Algorithmen zur Visualisierung von Graphen

Globale und Lokale Optimierung

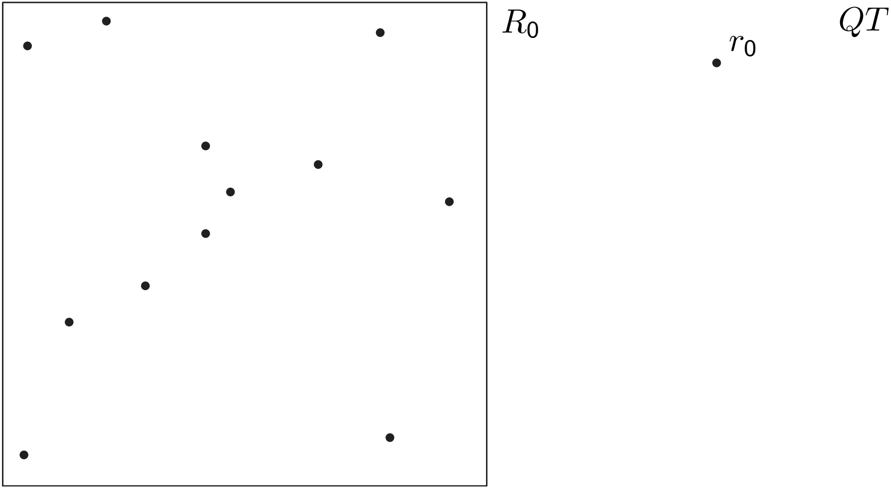
Vorlesung im Wintersemester 2010/2011

Robert Görke

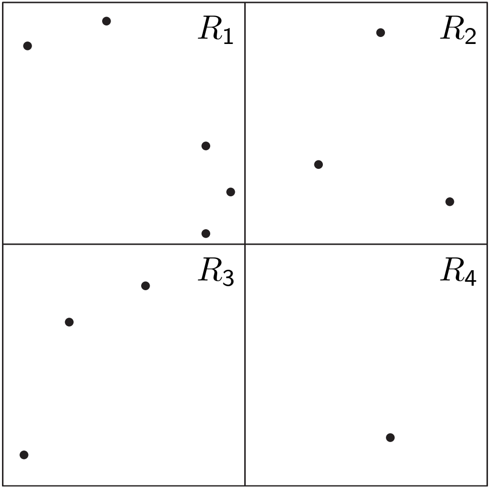
03.11.2010

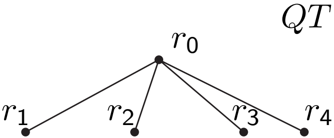
Nachtrag zu Kräftebasiertem

Quad-Tree

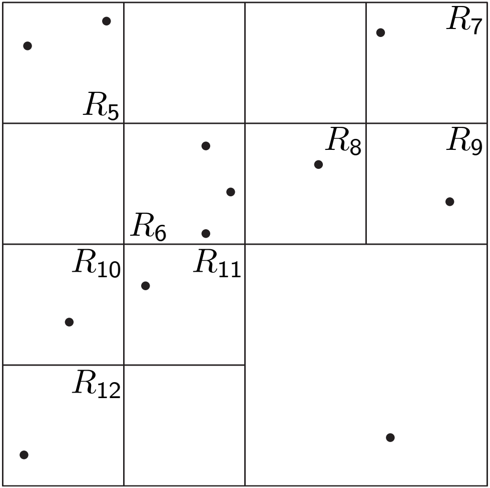


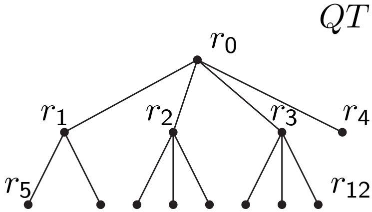
Quad-Tree



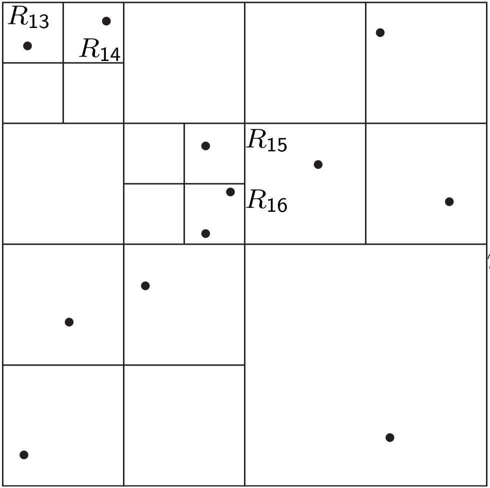


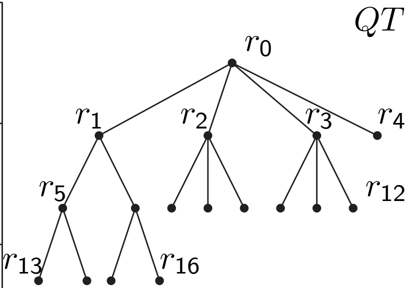
Quad-Tree



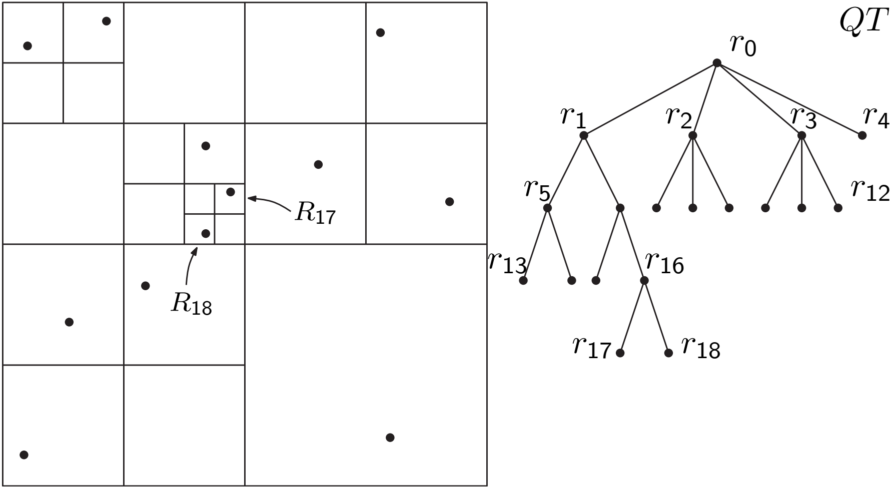


Quad-Tree

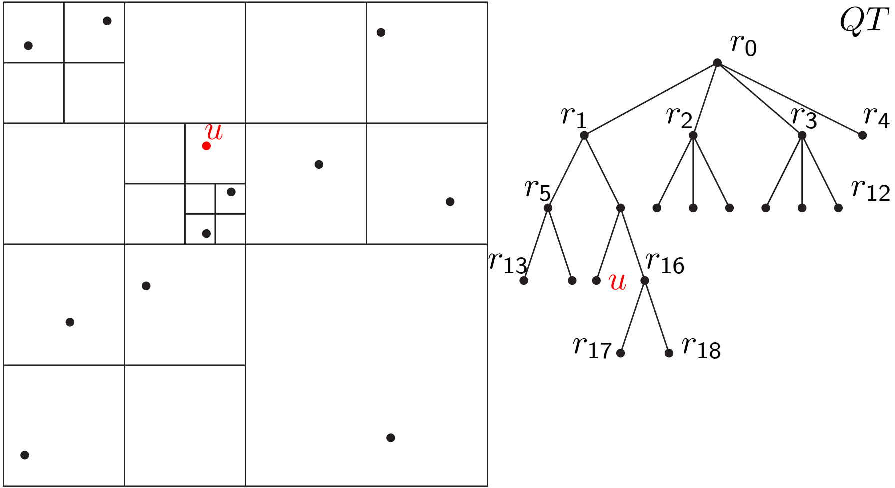




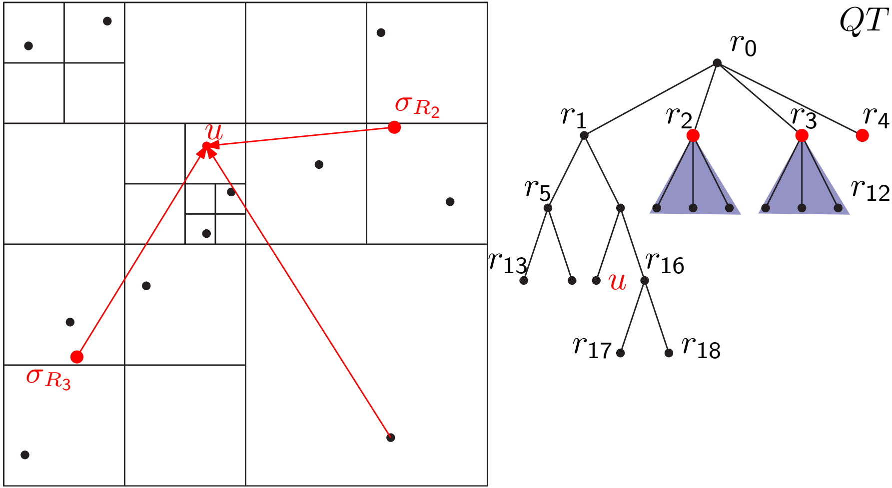
Quad-Tree



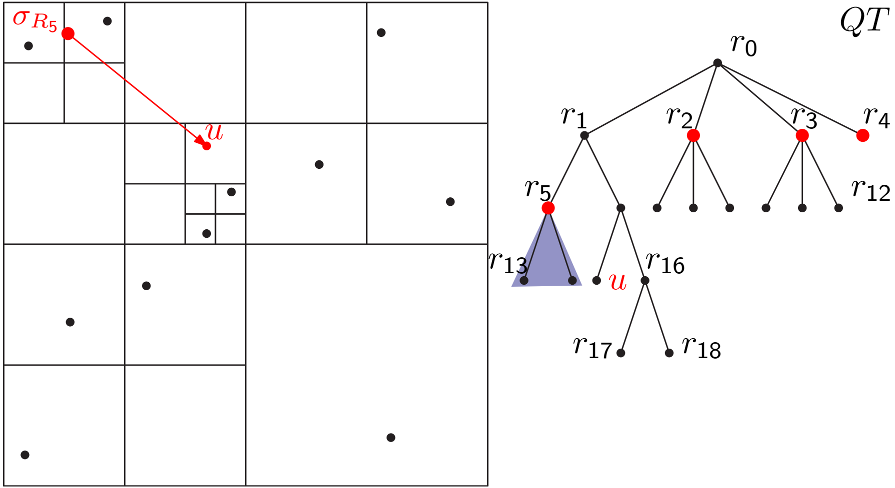
Berechnung abstoßende Kräfte



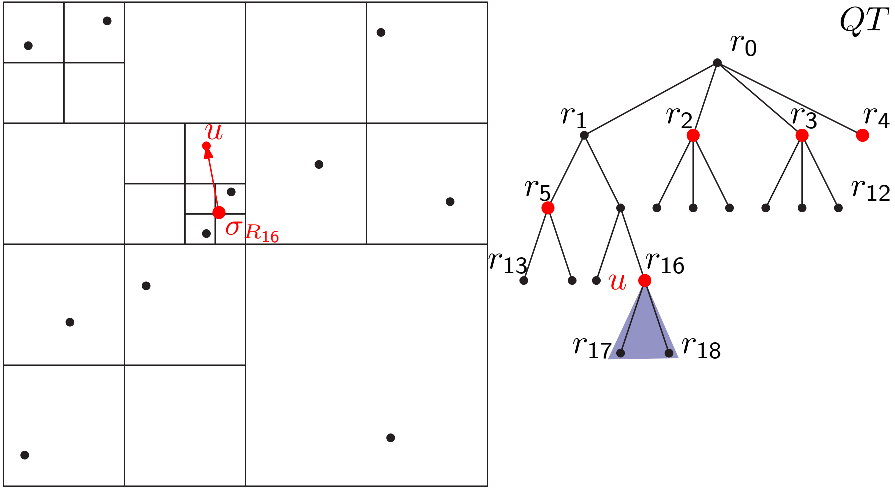
Berechnung abstoßende Kräfte



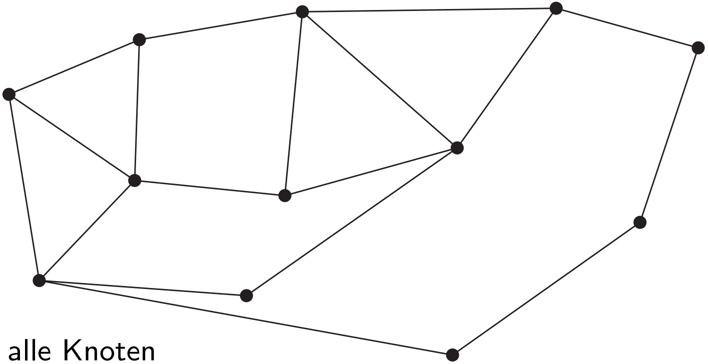
Berechnung abstoßende Kräfte



Berechnung abstoßende Kräfte

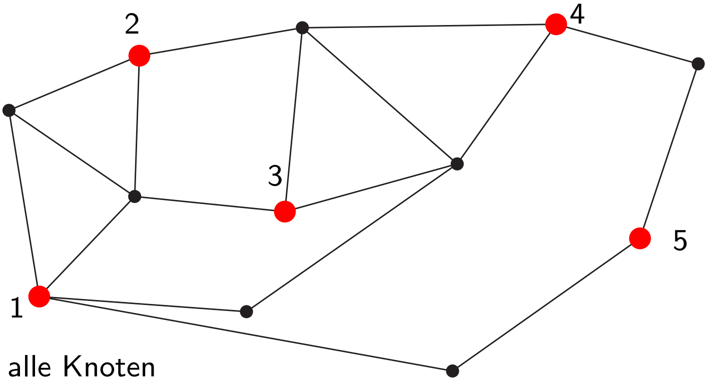


MIS-Vergröberung



V_0: alle Knoten

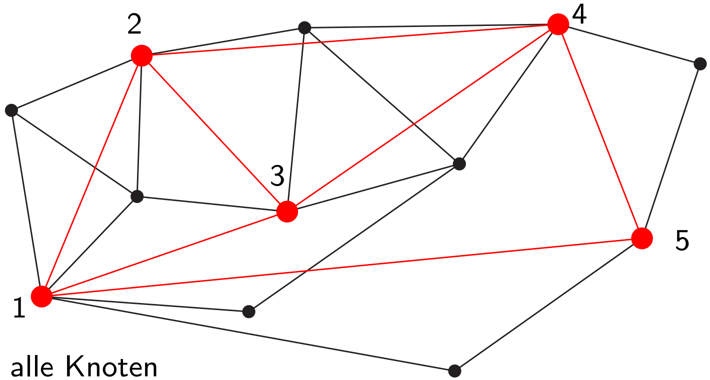
MIS-Vergröberung



V_0: alle Knoten

$V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (MIS in V_0)

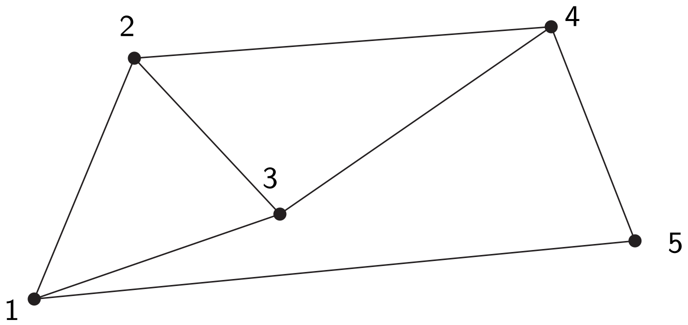
MIS-Vergröberung



V_0: alle Knoten

$V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (MIS in V_0)

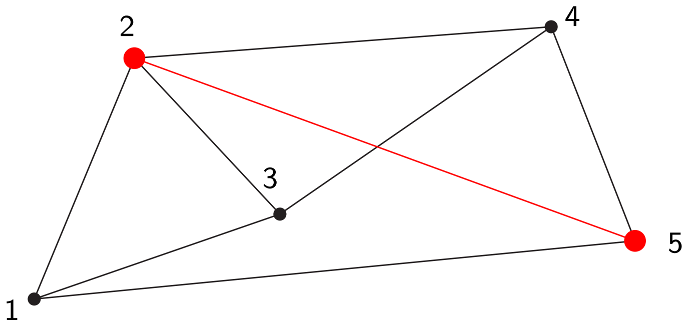
MIS-Vergröberung



V_0: alle Knoten

$V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (MIS in V_0)

MIS-Vergröberung



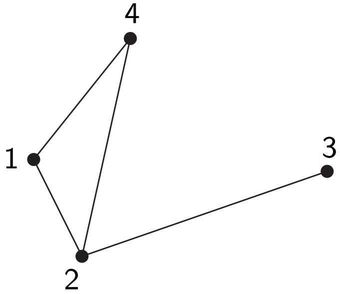
V_0: alle Knoten

$V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (MIS in V_0)

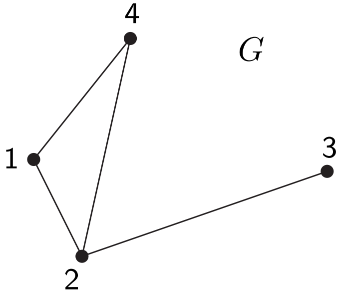
$V_2 = \{2, 5\}$ (MIS in V_1)

3. Globale und Lokale Optimierung

Matrizen eines Graphen

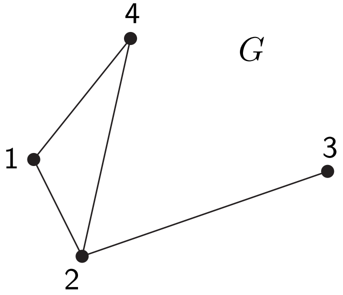


Matrizen eines Graphen



$$A(G) = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

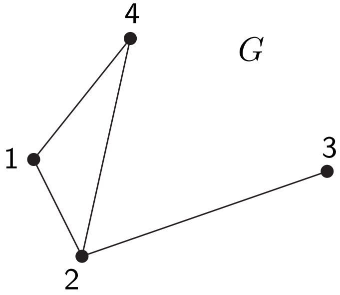
Matrizen eines Graphen



$$A(G) = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$A^3 : (A^3)_{ii} =$$

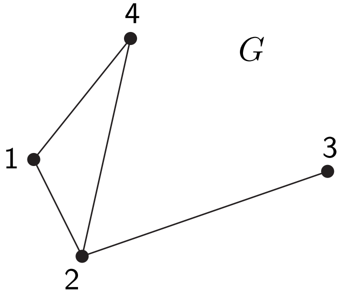
Matrizen eines Graphen



$$A(G) = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$A^3 : (A^3)_{ii} = |\{\pi : |\pi| = 3, \pi = (v_i, \ldots, v_i)\}|$$

Matrizen eines Graphen

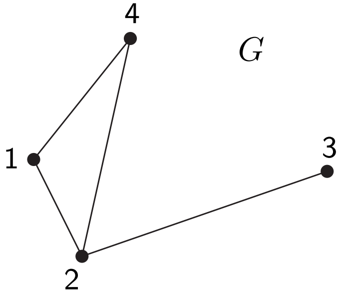


$$A(G) = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$A^3 : (A^3)_{ii} =$$
$$|\{\pi : |\pi| = 3, \pi = (v_i, \dots, v_i)\}|$$

$$\sum_i (A^3)_{ii} =$$
$$\mathrm{tr}(A^3) = 6 \cdot \#\Delta$$

Matrizen eines Graphen

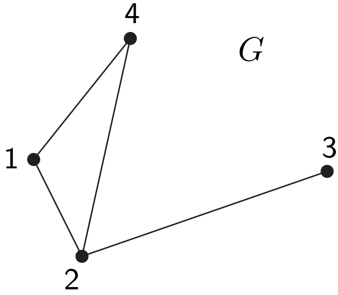


$$A(G) = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$A^2 : (A^2)_{ii} =$$
$$|\{\pi : |\pi| = 2, \pi = (v_i, \ldots, v_i)\}|$$

$$\sum_i (A^2)_{ii} =$$
$$\mathrm{tr}(A^2) = 2 \cdot m$$

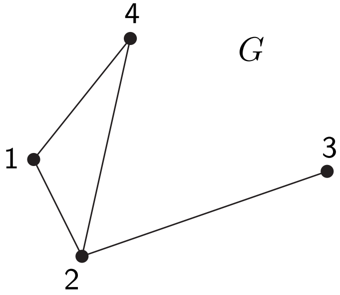
Matrizen eines Graphen



$$A(G) = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$D(G) = \begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

Matrizen eines Graphen

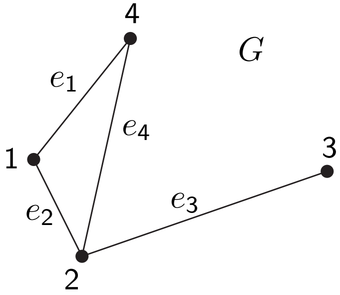


$$A(G) = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$D(G) = \begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

$$L(G) = \begin{matrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{matrix} = D(G) - A(G)$$

Matrizen eines Graphen



$$A(G) = \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$D(G) = \begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

$$L(G) = \begin{matrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{matrix} = D(G) - A(G)$$

Gerichtete Inzidenzmatrix B

ordne V (strikt, total, egal) $\rightsquigarrow v_1 < v_2 < \cdots < v_n$

Gerichtete Inzidenzmatrix B

ordne V (strikt, total, egal) $\rightsquigarrow v_1 < v_2 < \cdots < v_n$

$$\sigma : \{(v,w) : \{v,w\} \in E\} \to \{-1,1\} \;\; \sigma((v,w)) \mapsto \begin{cases} -1 & v < w \\ 1 & w < v \end{cases}$$

Gerichtete Inzidenzmatrix B

ordne V (strikt, total, egal) $\rightsquigarrow v_1 < v_2 < \cdots < v_n$

$$\sigma : \{(v,w) : \{v,w\} \in E\} \to \{-1,1\} \ \ \sigma((v,w)) \mapsto \begin{cases} -1 & v < w \\ 1 & w < v \end{cases}$$

Gerichtete Inzidenzmatrix $B(G^\sigma)$

$$B(G^\sigma)_{v,e} = \begin{cases} \sigma((v,w)) & e = \{v,w\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

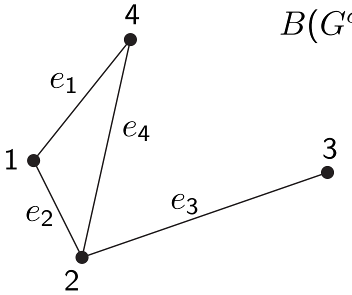
Gerichtete Inzidenzmatrix B

ordne V (strikt, total, egal) $\rightsquigarrow v_1 < v_2 < \cdots < v_n$

$$\sigma : \{(v,w) : \{v,w\} \in E\} \to \{-1, 1\} \quad \sigma((v,w)) \mapsto \begin{cases} -1 & v < w \\ 1 & w < v \end{cases}$$

Gerichtete Inzidenzmatrix $B(G^\sigma)$

$$B(G^\sigma)_{v,e} = \begin{cases} \sigma((v,w)) & e = \{v,w\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$B(G^\sigma) =$

	e_1	e_2	e_3	e_4
v_1	-1	-1	0	0
v_2	0	1	-1	-1
v_3	0	0	1	0
v_4	1	0	0	1

Eigenschaften von B

$$B = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Eigenschaften von B

$$B = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad B^T = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Eigenschaften von B

$$B = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$B^T = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$(BB^T)_{ij} =$$

Eigenschaften von B

$$B = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad B^T = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$(BB^T)_{ij} = \begin{cases} -1 & i \neq j, i \sim j \\ 0 & i \neq j, i \nsim j \\ \deg(v_i) & i = j \end{cases}$$

Eigenschaften von B

$$B = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad B^T = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$BB^T = L = D - A$$

Eigenschaften von B

$$B = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad B^T = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$BB^T = L = D - A$$
$$\Rightarrow \text{rang}(L) = \text{rang}(B)$$

Eigenschaften von B

$$B = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad B^T = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$BB^T = L = D - A$$

$$\Rightarrow \text{rang}(L) = \text{rang}(B) = n - \dim(\text{kern}(B))$$

Eigenschaften von B

$$B = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad B^T = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$BB^T = L = D - A$$

$$\Rightarrow \text{rang}(L) = \text{rang}(B) \ = n - \dim(\text{kern}(B)) \ = n - 1$$

Eigenschaften von B

$$B = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad B^T = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$BB^T = L = D - A$$

$$\Rightarrow \text{rang}(L) = \text{rang}(B) = n - \dim(\text{kern}(B)) = n - 1$$

$$\dim(\text{Lösungsraum von } L \cdot x = 0) = \dim(\text{kern}(L)) = 1$$

Eigenschaften von B

$$B = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad B^T = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ e_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ e_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ e_4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$BB^T = L = D - A$

$\Rightarrow \text{rang}(L) = \text{rang}(B) \; = n - \dim(\text{kern}(B)) \; = n - 1$

$\dim(\text{Lösungsraum von } L \cdot x = 0) = \dim(\text{kern}(L)) = 1$

allgemeiner: $k > 1$ Zsg.-Komponenten: $1 \rightsquigarrow k$

$\text{Lösungsraum} = \text{span}(\{\mathbf{1}_{v_i \in H_\ell} \mid \ell = 1 \ldots k\})$

Schwerpunklayouts mit Restriktion V_0

Knotenmenge V_0 festnageln, Rest baryzentrisch

$$L \cdot x = \mathbf{0} \rightsquigarrow L(G)^{V_0} \cdot x_{V \setminus V_0} = \left(\sum_{u \in V_0 : \{u,v\} \in E} \hat{x}_u \right)_{v \in V \setminus V_0}$$

Schwerpunklayouts mit Restriktion V_0

Knotenmenge V_0 festnageln, Rest baryzentrisch

$$L \cdot x = \mathbf{0} \rightsquigarrow L(G)^{V_0} \cdot x_{V \setminus V_0} = \left(\sum_{u \in V_0 : \{u,v\} \in E} \hat{x}_u \right)_{v \in V \setminus V_0}$$

Schwerpunklayouts mit Restriktion V_0

Knotenmenge V_0 festnageln, Rest baryzentrisch

$$L \cdot x = \mathbf{0} \rightsquigarrow L(G)^{V_0} \cdot x_{V \setminus V_0} = \left(\sum_{u \in V_0 \,:\, \{u,v\} \in E} \hat{x}_u \right)_{v \in V \setminus V_0}$$

Eindeutige Lösbarkeit falls $\det(L(G)^{v_0}) \neq 0$

Schwerpunklayouts mit Restriktion V_0

Knotenmenge V_0 festnageln, Rest baryzentrisch

$$L \cdot x = \mathbf{0} \rightsquigarrow L(G)^{V_0} \cdot x_{V \setminus V_0} = \left(\sum_{u \in V_0 : \{u,v\} \in E} \hat{x}_u \right)_{v \in V \setminus V_0}$$

Eindeutige Lösbarkeit falls $\det(L(G)^{v_0}) \neq 0$

Matrix-Gerüst-Satz: $\surd$ (det $=$ # Spannbäume)

Schwerpunklayouts mit Restriktion V_0

Knotenmenge V_0 festnageln, Rest baryzentrisch

$$L \cdot x = \mathbf{0} \rightsquigarrow L(G)^{V_0} \cdot x_{V \setminus V_0} = \left(\sum_{u \in V_0 \,:\, \{u,v\} \in E} \hat{x}_u \right)_{v \in V \setminus V_0}$$

Eindeutige Lösbarkeit falls $\det(L(G)^{v_0}) \neq 0$

Matrix-Gerüst-Satz: $\surd$ (det $=$ # Spannbäume)

$+$ (Tutte, 1963):3-fach zshg, planarer, eingebetteter Graph: fixiere äußere Facette $\Rightarrow$ Schwerpunklayout kreuzungsfrei

Schwerpunklayouts mit Restriktion V_0

Knotenmenge V_0 festnageln, Rest baryzentrisch

$$L \cdot x = \mathbf{0} \rightsquigarrow L(G)^{V_0} \cdot x_{V \setminus V_0} = \left(\sum_{u \in V_0 \,:\, \{u,v\} \in E} \hat{x}_u \right)_{v \in V \setminus V_0}$$

Eindeutige Lösbarkeit falls $\det(L(G)^{v_0}) \neq 0$

Matrix-Gerüst-Satz: $\surd$ (det = # Spannbäume)

+ (Tutte, 1963):3-fach zshg, planarer, eingebetteter Graph: fixiere äußere Facette $\Rightarrow$ Schwerpunklayout kreuzungsfrei

- $\dfrac{\text{min dist}}{\text{max dist}}$ ist im worst-case in $O(1/\lambda^n)$ $(\lambda > 1)$

Gauß-Seidel Iteration

"[Dabei kann man viele andere Dinge tun, schlafen, Probleme lösen, etc...]" Brief von Gauß and Seidel, 1823

Eingabe : $G = (V, E)$, $\hat{p}_v$, $v \in V_0 \subset V$
Ausgabe: Positionen p_v, $v \in V$ ($p_v = \hat{p}_v$ für alle $v \in V_0$)

foreach $v \in V_0$ **do** $p_v \leftarrow \hat{p}_v$;
while p *ändert sich noch nennenswert* **do**
  foreach $v \in V \setminus V_0$ **do**

$$p_v \leftarrow \frac{1}{d_G(v)} \Bigg(\sum_{u \in V_0 \,:\, \{u,v\} \in E} p_u + \sum_{u \in V \setminus V_0 \,:\, \{u,v\} \in E} p_u \Bigg)$$

  end
end

Spektrallayouts

L symmetrisch, regulär $\Rightarrow$ EW reell und

Spektrallayouts

L symmetrisch, regulär $\Rightarrow$ EW reell und

$$0 = \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq 2 \cdot \max_{v \in V} \deg(v)$$

(G zsh. $\Rightarrow \lambda_2 > 0$)

Eigenpaare $(\lambda_1, v_1), \ldots, (\lambda_n, v_n)$:

- kann $v_1, \ldots, v_n$ orthogonal wählen
- falls orthogonal, dann

$$\lambda_i = \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \perp \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_{i-1})}} \frac{x^T L(G) x}{x^T x} \; .$$

(Rayleigh-Ritz Theorem)

Spektrallayouts - 2

Def.: Laplace'sches Spektrallayout zu G, gegeben L, orthogonale, sortierte Eigenpaare $(\lambda_1, v_1), \ldots, (\lambda_n, v_n)$:

$$\vec{x} := v_2 \quad \text{und} \quad \vec{y} := v_3$$

Spektrallayouts - 2

Def.: Laplace'sches Spektrallayout zu G, gegeben L, orthogonale, sortierte Eigenpaare $(\lambda_1, v_1), \ldots, (\lambda_n, v_n)$:

$$\vec{x} := v_2 \quad \text{und} \quad \vec{y} := v_3$$

$\gg$ elegant, analytisch, nicht auf Layouts beschränkt

Spektrallayouts - 2

Def.: Laplace'sches Spektrallayout zu G, gegeben L, orthogonale, sortierte Eigenpaare $(\lambda_1, v_1), \ldots, (\lambda_n, v_n)$:

$$\vec{x} := v_2 \quad \text{und} \quad \vec{y} := v_3$$

- $\gg$ elegant, analytisch, nicht auf Layouts beschränkt
- $\gg$ ...restlichen Dim., i.e., Eigenvektoren, auch nutzbar

animation

Spektrallayouts - 2

Def.: Laplace'sches Spektrallayout zu G, gegeben L, orthogonale, sortierte Eigenpaare $(\lambda_1, v_1), \ldots, (\lambda_n, v_n)$:

$$\vec{x} := v_2 \quad \text{und} \quad \vec{y} := v_3$$

- $\gg$ elegant, analytisch, nicht auf Layouts beschränkt
- $\gg$ ... restlichen Dim., i.e., Eigenvektoren, auch nutzbar

animation

- $\gg$ langsam $\sim O(n^3)$ time, $O(n^2)$ space

Spektrallayouts - 2

Def.: Laplace'sches Spektrallayout zu G, gegeben L, orthogonale, sortierte Eigenpaare $(\lambda_1, v_1), \ldots, (\lambda_n, v_n)$:

$$\vec{x} := v_2 \quad \text{und} \quad \vec{y} := v_3$$

- elegant, analytisch, nicht auf Layouts beschränkt
- ... restlichen Dim., i.e., Eigenvektoren, auch nutzbar
  animation
- langsam $\sim O(n^3)$ time, $O(n^2)$ space
- Praxis: Power-Iteration, Speicher linear in dünner Matrix
  hier: für v_n
  - starte mit Zufallsvektor v
  - wiederhole: $v \leftarrow \frac{Lv}{||Lv||}$