Zweites Übungsblatt

Ausgabe: 20. November 2010
Abgabe: Keine, Besprechung in Vorlesung am 24. November 2010

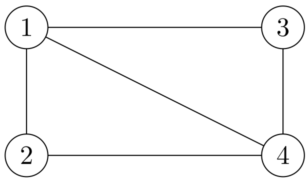
1 Der Matrix-Gerüst-Satz

(a) Betrachten Sie den Graphen G aus dem Handout zum Matrix-Gerüst-Satz. Berechnen Sie mit Hilfe des Matrix-Gerüst-Satzes die Anzahl $t(G)$ der Spannbäume von G.
Tipp: *Die Determinante einer* 3×3-*Matrix kann man leicht nach der* Regel von Sarrus *berechnen:*

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

(b) Geben Sie alle Spannbäume von G an. Geben Sie dabei im Kontext des Beweises des Matrix-Gerüst-Satzes an, zu welcher Kantenkontraktion bzw. Kantenentfernung die einzelnen Bäume korrespondieren.

(c) Betrachten Sie den folgenden Graphen H:



Geben Sie zu H die Laplacematrix an und berechnen sie mit Hilfe des Matrix-Gerüst-Satzes $L(H)^{2,2}$, und dann mit der Regel von Sarrus $t(H)$.
Gehen Sie nun schrittweise vor um zu dem selben Ergebnis zu gelangen (siehe Beweis von 3.3 oder Handout): Betrachten Sie dazu die Bedeutung von $t(H) = t(H/\{2,4\}) + t(H - \{2,4\})$ sowohl in Form der Matrixschreibweise als auch in Form der entsprechenden Graphen.

2 Eigenwerte hoch i

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter und zusammenhängender Graph und A die zugehörige Adjazenzmatrix definiert durch:

$$A[u,v] := \begin{cases} 1 & \text{, falls } \{u,v\} \in E \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \quad .$$

Sei λ_i mit $1 \leq i \leq n$ die Eigenwerte von A. Geben Sie eine 'anschauliche' Interpretation oder Formel für $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^j$ an, für $j = 0, 1, 2, 3$. Tipp: *Folgt der heißen Spur!*

3 Jonglieren mit Eigenwerten der Laplacematrix

Sei G ein beliebiger ungerichteter, ungewichteter und einfacher Graph und L die zugehörige Laplace Matrix.

(a) Zeigen Sie, die Vielfachheit des Eigenwert 0 von L ist genau die Anzahl der Zusammenhangskomponenten.

(b) Zeigen Sie, dass $\lambda_2 \leq 1/2(\deg(u) + \deg(v))$ für zwei unverbundene Knoten ist.

(c) Zeigen Sie dass gilt: $\lambda_2 \leq \max_{v \in V} \deg(v)$

4 Beschreibungen Planarer Einbettungen

Sei G ein planarer Graph mit einer kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene, die f Facetten enthält. Für $1 \leq i \leq f$ sei a_i die Anzahl der zur Facette i inzidenten Kanten von G, wobei die Facetten so numeriert seien, daß die Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_f)$ nichtabsteigend sortiert ist.
Kann es zu einem planaren Graphen G zwei Einbettungen in die Ebene geben, so daß die zugehörigen Zahlenfolgen unterschiedlich sind?

5 Planare Einbettungen bei 3-fach Zusammenhang

Zwei Einbettungen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ mit Facettenmengen F_1 und F_2 eines einfachen planaren Graphen $G = (V, E)$ sind *äquivalent*, wenn es eine Bijektion $\phi : F_1 \to F_2$ gibt, so dass für jede Facette $f \in F_1$ und für jede Kante $\{u, v\} \in E$ gilt: $\{u, v\}$ ist zu f inzident g.d.w. $\{u, v\}$ zu $\phi(f)$ inzident ist.

Zeigen Sie: Alle Einbettungen eines 3-fach zusammenhängenden, einfachen planaren Graphen sind äquivalent. Tipp: *Gegeben eine Facette, darf diese in einer anderen Einbettung fehlen?.*

6 Der Satz von Eulerr

Beweisen Sie den Satz von Euler (Satz 4.2 im Skript) ... irgendwie anders als in der Vorlesung. (Zum Beispiel mit Hilfe eines Spannbaumes, und dessen Gegenstück im Dualgraphen.)