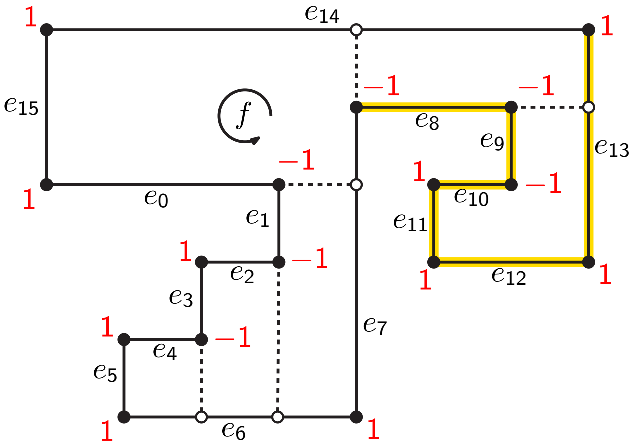
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



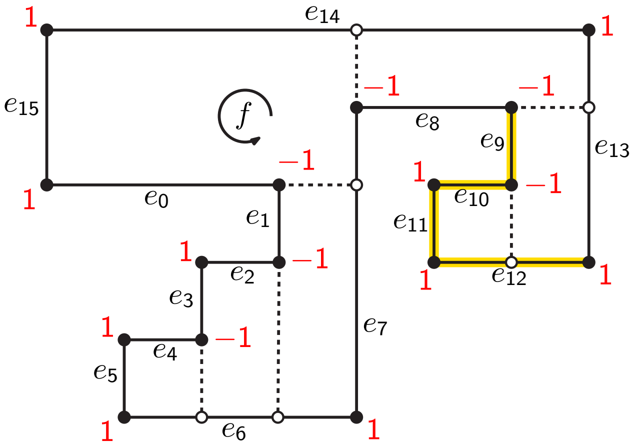
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



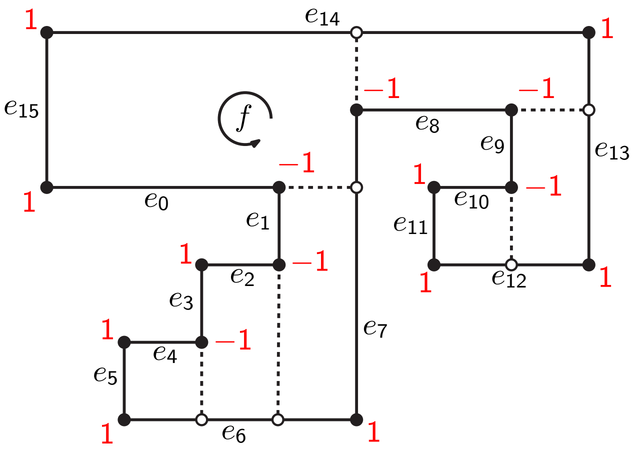
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



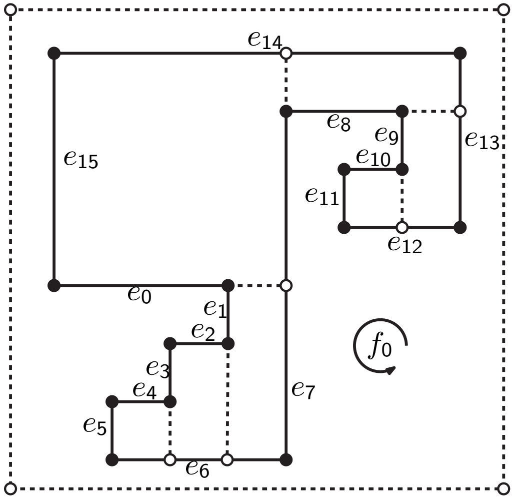
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



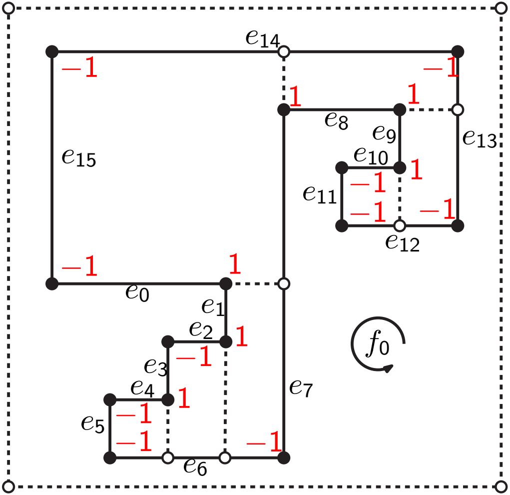
Verfeinerung von (G, H) – innere Facette



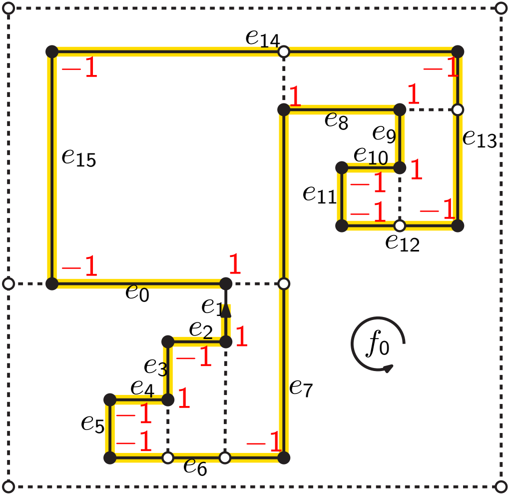
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



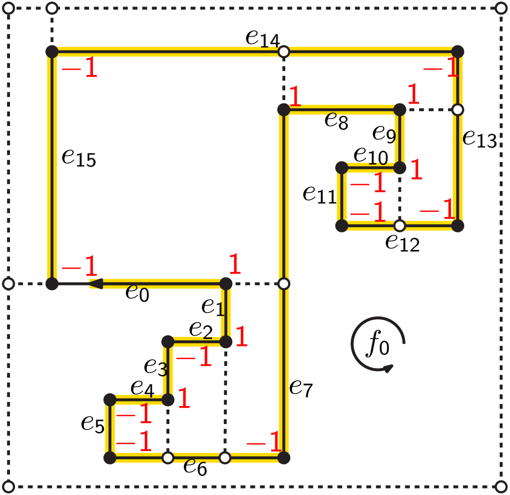
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



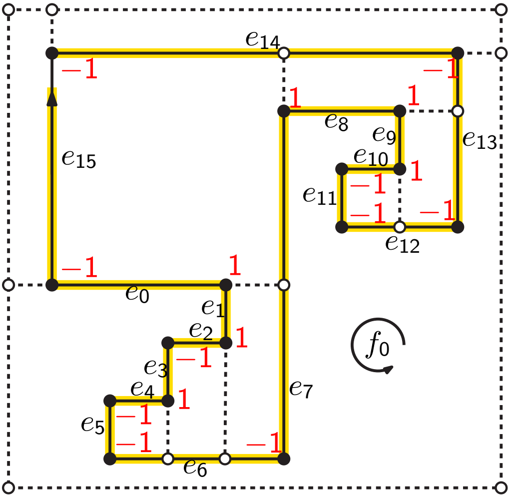
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



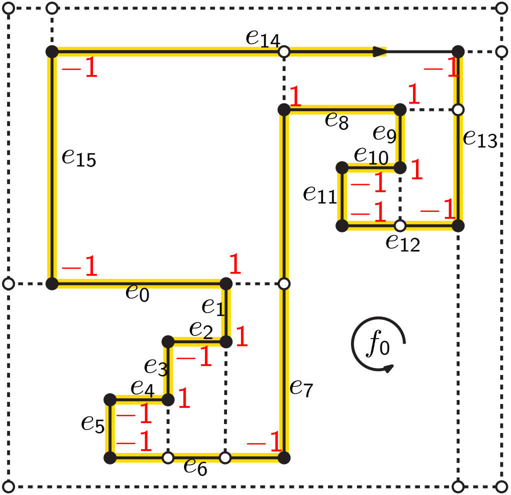
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



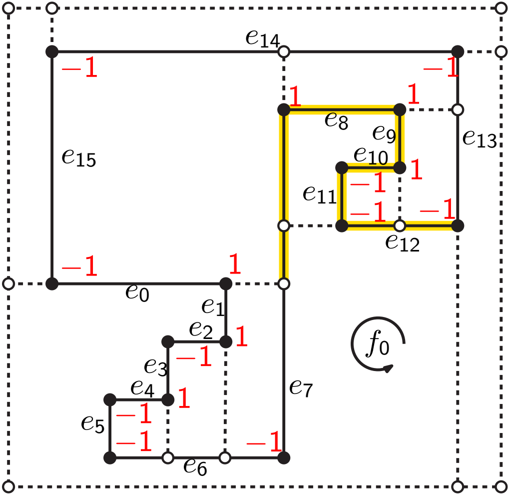
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



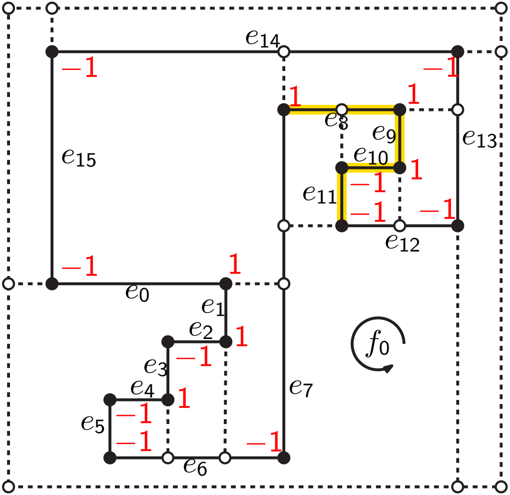
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



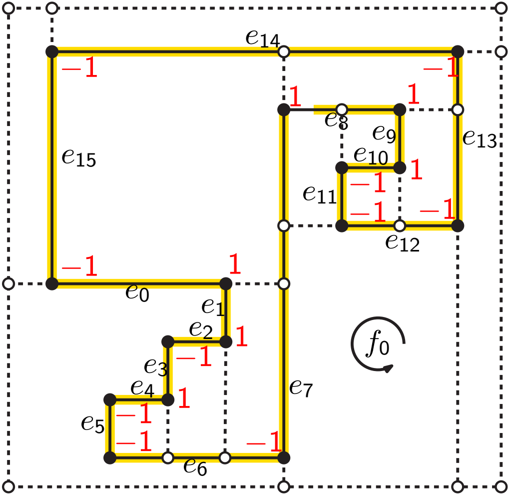
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



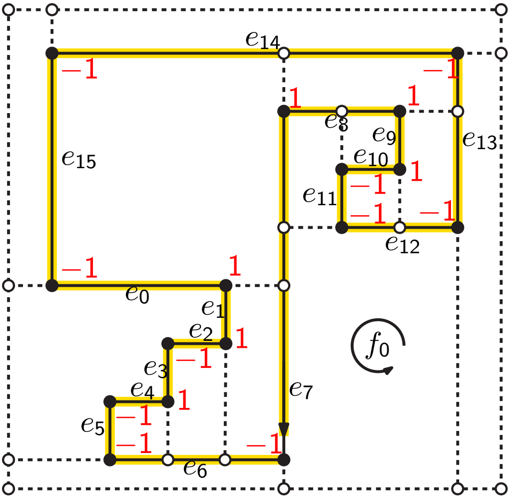
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



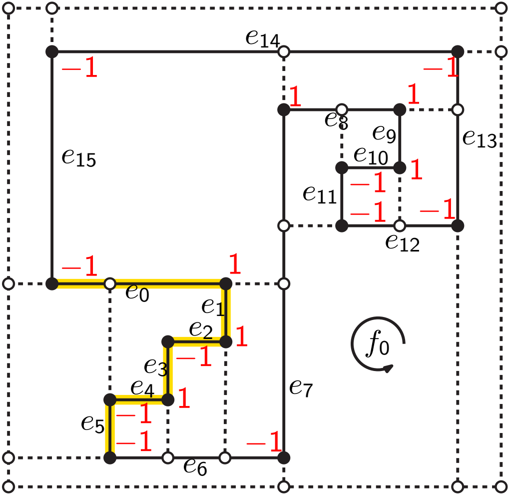
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



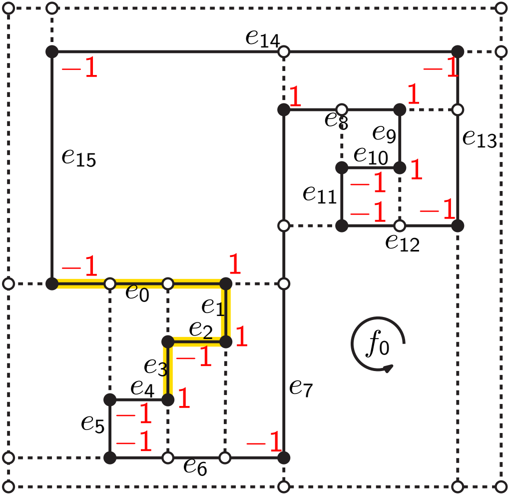
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



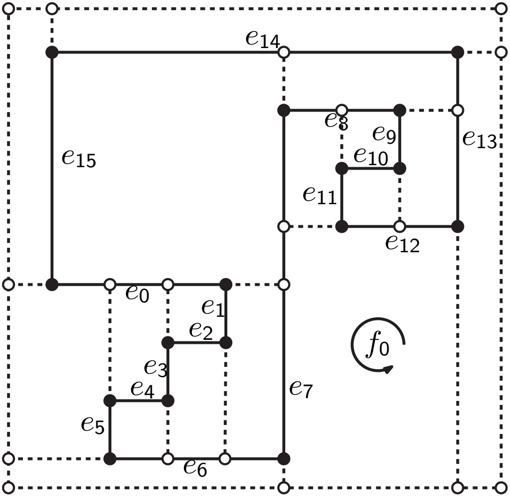
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



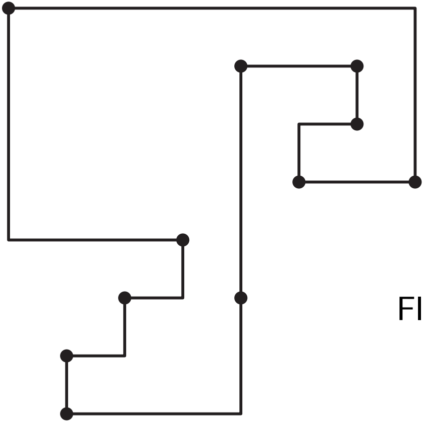
Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette

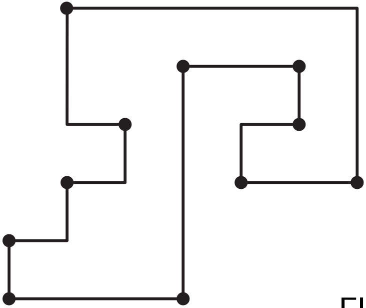


Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



Flächenminimal?

Verfeinerung von (G, H) – äußere Facette



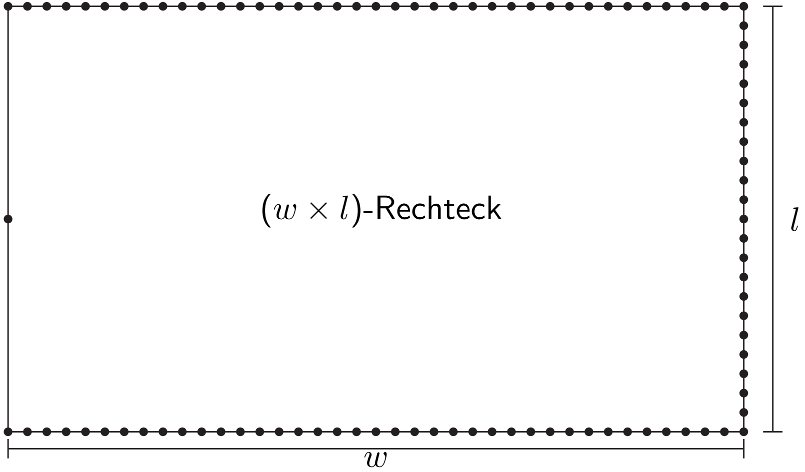
Flächenminimal?

Nein!

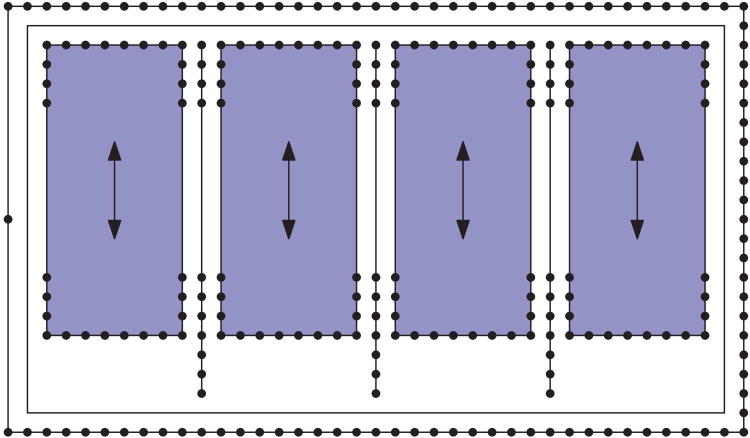
Kompaktierung ist NP-schwer [Patrignani ’01]

- Grobstruktur von (G, H)
  - Begrenzung
  - Gürtel
  - Klauselgadgets
  - Variablengadgets
- bestimme geeigneten Wert K
- (G, H) lässt sich in Fläche K zeichnen gdw. Φ erfüllbar

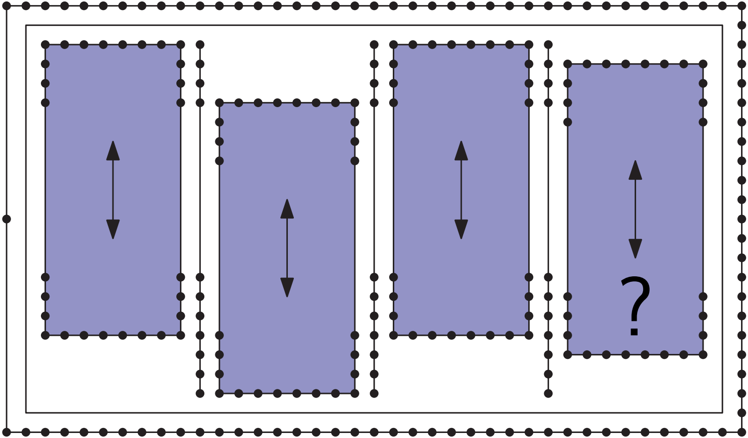
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



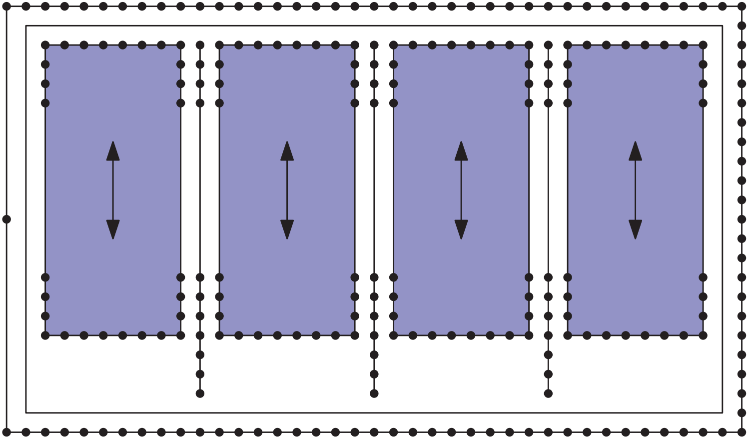
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



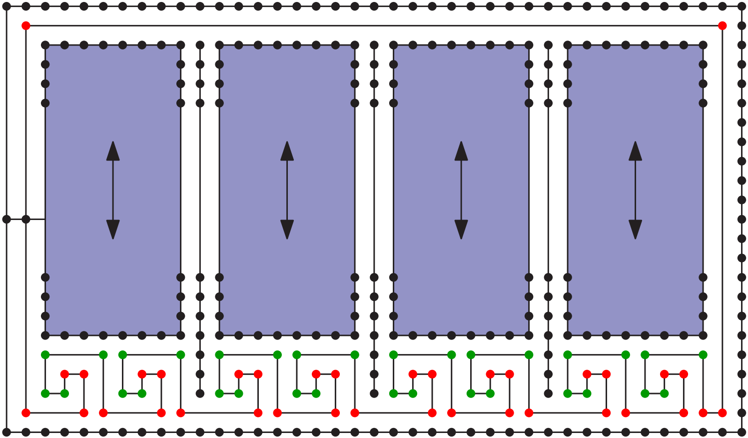
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



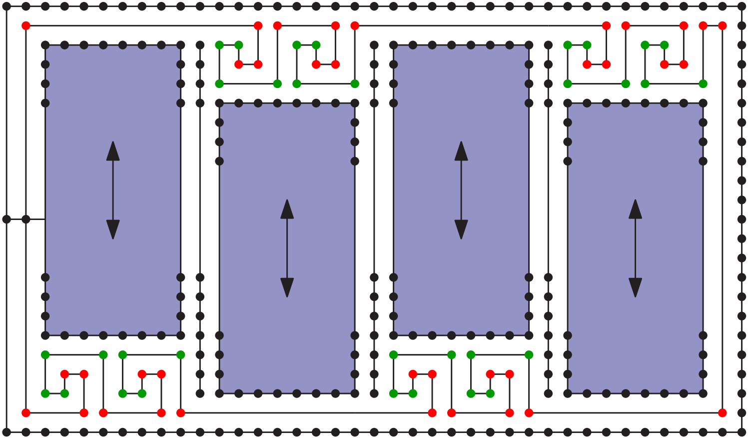
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



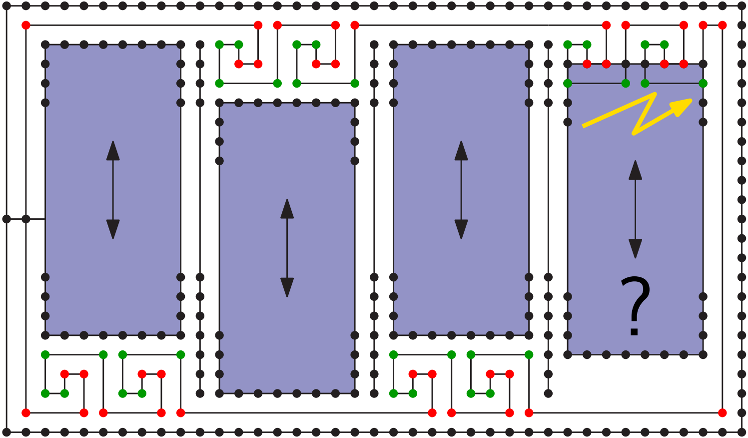
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



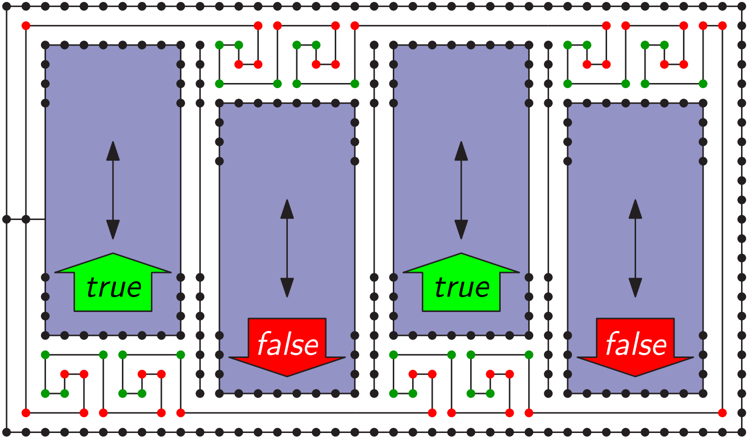
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



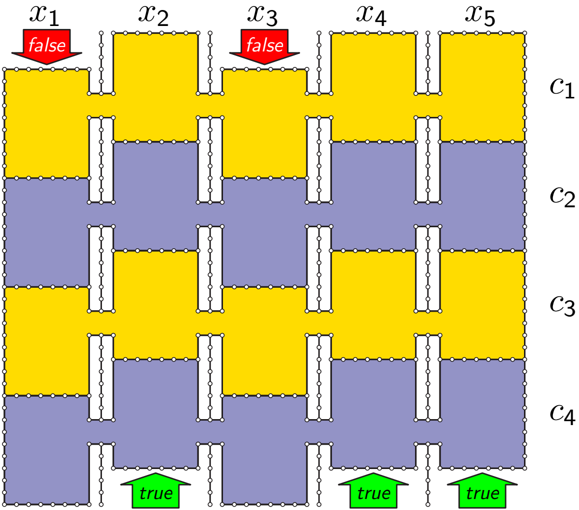
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



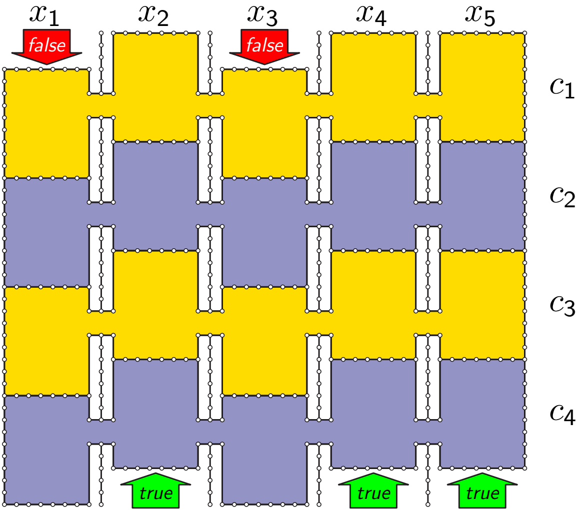
Begrenzung, Gürtel, Kolbengadget



Klauselgadgets

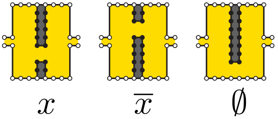


Klauselgadgets

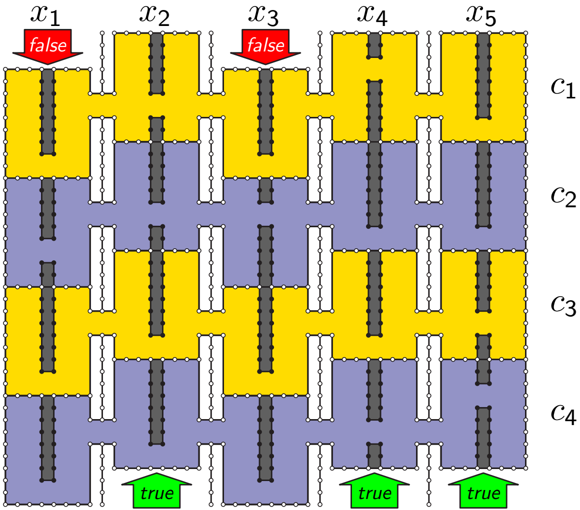


Beispiel:

$$c_1 = x_2 \vee \overline{x_4}$$
$$c_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$$
$$c_3 = x_5$$
$$c_4 = x_4 \vee \overline{x_5}$$



Klauselgadgets



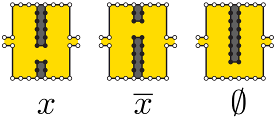
Beispiel:

$c_1 = x_2 \vee \overline{x_4}$

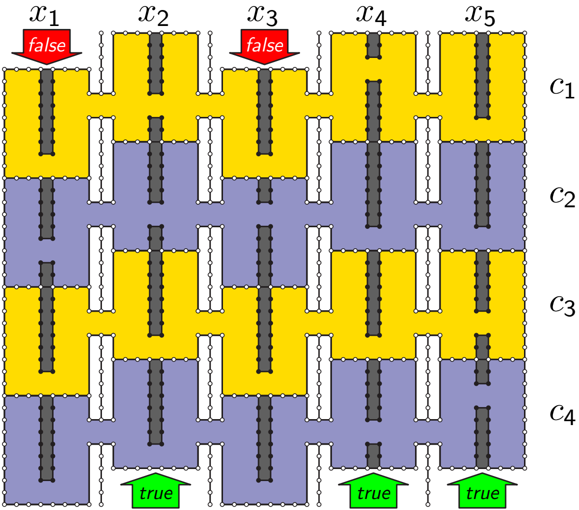
$c_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$

$c_3 = x_5$

$c_4 = x_4 \vee \overline{x_5}$



Klauselgadgets



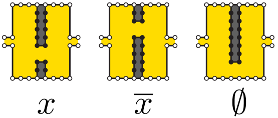
Beispiel:

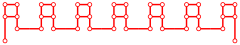
$c_1 = x_2 \vee \overline{x_4}$

$c_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$

$c_3 = x_5$

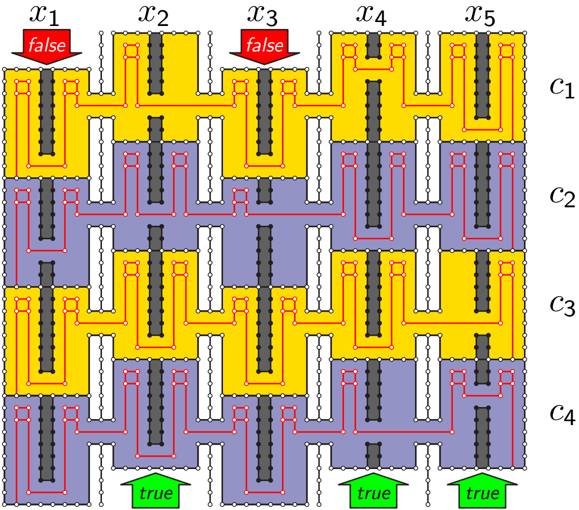
$c_4 = x_4 \vee \overline{x_5}$





lege $(2n-1)$-A-Kette durch jede Klausel

Klauselgadgets



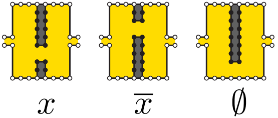
Beispiel:

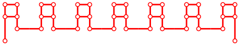
$c_1 = x_2 \vee \overline{x_4}$

$c_2 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$

$c_3 = x_5$

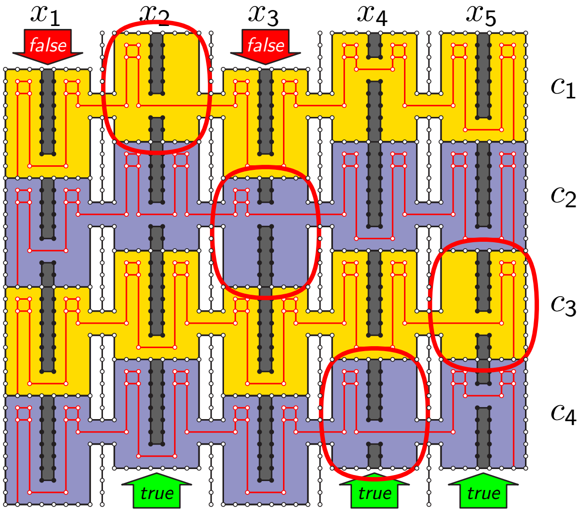
$c_4 = x_4 \vee \overline{x_5}$





lege $(2n-1)$-A-Kette durch jede Klausel

Klauselgadgets



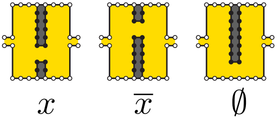
Beispiel:

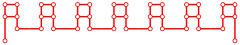
$c_1 = x_2 \lor \overline{x_4}$

$c_2 = x_1 \lor x_2 \lor \overline{x_3}$

$c_3 = x_5$

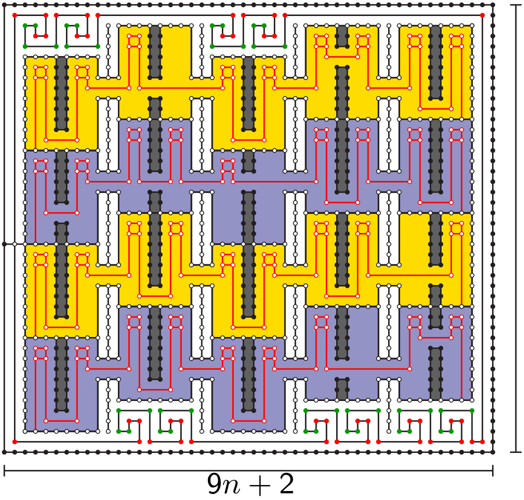
$c_4 = x_4 \lor \overline{x_5}$





lege $(2n-1)$-A-Kette durch jede Klausel

Komplette Reduktion



Setze

$K = (9n+2) \cdot (9m+7)$

Es gilt:

(G, H) auf Fläche K zeichenbar

$\Leftrightarrow$

Φ erfüllbar

Aufwärtsplanare Zeichnungen