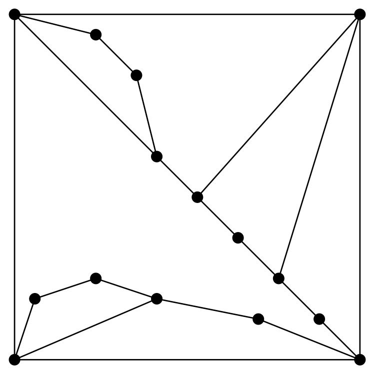
Drittes Übungsblatt

Ausgabe: 24. November 2010
Abgabe: Keine, Besprechung in Vorlesung am 1. Dezember 2010

1 Knickminimierung echt selbst gemacht

(a) Geben Sie für nebenstehenden Graphen ein einbettungserhaltendes orthogonales Layout an. Bestimmen Sie dazu analog zur Vorlesung das entsprechende Flussnetzwerk, finden Sie einen zulässigen Fluss darin und übersetzen Sie diesen in die zugehörige orthogonale Einbettung. Wieviele Knicke erzeugt Ihre Einbettung?

(b) Überlegen Sie sich eine planare Einbettung des Graphen, in der die Anzahl der Knicke einer orthogonalen Einbettung minimal ist (bzgl. aller möglichen planaren Einbettungen).



2 Knicke bei Oktaedern

Zeigen Sie, dass es in jeder kreuzungsfreien orthogonalen Zeichnung eines Oktaeder mindestens eine Kante gibt, die mehr als zwei Knicke hat. Bestimmen Sie dazu, wieviele Knicke die Kanten, die zur äußeren Facette inzident sind, insgesamt mindestens haben.

3 Fürchterlich viele Knicke

Konstruieren Sie eine Familie von eingebetteten planaren Graphen mit Maximalgrad 4 und mit $\mathcal{O}(n)$ Knoten, für die es in jeder knickminimalen einbettungserhaltenden orthogonalen Zeichnung eine Kante mit $\Omega(n)$ Knicken gibt. (Etwa einen Graphen mit $9n + 6$ Knoten und einer Kante mit $n + 4$ Knicken; denken Sie dabei an etwas spiralförmiges.)

4 Wiederholung: Winkelsumme bei Facetten

Gegeben sei eine orthogonale Einbettung $\mathcal{E}$ eines planaren Graphen. Zeigen Sie: Falls f eine innere Facette von $\mathcal{E}$ ist, dann ist die Summe aller innerhalb von f auftretenden Winkel gleich $\pi(p - 2)$, wobei p die Anzahl der auftretenden Winkel ist. Ist f die äußere Facette, so ist die entsprechende Summe gleich $\pi(p + 2)$.

5 Knickminimierung mit zusätzlichen Forderungen

Gegeben sei ein zweifach-zusammenhängender planarer Graph mit Maximalgrad 4. Modifizieren Sie das Flussmodell zur Knickminimierung in orthogonalen Layouts, so dass

(a) keine Kante e mehr als $k(e)$ Knicke hat;

(b) keine innere Facette f mehr als $k(f)$ konkave Ecken (Innenwinkel von $3\pi/2$) auf ihrem Rand hat;

(c) statt der Anzahl der Knicke die Anzahl der konkaven Ecken in den inneren Facetten der Zeichnung minimiert wird.

6 Knickreguläre Zeichnungen

Eine orthogonale Zeichnung eines planaren Graphen G mit Maximalgrad 4 heißt k-knickregulär, falls jede Kante mit genau k Knicken gezeichnet ist, und keine Kante Knicke in unterschiedliche Richtungen besitzt.

Zeigen Sie:

(a) Ein bipartiter Graph, der eine knickfreie orthogonale Gitterzeichnung besitzt, besitzt eine k-knickreguläre orthogonale Gitterzeichnung für jedes $k \in \mathbb{N}$.

(b) Für jeden nicht-bipartiten zweifach-zusammenhängenden Graphen G gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass G für alle $k \geq k_0$ keine k-knickreguläre orthogonale Gitterzeichnung besitzt.

Hinweis zu (b): Betrachten Sie eine Facette mit ungeradem Grad.

7 Gitterzeichnungen ohne Hohlräume

Orthogonale Gitterzeichnungen, in denen es Gitterspalten oder Gitterzeilen gibt, die keinen Knoten oder Knick enthalten, lassen sich an dieser Stelle problemlos zusammenstauchen, ohne dass die zugehörige orthogonale Beschreibung dadurch verändert wird. Man fordert daher oft, dass in einer Gitterzeichnung Γ innerhalb der *bounding box*[1] $[x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$ jede Gitterspalte $x_i \in [x_{\min}, x_{\max}] \cap \mathbb{Z}$ und jede Gitterzeile $y_i \in [y_{\min}, y_{\max}] \cap \mathbb{Z}$ mindestens einen Knick oder Knoten enthält, also nicht unbenutzt ist.

In diesem Fall kann der Flächenbedarf einer Zeichnung für einen Graphen G mit orthogonaler Beschreibung H nicht beliebig groß werden.

Zeigen Sie:

(a) Für eine Zeichnung Γ eines Graphen G mit n Knoten, Minimalgrad 2 und einer orthogonalen Beschreibung H mit b Knicken ist die Zeichenfläche höchstens $\lfloor (n+b)/2 \rfloor \cdot \lceil (n+b)/2 \rceil$.

(b) Geben Sie eine Familie von Graphen an, die einerseits zeigt, dass die obige Schranke scharf ist, die aber andererseits auch jeweils eine Zeichnung mit linear beschränkter Fläche von $O(n+b)$ erlaubt.

Hinweis zu (a): Ersetzen Sie zunächst alle Knicke durch Dummyknoten und entfernen Sie anschließend vorübergehend alle Zeilen und Spalten, in denen nur ein einziger Knoten liegt.

[1] das kleinste achsenparallele Rechteck R mit $\Gamma \subseteq R$