Algorithmen zur Visualisierung von Graphen

Kombinatorische Optimierung mittels Flussmethoden

Vorlesung im Wintersemester 2010/2011

Robert Görke

17.11.2010

Nachtrag zu Vergröberungen

Vergröberung und Levelzahl

MIS-Vergröberung
(maximum independent set)

- *inklusions*-max. I.S., anstatt *maximum*
- O(m+n)
- I.S. behalten
- kleines I.S.
  $\Rightarrow$ noch weniger Level
  (nicht so schlimm)

Vergröberung und Levelzahl

MIS-Vergröberung
(maximum independent set)

- *inklusions*-max. I.S., anstatt *maximum*
- O(m+n)
- I.S. behalten
- kleines I.S.
  $\Rightarrow$ noch weniger Level
  (nicht so schlimm)

Matching-Vergröberung
(maximum matching)

- *inklusions*-max. M., anstatt *maximum*
- O(m+n)
- Matching kontrahieren
- kleines Matching
  $\Rightarrow$ wenig Reduktion
  $\Rightarrow$ viele Level

Vergröberung und Levelzahl

Karlsruher Institut für Technologie

MIS-Vergröberung
(maximum independent set)

- *inklusions*-max. I.S., anstatt *maximum*
- O(m+n)
- I.S. behalten
- kleines I.S.
  $\Rightarrow$ noch weniger Level (nicht so schlimm)

Matching-Vergröberung
(maximum matching)

- *inklusions*-max. M., anstatt *maximum*
- O(m+n)
- Matching kontrahieren
- kleines Matching
  $\Rightarrow$ wenig Reduktion
  $\Rightarrow$ viele Level
- aber (good news): inklusions-max. ist 2-Approx.

Vergröberung und Levelzahl

MIS-Vergröberung
(maximum independent set)

- *inklusions*-max. I.S., anstatt *maximum*
- O(m+n)
- I.S. behalten
- kleines I.S.
  $\Rightarrow$ noch weniger Level (nicht so schlimm)

(Sterngraph immer noch doof) $\rightarrow$

Matching-Vergröberung
(maximum matching)

- *inklusions*-max. M., anstatt *maximum*
- O(m+n)
- Matching kontrahieren
- kleines Matching
  $\Rightarrow$ wenig Reduktion
  $\Rightarrow$ viele Level
- aber (good news): inklusions-max. ist 2-Approx.

Letzte Kleinigkeiten zu
3. Globale und Lokale Optimierung

Spektrallayouts

L symmetrisch, regulär $\Rightarrow$ EW reell und

Spektrallayouts

L symmetrisch, regulär $\Rightarrow$ EW reell und

$$0 = \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq 2 \cdot \max_{v \in V} \deg(v)$$

(G zsh. $\Rightarrow \lambda_2 > 0$)

Eigenpaare $(\lambda_1, v_1), \ldots, (\lambda_n, v_n)$:

- kann $v_1, \ldots, v_n$ orthogonal wählen
- falls orthogonal, dann

$$\lambda_i = \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \perp \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_{i-1})}} \frac{x^T L(G) x}{x^T x} .$$

(Rayleigh-Ritz Theorem)

Spektrallayouts - 2

Def.: Laplace'sches Spektrallayout zu G, gegeben L, orthogonale, sortierte Eigenpaare $(\lambda_1, v_1), \ldots, (\lambda_n, v_n)$:

$$\vec{x} := v_2 \quad \text{und} \quad \vec{x} := v_3$$

Spektrallayouts - 2

Def.: Laplace'sches Spektrallayout zu G, gegeben L, orthogonale, sortierte Eigenpaare $(\lambda_1, v_1), \ldots, (\lambda_n, v_n)$:

$$\vec{x} := v_2 \quad \text{und} \quad \vec{x} := v_3$$

$\gg$ elegant, analytisch, nicht auf Layouts beschränkt

Spektrallayouts - 2

Def.: Laplace'sches Spektrallayout zu G, gegeben L, orthogonale, sortierte Eigenpaare $(\lambda_1, v_1), \ldots, (\lambda_n, v_n)$:

$$\vec{x} := v_2 \quad \text{und} \quad \vec{x} := v_3$$

- $\gg$ elegant, analytisch, nicht auf Layouts beschränkt
- $\gg$ ... restlichen Dim., i.e., Eigenvektoren, auch nutzbar

animation

Spektrallayouts - 2

Def.: Laplace'sches Spektrallayout zu G, gegeben L, orthogonale, sortierte Eigenpaare $(\lambda_1, v_1), \ldots, (\lambda_n, v_n)$:

$$\vec{x} := v_2 \quad \text{und} \quad \vec{x} := v_3$$

- ≫ elegant, analytisch, nicht auf Layouts beschränkt
- ≫ ... restlichen Dim., i.e., Eigenvektoren, auch nutzbar

animation

- ≫ langsam $\sim O(n^3)$ time, $O(n^2)$ space

Spektrallayouts - 2

Def.: Laplace'sches Spektrallayout zu G, gegeben L, orthogonale, sortierte Eigenpaare $(\lambda_1, v_1), \ldots, (\lambda_n, v_n)$:

$$\vec{x} := v_2 \quad \text{und} \quad \vec{x} := v_3$$

- elegant, analytisch, nicht auf Layouts beschränkt
- . . . restlichen Dim., i.e., Eigenvektoren, auch nutzbar

  animation

- langsam $\sim O(n^3)$ time, $O(n^2)$ space
- Praxis: Power-Iteration, Speicher linear in dünner Matrix
  hier: für v_n
  - starte mit Zufallsvektor v
  - wiederhole: $v \leftarrow \frac{Lv}{||Lv||}$

Multidimensionale Skalierung (MDS)

Idee (MDS): Bette Objekte in $\mathbb{R}$ ein so dass
$||x_a - x_b|| \approx \mathrm{dist}(x_a, x_b)$

Multidimensionale Skalierung (MDS)

Idee (MDS): Bette Objekte in $\mathbb{R}$ ein so dass
$||x_a - x_b|| \approx \mathrm{dist}(x_a, x_b)$

- paarweise Information
- oft genutzt: min $\sum_{i,j}(||x_i - x_j|| - \mathrm{dist}(x_i, x_j))^2$

Multidimensionale Skalierung (MDS)

Idee (MDS): Bette Objekte in $\mathbb{R}$ ein so dass
$||x_a - x_b|| \approx \text{dist}(x_a, x_b)$

- paarweise Information
- oft genutzt: $\min \sum_{i,j} (||x_i - x_j|| - \text{dist}(x_i, x_j))^2$

Bei Graphen: Energie einer gespannten Feder:
$\frac{1}{2} c(||p_u - p_v|| - \ell)^2$

- Ideallänge ℓ
- paarweise Information?

  $\Rightarrow$ kürzeste Weglänge $\text{dist}_G(u, v) \overset{!}{\approx} ||p_u - p_v||$

Multidimensionale Skalierung (MDS)

Idee (MDS): Bette Objekte in $\mathbb{R}$ ein so dass
$||x_a - x_b|| \approx \mathrm{dist}(x_a, x_b)$

- paarweise Information
- oft genutzt: min $\sum_{i,j}(||x_i - x_j|| - \mathrm{dist}(x_i, x_j))^2$

Bei Graphen: Energie einer gespannten Feder:
$\frac{1}{2}c(||p_u - p_v|| - \ell)^2$

- Ideallänge ℓ
- paarweise Information?

  $\Rightarrow$ kürzeste Weglänge $\mathrm{dist}_G(u, v) \overset{!}{\approx} ||p_u - p_v||$

Potential $\rightsquigarrow$ nichtlineares G.S. $\rightsquigarrow$ Gradientverfahren

Globale Zielfunktionen und Simulated Annealing

Globale Zielfunktion = Konglomerat einfacher Kriterien

Globale Zielfunktionen und Simulated Annealing

Globale Zielfunktion = Konglomerat einfacher Kriterien

"Simulated Annealing":

- allgemeines Lösungsverfahren für Optimierungsprobleme
- motiviert aus Thermodynamik, simuliert Abkühlung

Globale Zielfunktionen und Simulated Annealing

Globale Zielfunktion = Konglomerat einfacher Kriterien

"Simulated Annealing":
- ≫ allgemeines Lösungsverfahren für Optimierungsprobleme
- ≫ motiviert aus Thermodynamik, simuliert Abkühlung

Grobe Vorgehensweise:
- ≫ Markov-Kette durch Zustandsraum
- ≫ Wahrscheinlichkeiten für Übergänge
- ≫ Übergänge zu schlechteren Zuständen erlaubt
- ≫ später (=kühler) immer unwahrscheinlicher

Globale Zielfunktionen und Simulated Annealing

Globale Zielfunktion = Konglomerat einfacher Kriterien

"Simulated Annealing":

- ≫ allgemeines Lösungsverfahren für Optimierungsprobleme
- ≫ motiviert aus Thermodynamik, simuliert Abkühlung

Grobe Vorgehensweise:

- ≫ Markov-Kette durch Zustandsraum
- ≫ Wahrscheinlichkeiten für Übergänge
- ≫ Übergänge zu schlechteren Zuständen erlaubt
- ≫ später (=kühler) immer unwahrscheinlicher

Für Graphenzeichnen: Davidson and Harel [1996]

(Diverse Potential siehe Skript)

Kombinatorische Optimierung mittels Flussmethoden

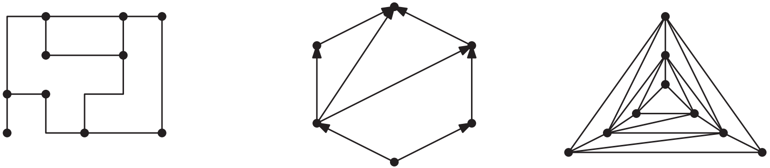
(Kapitel 4)

Inhalt Kapitel 4

Layoutprobleme für *planare* Graphen

- orthogonale Layouts
- aufwärtsgerichtete Layouts für gerichtete azyklische Graphen
- Winkelauflösung in geradlinigen Layouts

→ Modellierung der Probleme durch Flussnetzwerke



Planarität

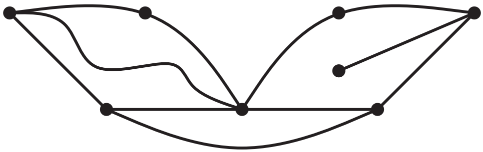
Definition

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt planar, wenn es eine Zeichnung Γ von G (in Standardrepräsentation) gibt, in der sich keine zwei Kanten schneiden.
Eine solche Zeichnung Γ heißt planare Einbettung von G.

Planarität

Definition

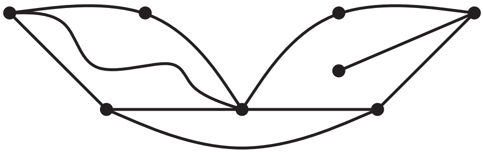
Ein Graph $G = (V, E)$ heißt planar, wenn es eine Zeichnung Γ von G (in Standardrepräsentation) gibt, in der sich keine zwei Kanten schneiden.
Eine solche Zeichnung Γ heißt planare Einbettung von G.



Planarität

Definition

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt planar, wenn es eine Zeichnung Γ von G (in Standardrepräsentation) gibt, in der sich keine zwei Kanten schneiden.
Eine solche Zeichnung Γ heißt planare Einbettung von G.



Zusammenhang zwischen n, m und $|\text{Facetten}|$?

Definition

Geg: *Flussnetzwerk* $(D = (V, A); s, t; c)$ mit

- gerichtetem Graph $D = (V, A)$
- *Kantenkapazitäten* $c : A \to \mathbb{R}_0^+$
- *Quelle* $s \in V$, *Senke* $t \in V$

Eine Abbildung $X : A \to \mathbb{R}_0^+$ heißt s-t-Fluss, falls gilt:

$$\forall (i,j) \in A \qquad 0 \leq X(i,j) \leq c(i,j) \tag{1}$$

$$\forall i \in V \setminus \{s,t\} \qquad \sum_{(i,j)\in A} X(i,j) - \sum_{(j,i)\in A} X(j,i) = 0 \tag{2}$$

Allgemeines Flussnetzwerk

Definition

Geg: *Flussnetzwerk* $(D = (V, A); l; u; b)$ mit

- gerichtetem Graph $D = (V, A)$
- untere Kantenkapazitäten $l : A \to \mathbb{R}_0^+$
- obere Kantenkapazitäten $u : A \to \mathbb{R}_0^+$
- Knotenbewertung $b : V \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{i \in V} b(i) = 0$

Eine Abbildung $X : A \to \mathbb{R}_0^+$ heißt Fluss, falls gilt:

$$\forall (i,j) \in A \qquad l(i,j) \leq X(i,j) \leq u(i,j) \tag{3}$$

$$\forall i \in V \qquad \sum_{(i,j) \in A} X(i,j) - \sum_{(j,i) \in A} X(j,i) = b(i) \tag{4}$$

Fragestellungen auf gegebenem Flussnetzwerk

Karlsruher Institut für Technologie

Gültiger Fluss

Finde einen gültigen Fluss $X : A \to \mathbb{R}_0^+$, i.e., der

- ≫ Kapazitäten respektiert, $l(e), u(e)$
- ≫ Bedarf genau deckt, $b(v)$

Fragestellungen auf gegebenem Flussnetzwerk

Gültiger Fluss

Finde einen gültigen Fluss $X : A \to \mathbb{R}_0^+$, i.e., der

- Kapazitäten respektiert, $l(e), u(e)$
- Bedarf genau deckt, $b(v)$

Zusätzlich gegeben: Kostenfunktion $\text{cost} : A \to \mathbb{R}_0^+$
Definiere: $\text{cost}(X) := \sum_{(i,j)\in A} \text{cost}(i,j) \cdot X(i,j)$

Fragestellungen auf gegebenem Flussnetzwerk

Gültiger Fluss

Finde einen gültigen Fluss $X : A \to \mathbb{R}_0^+$, i.e., der

- Kapazitäten respektiert, $l(e), u(e)$
- Bedarf genau deckt, $b(v)$

Zusätzlich gegeben: Kostenfunktion $\text{cost} : A \to \mathbb{R}_0^+$

Definiere: $\text{cost}(X) := \sum_{(i,j) \in A} \text{cost}(i,j) \cdot X(i,j)$

Minimalkostenflussproblem

Finde einen gültigen Fluss $X : A \to \mathbb{R}_0^+$, der

- $\text{cost}(X)$ minimiert (unter allen gültigen Flüssen)

Fragestellungen auf gegebenem Flussnetzwerk

Karlsruher Institut für Technologie

Gültiger Fluss

Finde einen gültigen Fluss $X : A \to \mathbb{R}_0^+$, i.e., der

- $\gg$ Kapazitäten respektiert, $l(e), u(e)$
- $\gg$ Bedarf genau deckt, $b(v)$

Zusätzlich gegeben: Kostenfunktion $\text{cost} : A \to \mathbb{R}_0^+$

Definiere: $\text{cost}(X) := \sum_{(i,j)\in A} \text{cost}(i,j) \cdot X(i,j)$

Minimalkostenflussproblem

Finde einen gültigen Fluss $X : A \to \mathbb{R}_0^+$, der

- $\gg$ $\text{cost}(X)$ minimiert (unter allen gültigen Flüssen)

$O(n^2 \log n)$ mit $O(n)$ oder $O(n^{7/4} \log n)$ mit $O(n)$

(Planare) Orthogonale Zeichnungen

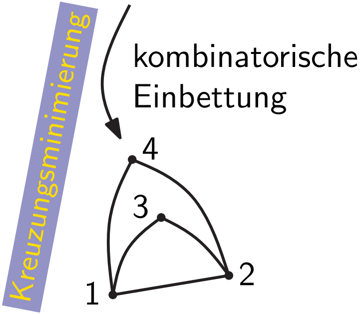
Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$$

(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

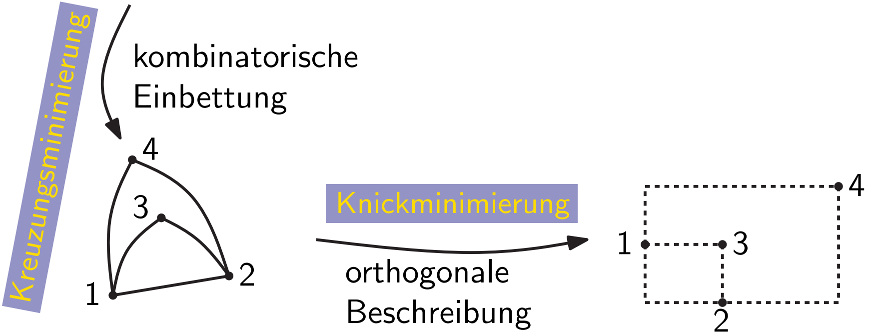
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$$



(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

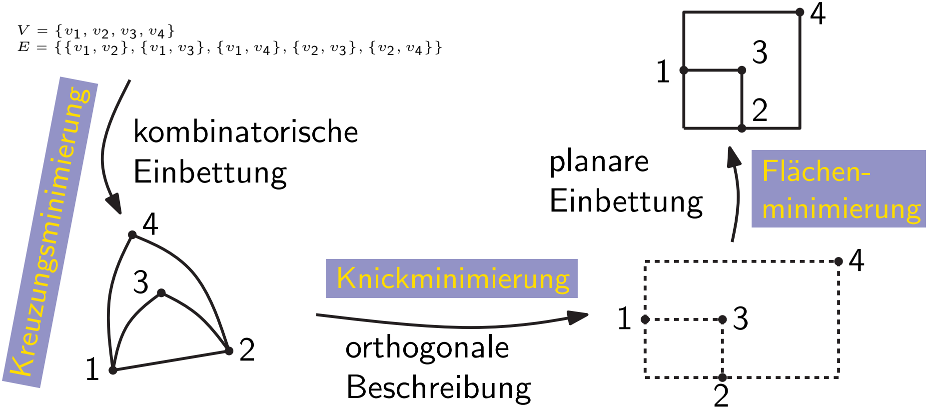
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$$



(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$$



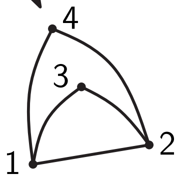
(Planare) Orthogonale Zeichnungen

Dreistufiger Ansatz: *Topology – Shape – Metrics*

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$$

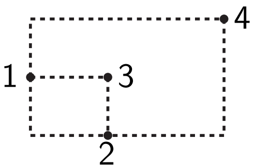
Kreuzungsminimierung

kombinatorische Einbettung



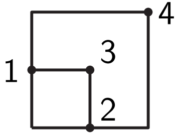
Knickminimierung

orthogonale Beschreibung



planare Einbettung

Flächen-minimierung



Problem: Orthogonale Beschreibung

Problem 2: Knickminimierung mit fester Einbettung

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\deg_{\max} \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0, finde eine orthogonale Gitterzeichnung, die $(\mathcal{F},\ f_0)$ erhält und minimale Anzahl von Knicken hat.

Problem: Orthogonale Beschreibung

Problem 2': Orthogonale Beschreibung

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\deg_{\mathsf{max}} \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0, finde eine orthogonale Beschreibung $H(G)$ die $(\mathcal{F},\ f_0)$ erhält und minimale Anzahl von Knicken hat.

Orthogonale Beschreibung

Eingabe: planarer Graph $G = (V, E)$, Facettenmenge $\mathcal{F}$, äußere Facette f_0
Ausgabe: orthogonale Beschreibung $H(G) = \{H(f) \mid f \in \mathcal{F}\}$

Facettenbeschreibung $H(f)$: im UZS geordnete Folge von Kantenbeschreibungen (e, δ, α) mit

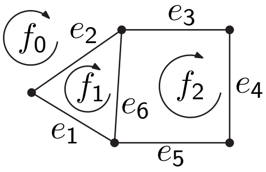
- e ist Randkante von f
- δ ist 0-1-Folge (0 $=$ Rechtsknick, 1 $=$ Linksknick)
- α ist Winkel $\in \{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$ zwischen e und Nachfolger e'

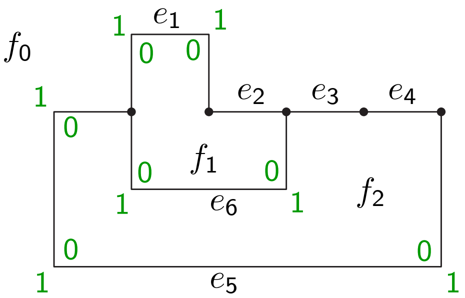
Beispiel: Orthogonale Beschreibung

$$H(f_0) = ((e_1, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_5, 111, \tfrac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$

$$H(f_1) = ((e_1, 00, \tfrac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$$

$$H(f_2) = ((e_5, 000, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$





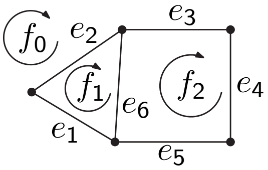
Beispiel: Orthogonale Beschreibung

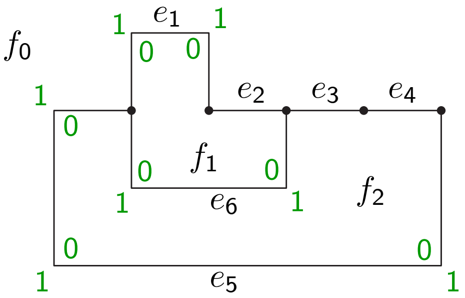
$$H(f_0) = ((e_1, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_5, 111, \tfrac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$

$$H(f_1) = ((e_1, 00, \tfrac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$$

f_0 falsch rum!?

$$H(f_2) = ((e_5, 000, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$



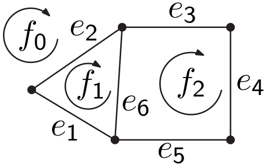


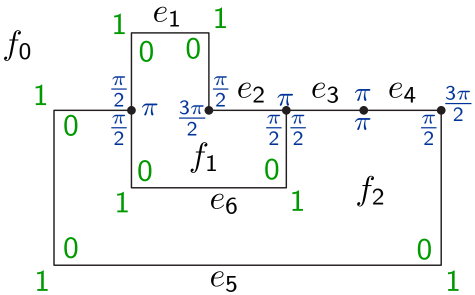
Beispiel: Orthogonale Beschreibung

$$H(f_0) = ((e_1, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_5, 111, \tfrac{3\pi}{2}), (e_4, \emptyset, \pi), (e_3, \emptyset, \pi), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$

$$H(f_1) = ((e_1, 00, \tfrac{3\pi}{2}), (e_2, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 00, \pi))$$

$$H(f_2) = ((e_5, 000, \tfrac{\pi}{2}), (e_6, 11, \tfrac{\pi}{2}), (e_3, \emptyset, \pi), (e_4, \emptyset, \tfrac{\pi}{2}))$$





Korrektheit einer orthogonalen Beschreibung

(H1) $H(G)$ entspricht $\mathcal{F}, f_0$

Korrektheit einer orthogonalen Beschreibung

(H1) $H(G)$ entspricht $\mathcal{F}, f_0$

(H2) für gemeinsame Randkante $\{u, v\}$ zweier Facetten f und g mit $((u, v), \delta_1, \alpha_1) \in H(f)$ und $((v, u), \delta_2, \alpha_2) \in H(g)$ gilt δ_1 ist invertierte und umgedrehte Folge δ_2

Korrektheit einer orthogonalen Beschreibung

(H1) $H(G)$ entspricht $\mathcal{F}, f_0$

(H2) für gemeinsame Randkante $\{u, v\}$ zweier Facetten f und g mit $((u,v), \delta_1, \alpha_1) \in H(f)$ und $((v,u), \delta_2, \alpha_2) \in H(g)$ gilt δ_1 ist invertierte und umgedrehte Folge δ_2

(H3) Sei $|\delta|_0$ (bzw. $|\delta|_1$) die Anzahl Nullen (bzw. Einsen) in δ und $r = (e, \delta, \alpha)$. Für $C(r) := |\delta|_0 - |\delta|_1 + 2 - 2\alpha/\pi$ gilt:

$$\sum_{r \in H(f)} C(r) = 4 \text{ für } f \neq f_0 \text{ und } \sum_{r \in H(f_0)} C(r) = -4$$

Korrektheit einer orthogonalen Beschreibung

(H1) $H(G)$ entspricht $\mathcal{F}, f_0$

(H2) für gemeinsame Randkante $\{u, v\}$ zweier Facetten f und g mit $((u, v), \delta_1, \alpha_1) \in H(f)$ und $((v, u), \delta_2, \alpha_2) \in H(g)$ gilt δ_1 ist invertierte und umgedrehte Folge δ_2

(H3) Sei $|\delta|_0$ (bzw. $|\delta|_1$) die Anzahl Nullen (bzw. Einsen) in δ und $r = (e, \delta, \alpha)$. Für $C(r) := |\delta|_0 - |\delta|_1 + 2 - 2\alpha/\pi$ gilt:
$$\sum_{r \in H(f)} C(r) = 4 \text{ für } f \neq f_0 \text{ und } \sum_{r \in H(f_0)} C(r) = -4$$

(H4) Für jeden Knoten v ist die Summe der anliegenden Winkel gleich 2π

Erinnerung: Problem

Problem 2': Orthogonale Beschreibung

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\text{deg}_{\text{max}} \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0, finde eine gültige orthogonale Beschreibung $H(G)$, die $(\mathcal{F}, f_0)$ erhält und die Knickanzahl minimiert.

Erinnerung: Problem

Problem 2': Orthogonale Beschreibung

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\mathrm{deg}_{\mathrm{max}} \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0, finde eine gültige orthogonale Beschreibung $H(G)$, die $(\mathcal{F},\ f_0)$ erhält und die Knickanzahl minimiert.

Ansatz: Baue Flussnetzwerk!

$\gg$ Währung $= \measuredangle\ \frac{\pi}{2}$

Erinnerung: Problem

Problem 2': Orthogonale Beschreibung

Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad $\deg_{\text{max}} \leq 4$, kombinatorischer Einbettung $\mathcal{F}$ und äußerer Facette f_0, finde eine gültige orthogonale Beschreibung $H(G)$, die $(\mathcal{F},\ f_0)$ erhält und die Knickanzahl minimiert.

Ansatz: Baue Flussnetzwerk!

- ≫ Währung $= \measuredangle\ \frac{\pi}{2}$
- ≫ Knoten $\xrightarrow{\measuredangle}$ Facetten ($\#\ \frac{\pi}{2}$ zur Facette)
- ≫ Facetten $\xrightarrow{\measuredangle}$ Nachbar-Facetten ($\#$ Knicke zum Nachbar)

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup$
  $\{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup$
  $\{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$
- $b(v) = 4 \quad \forall v \in V$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup$
  $\{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$
- $b(v) = 4 \quad \forall v \in V$
- $b(f) = -2(d_G(f) - 2) \quad \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\}$
- $b(f_0) = -2(d_G(f) + 2)$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup \{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$

$$\left.\begin{array}{l} b(v) = 4 \quad \forall v \in V \\ b(f) = -2(d_G(f) - 2) \quad \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\} \\ b(f_0) = -2(d_G(f) + 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum b \stackrel{?}{=} 0$$

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$

$$\gg \quad A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup \{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \gg \quad b(v) = 4 \quad \forall v \in V \\ \gg \quad b(f) = -2(d_G(f) - 2) \quad \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\} \\ \gg \quad b(f_0) = -2(d_G(f) + 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum b = 0$$

(Euler)

Unser Flussnetzwerk $N(G)$

Definition Flussnetzwerk $N(G) = ((V \cup \mathcal{F}, A); l; u; b; \text{cost})$

- $A = \{(v, f) \in V \times \mathcal{F} \mid v \text{ inzident zu } f\} \cup$
  $\{(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid f, g \text{ adjazent via Kante } e\}$
- $b(v) = 4 \quad \forall v \in V$
- $b(f) = -2(d_G(f) - 2) \quad \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{f_0\}$
- $b(f_0) = -2(d_G(f) + 2)$

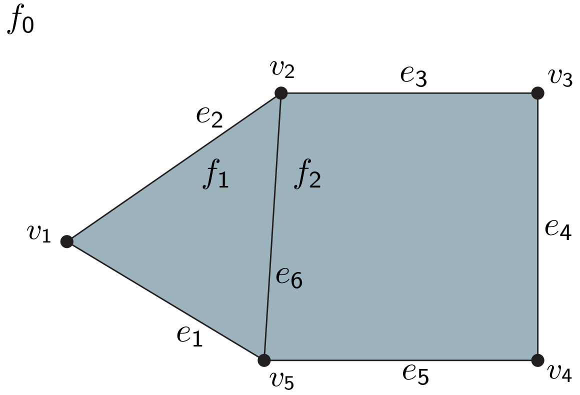
$\Rightarrow \sum b = 0$ (Euler)

$$\forall (f, g) \in A, f, g \in \mathcal{F} \qquad l(f, g) := 0 \leq X(f, g) \leq \infty =: u(f, g)$$

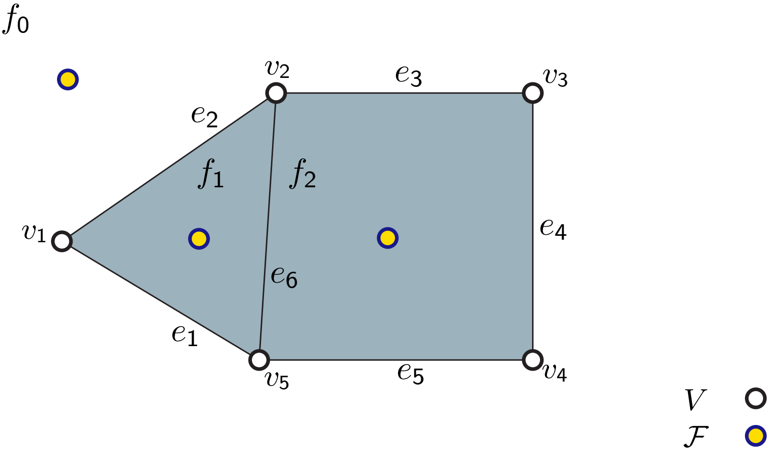
$$\forall (v, f) \in A, v \in V, f \in \mathcal{F} \qquad l(v, f) := 1 \leq X(v, f) \leq 4 =: u(v, f)$$

$$\forall i \in V \qquad \sum_{(i,j) \in A} X(i, j) - \sum_{(j,i) \in A} X(j, i) = b(i)$$

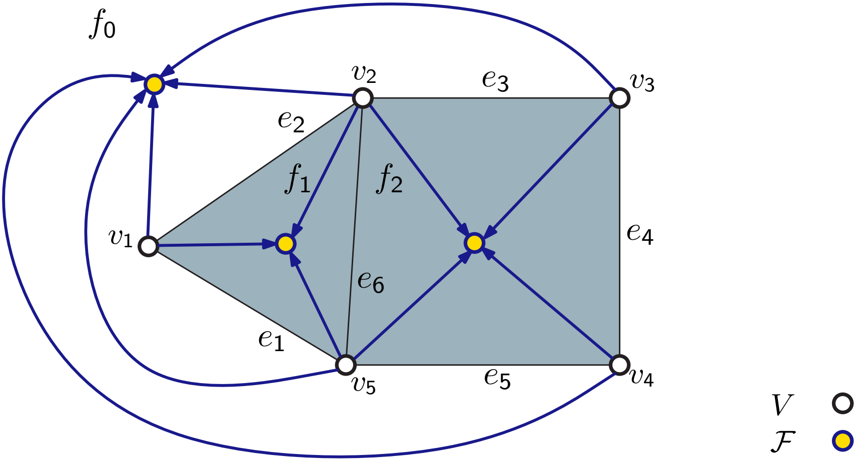
Beispiel Flussnetzwerk



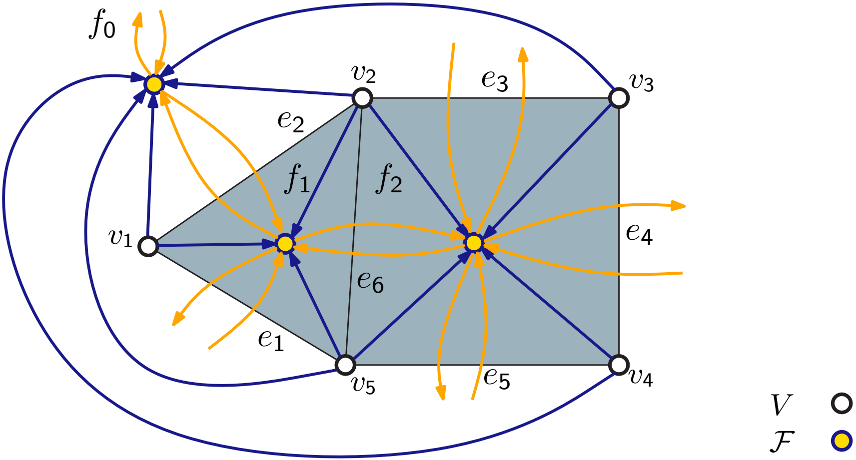
Beispiel Flussnetzwerk



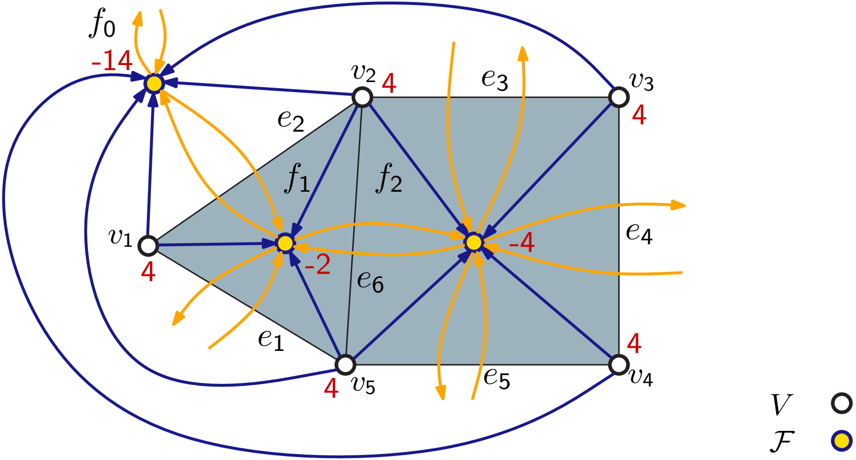
Beispiel Flussnetzwerk



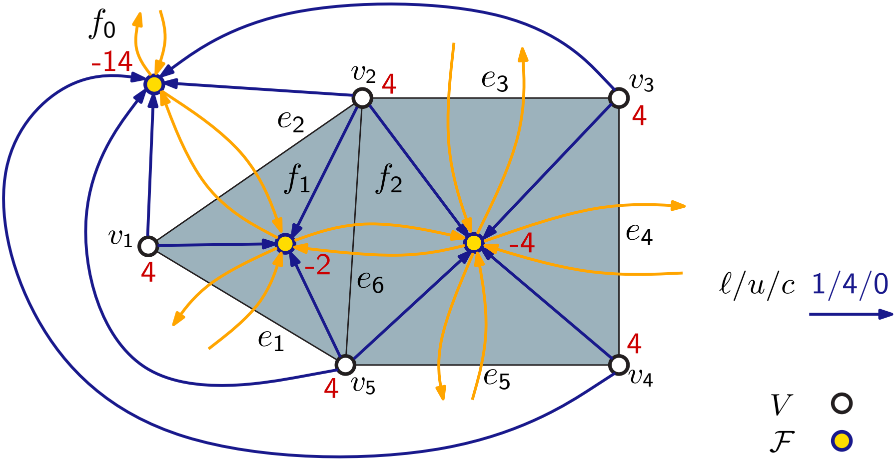
Beispiel Flussnetzwerk



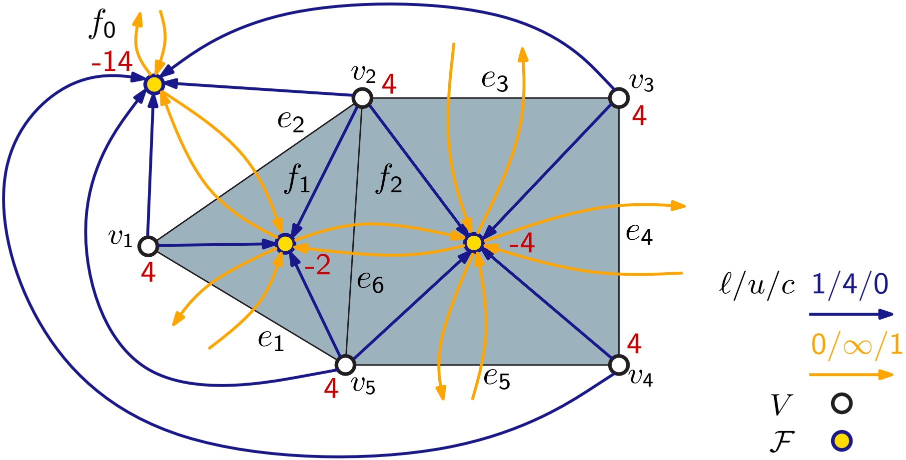
Beispiel Flussnetzwerk



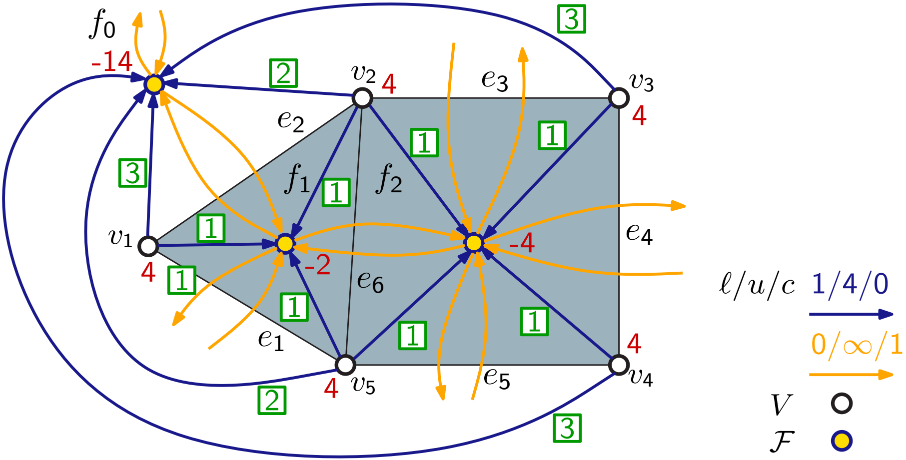
Beispiel Flussnetzwerk



Beispiel Flussnetzwerk

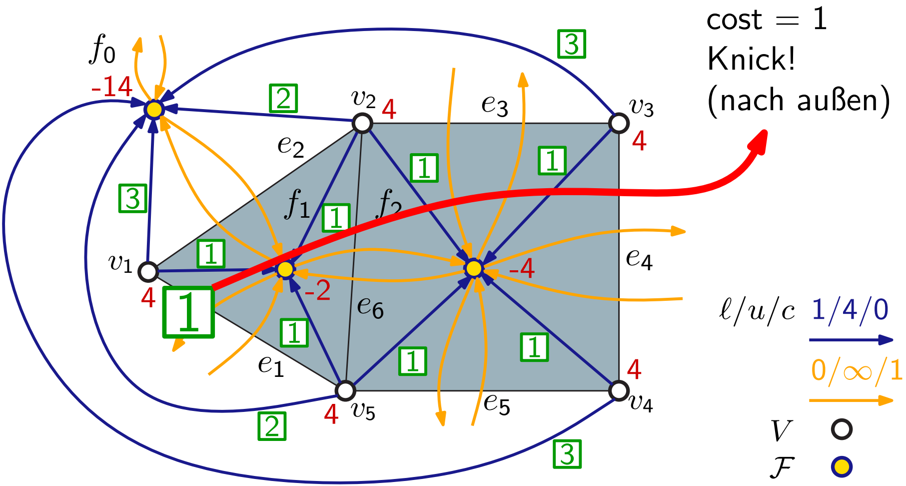


Beispiel Flussnetzwerk



Beispiel Flussnetzwerk

Karlsruher Institut für Technologie



Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Leftarrow$: Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k
Ges.: orthogonale Beschreibung

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Leftarrow$: Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k
Ges.: orthogonale Beschreibung

(H4) Summe Winkel an Knoten 2π $\surd$

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Leftarrow$: Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k
Ges.: orthogonale Beschreibung

(H2) Kantenbeschr. von anderer Seite invertiert + umgedreht $\surd$

(H4) Summe Winkel an Knoten 2π $\surd$

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Leftarrow$: Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k
Ges.: orthogonale Beschreibung

(H1) H(G) entspricht $\mathcal{F}, f_0$ $\surd$

(H2) Kantenbeschr. von anderer Seite invertiert + umgedreht $\surd$

(H4) Summe Winkel an Knoten 2π $\surd$

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Leftarrow$: Geg.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k

Ges.: orthogonale Beschreibung

(H1) H(G) entspricht $\mathcal{F}, f_0$ $\surd$

(H2) Kantenbeschr. von anderer Seite invertiert + umgedreht $\surd$

(H3) Winkelsumme an f: $b(f)$ ohne gestreckte Winkel $= 4$ $\surd$

(H4) Summe Winkel an Knoten 2π $\surd$

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k

(N1) $x(v, f) = 1/2/3/4$,

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k

(N1) $x(v, f) = 1/2/3/4$,

(N2) $x(f, g) := |\delta_{(f,g)}|_0$, $(e, \delta_{(f,g)}, x)$ Beschr. v. $e \stackrel{*}{=} (f, g)$ für f

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k

(N1) $x(v, f) = 1/2/3/4$,

(N2) $x(f, g) := |\delta_{(f,g)}|_0$, $(e, \delta_{(f,g)}, x)$ Beschr. v. $e \stackrel{*}{=} (f, g)$ für f

(N3) Kapazitäten $\surd$, Flusserhaltung

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k

(N1) $x(v, f) = 1/2/3/4$,

(N2) $x(f, g) := |\delta_{(f,g)}|_0$, $(e, \delta_{(f,g)}, x)$ Beschr. v. $e \stackrel{*}{=} (f, g)$ für f

(N3) Kapazitäten $\checkmark$, Flusserhaltung $\checkmark$

Kernaussage + Korrektheit

Satz:

Zu einem planar eingebetteten Graphen $(G, \mathcal{F}, f_0)$ existiert genau dann eine zulässige orthogonale Beschreibung $H(G)$ mit k Knicken, wenn es im Flussnetzwerk $N(G)$ einen Fluss x mit Kosten k gibt.

$\Rightarrow$: Geg.: orthogonale Beschreibung
Ges.: Flussnetzwerk $N(G)$, Fluss x mit Kosten k

(N1) $x(v, f) = 1/2/3/4$,

(N2) $x(f, g) := |\delta_{(f,g)}|_0$, $(e, \delta_{(f,g)}, x)$ Beschr. v. $e \stackrel{*}{=} (f, g)$ für f

(N3) Kapazitäten $\surd$, Flusserhaltung $\surd$

(N4) Kosten $= k$ $\surd$