

Viertes Übungsblatt

Ausgabe: 22. Dezember 2010

Abgabe: Keine, Besprechung in Vorlesung am 13. Januar 2011

1 Charakterisierung Aufwärtsplanarer Graphen

Zeigen Sie die folgende Äquivalenz aus dem Satz zur Charakterisierung aufwärtsplanarer Graphen:

Ein gerichteter azyklischer Graph $D = (V, A)$ ist genau dann aufwärtsplanar wenn D aufspannender Teilgraph eines planaren s - t -Graphen $H = (V, A')$ mit $A \subseteq A'$ ist.

Zur Erinnerung: Ein s - t -Graph ist ein Graph, der eine eindeutige Quelle s , eine eindeutige Senke t und die Kante (s, t) enthält.

2 Eigenschaften von s - t -Graphen

Sei $D = (V, A)$ ein planarer s - t -Graph. Zeigen oder widerlegen Sie:

- D ist bimodal.
- Auf dem Rand jeder Facette f in einer planaren Zeichnung von D liegt genau eine Quelle $q(f)$ und genau eine Senke $z(f)$.
- Für jeden Knoten $v \in V$ gibt es einen einfachen, gerichteten s - t -Pfad, der v enthält.

3 Duales zu s - t -Graphen

Sei D ein planar eingebetteter s - t -Graph. Für eine gerichtete Kante $e = (u, v)$ bezeichne $l(e)$ die Facette links von e und $r(e)$ die Facette rechts von e . OBdA ist D so eingebettet, dass $r(s, t)$ die äußere Facette ist. Der gerichtete Dualgraph $D^* = (V^*, A^*)$ von D ist wie folgt definiert:

- V^* ist die Menge der Facetten von D , wobei $s^* = r(s, t)$ und $t^* = l(s, t)$.
- $A^* = \{(l(e), r(e)) \mid e \in A \setminus \{(s, t)\}\} \cup \{(s^*, t^*)\}$

- Zeigen Sie, dass D^* ein planarer s - t -Graph ist.

bitte umblättern

(b) Zeigen Sie, dass für zwei Facetten f und g von D genau eine der folgenden Eigenschaften zutrifft:

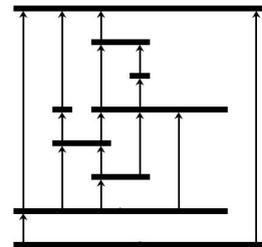
- i) D hat einen gerichteten Pfad von $z(f)$ nach $q(g)$
- ii) D hat einen gerichteten Pfad von $z(g)$ nach $q(f)$
- iii) D^* hat einen gerichteten Pfad von f nach g
- iv) D^* hat einen gerichteten Pfad von g nach f

Hinweis: Betrachten Sie eine topologische Nummerierung $\sigma : V \rightarrow \mathbb{N}$ der Knoten von D , so dass für jede Kante $(u, v) \in A$ gilt $\sigma(u) < \sigma(v)$.

4 Sichtbarkeitsrepräsentation

Eine Sichtbarkeitsrepräsentation ist eine Zeichnung eines Graphen, in der jeder Knoten v als horizontale Strecke $\tau(v)$ gezeichnet ist und jede Kante (u, v) als vertikale Strecke $\tau(u, v)$, so dass gilt

- alle Knotenstrecken sind paarweise disjunkt
- allen Kantenstrecken sind paarweise disjunkt
- die Endpunkte der Strecke $\tau(u, v)$ liegen auf $\tau(u)$ und $\tau(v)$ und $\tau(u, v)$ schneidet keine weiteren Knotenstrecken ($\tau(u)$ "sieht" $\tau(v)$).



Zeigen Sie, dass folgendes Verfahren eine Sichtbarkeitsrepräsentation eines planaren s - t -Graphen berechnet, wobei $l(v)$ die Facette links der am weitesten links liegenden ausgehenden Kante sei und $r(v)$ die Facette rechts der am weitesten rechts liegenden ausgehenden Kante.

- (1) Berechne eine topologische Nummerierung Y der Knoten von D
- (2) Berechne eine topologische Nummerierung X der Knoten von D^*
- (3) Zeichne $\tau(v)$ als horizontale Strecke \overline{pq} mit $p = (X(l(v)), Y(v))$ und $q = (X(r(v)) - 1, Y(v))$
- (4) Zeichne $\tau(u, v)$ als vertikale Strecke $\overline{p'q'}$ mit $p' = (X(l(u, v)), Y(u))$ und $q' = (X(l(u, v)), Y(v))$