Thema 5: PTAS for Euclidean TSP

Andreas Schatz

December 8, 2009

Das euklidische Handlungsreisendenproblem

Problemstellung

Gegeben: Menge von Punkten $S \subset \mathbb{R}^2$

Gesucht: Optimale Rundreise (bzgl. Reiselänge) die alle Punkte aus S besucht

Das euklidische Handlungsreisendenproblem

Problemstellung

Gegeben: Menge von Punkten $S \subset \mathbb{R}^2$
Gesucht: Optimale Rundreise (bzgl. Reiselänge) die alle Punkte aus S besucht

- $\mathcal{NP}$-schweres Problem $\Rightarrow$ Approximationsalgorithmen

Das euklidische Handlungsreisendenproblem

Problemstellung

Gegeben: Menge von Punkten $S \subset \mathbb{R}^2$
Gesucht: Optimale Rundreise (bzgl. Reiselänge) die alle Punkte aus S besucht

- $\mathcal{NP}$-schweres Problem $\Rightarrow$ Approximationsalgorithmen
- Besonderheit: Abstände werden durch die von der Euklidnorm induzierten Metrik ($\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$) bestimmt.
  $\Rightarrow$ Dreiecksungleichung.

Das euklidische Handlungsreisendenproblem

Problemstellung

Gegeben: Menge von Punkten $S \subset \mathbb{R}^2$
Gesucht: Optimale Rundreise (bzgl. Reiselänge) die alle Punkte aus S besucht

- $\mathcal{NP}$-schweres Problem $\Rightarrow$ Approximationsalgorithmen
- Besonderheit: Abstände werden durch die von der Euklidnorm induzierten Metrik ($\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$) bestimmt.
  $\Rightarrow$ Dreiecksungleichung.
- Andere Metriken sind auch denkbar.

Polynomial-time Approximation Scheme

Definition

Gegeben: Ein Optimierungsproblem $\mathcal{O}$

Gesucht: Für jedes $\varepsilon > 0$ einen Algorithmus P_ε mit polynomieller Laufzeit, so dass für das Ergebnis E von P_ε bei Eingabe einer Instanz $I \in \mathcal{O}$ gilt:

Polynomial-time Approximation Scheme

Definition

Gegeben: Ein Optimierungsproblem $\mathcal{O}$

Gesucht: Für jedes $\varepsilon > 0$ einen Algorithmus P_ε mit polynomieller Laufzeit, so dass für das Ergebnis E von P_ε bei Eingabe einer Instanz $I \in \mathcal{O}$ gilt:

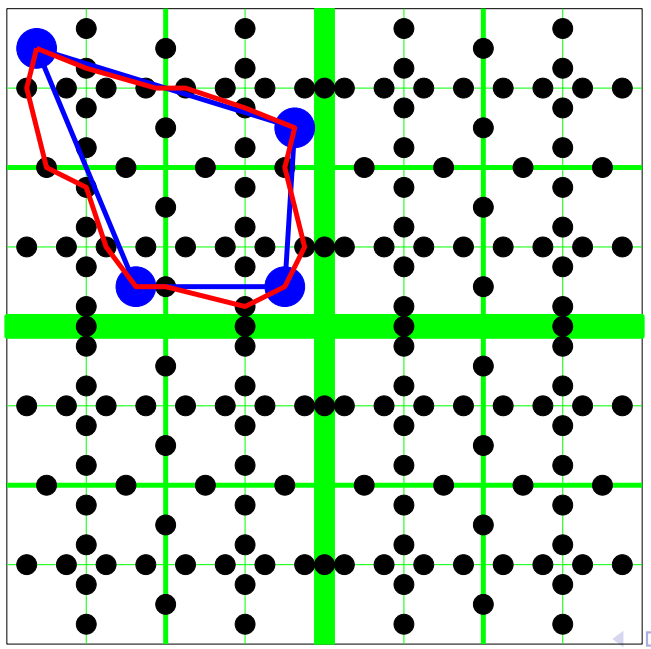
- $E \leq (1 + \varepsilon)OPT(I)$, falls $\mathcal{O}$ Minimierungsproblem ist
- $E \geq (1 - \varepsilon)OPT(I)$, falls $\mathcal{O}$ Maximierungsproblem ist

Lösungsidee

Portal-Respecting Tour

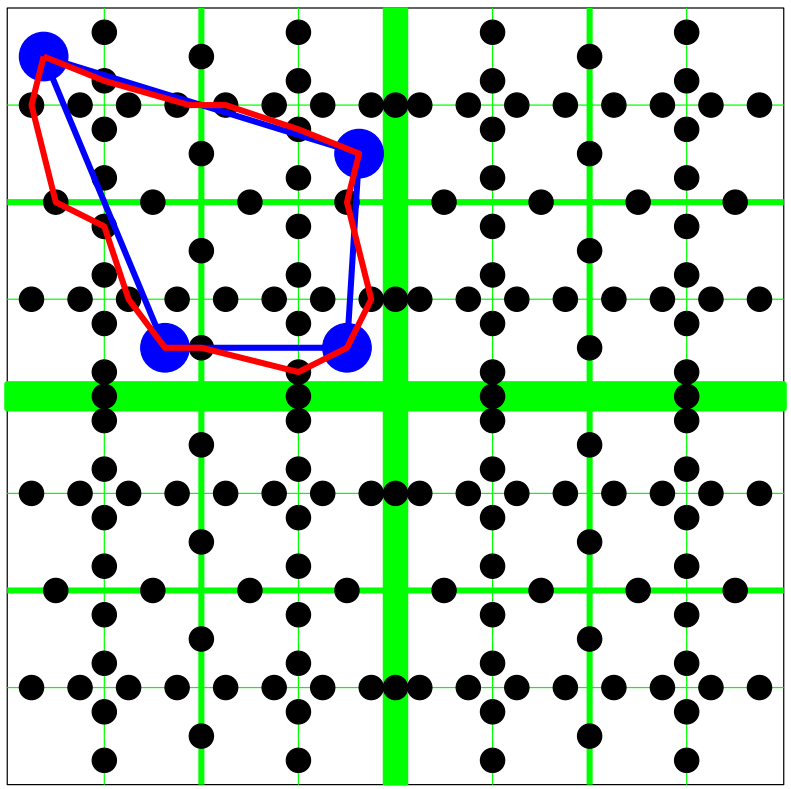
Idee

Lege “feines” Gitter über die Ebene und betrachte nur Touren die an **Portalen** das Gitter kreuzen. $\Rightarrow$ **Portal-Respecting Tour**



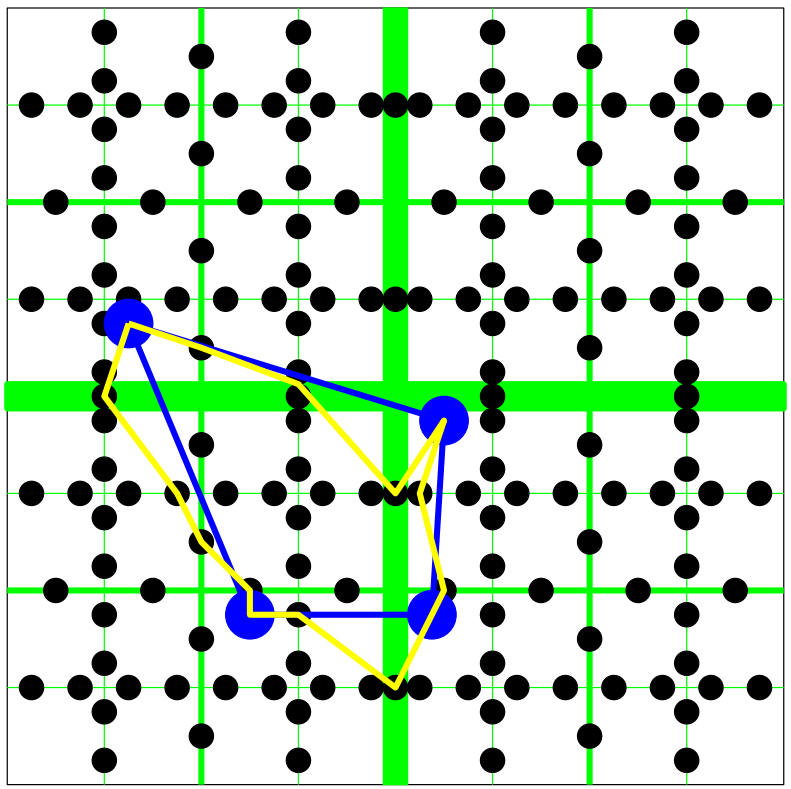
Lösungsidee

Approximationsgüte der PRT



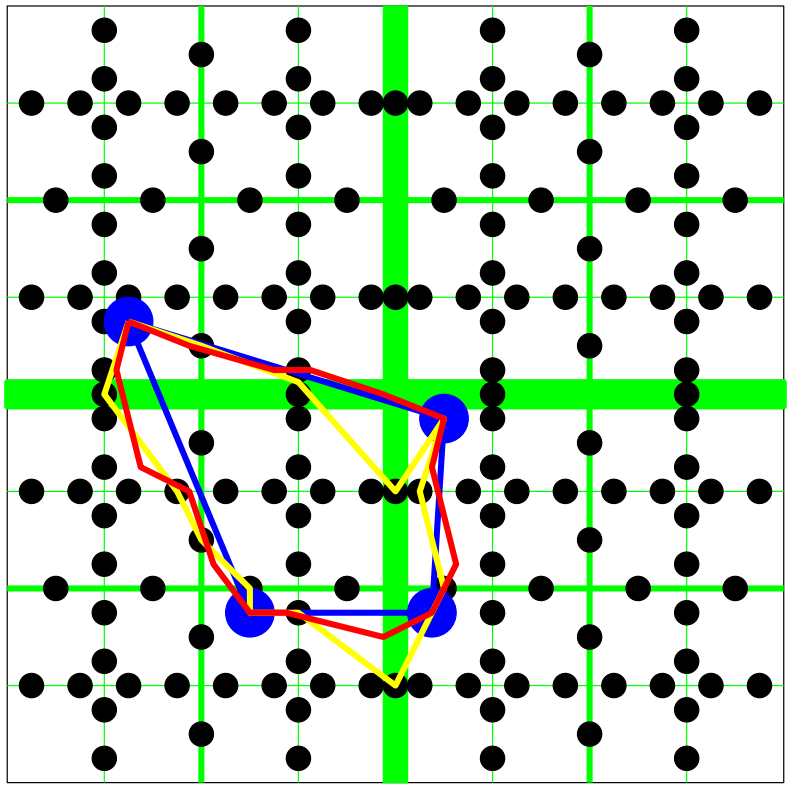
Lösungsidee

Approximationsgüte der PRT



Lösungsidee

Approximationsgüte der PRT



Lösungsidee

Approximationsgüte der Portal-Respecting Tour

Beobachtung

Güte der Approximation durch **Portal-Respecting Tour** hängt ab von:

- "Feinheit" des Gitters
- Anzahl der Portale
- Position des Gitters

Lösungsidee

Approximationsgüte der Portal-Respecting Tour

Beobachtung

Güte der Approximation durch **Portal-Respecting Tour** hängt ab von:

- "Feinheit" des Gitters
- Anzahl der Portale
- Position des Gitters

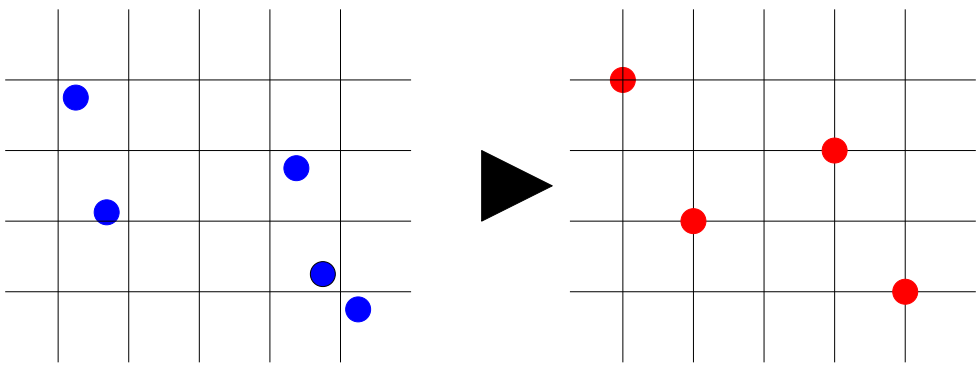
Satz 1

Eine optimale **Portal-Respecting Tour** liefert eine ε-Approximation.

Schritt 1: Pertubation

Vorgehen

- Lege ein "genügend feines" Gitter über die Ebene
- Verschiebe Punkte aus S zum nächstgelegenen Gitterpunkt
- Identifiziere Punkte mit identischen Koordinaten
- Skalieren um Faktor α (Mindestabstand 2) $\Rightarrow S'$



Schritt 1: Pertubation

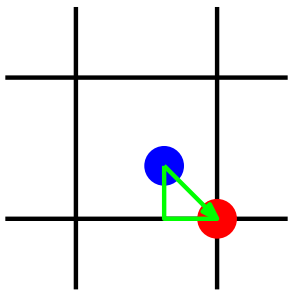
Details

- Wähle als Zellenlänge $\varepsilon d_{\max}/n^{1.5}$
- $n \cdot \varepsilon d_{\max}/n^{1.5} = \varepsilon d_{\max}/n^{0.5} << \varepsilon Opt$ Änderung der Tourkosten
- Minimaler Abstand mindestens eine Zellenlänge.
  $\Rightarrow$ Minimaler Abstand nach Skalierung
  $\frac{\alpha d_{\min}}{\alpha \varepsilon d_{\max}/n^{1.5}} \leq \frac{d_{\max}}{\varepsilon d_{\max}/n^{1.5}} \leq n^{1.5}/\varepsilon \in O(n^2/2)$

Schritt 1: Pertubation

Details

- Wähle als Zellenlänge $\varepsilon d_{\max}/n^{1.5}$
- $n \cdot \varepsilon d_{\max}/n^{1.5} = \varepsilon d_{\max}/n^{0.5} << \varepsilon Opt$ Änderung der Tourkosten
- Minimaler Abstand mindestens eine Zellenlänge.
  $\Rightarrow$ Minimaler Abstand nach Skalierung
  $\frac{\alpha d_{\min}}{\alpha \varepsilon d_{\max}/n^{1.5}} \leq \frac{d_{\max}}{\varepsilon d_{\max}/n^{1.5}} \leq n^{1.5}/\varepsilon \in O(n^2/2)$



Schritt 1: Pertubation

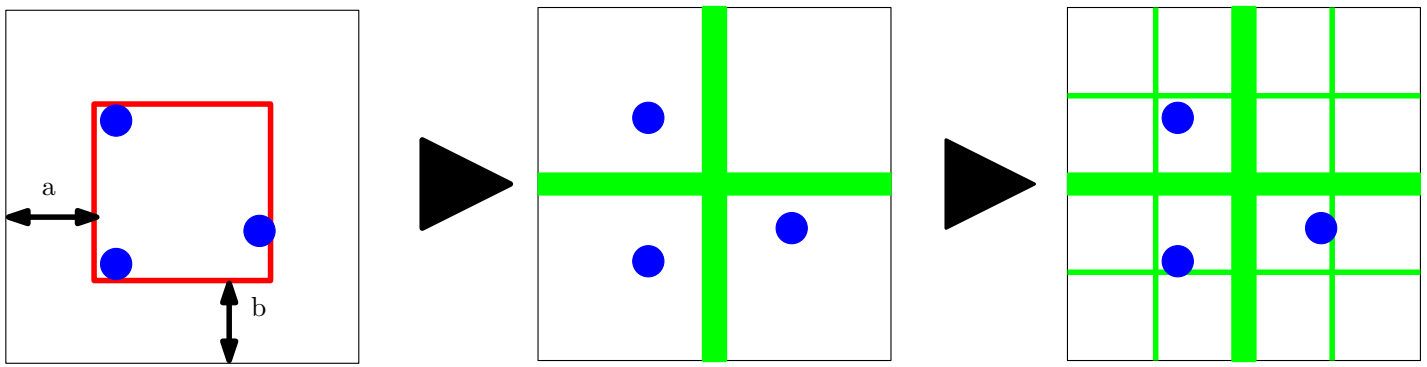
Ergebnis

- Vernachlässigbare Änderung der Tourkosten
- Ganzzahlige Koordinaten
- Mindestabstand 2
- Boundingbox mit Seitenlänge $l \leq n^2/2$
- Aufwand: $O(n)$

Schritt 2: Randomisierte Zerteilung

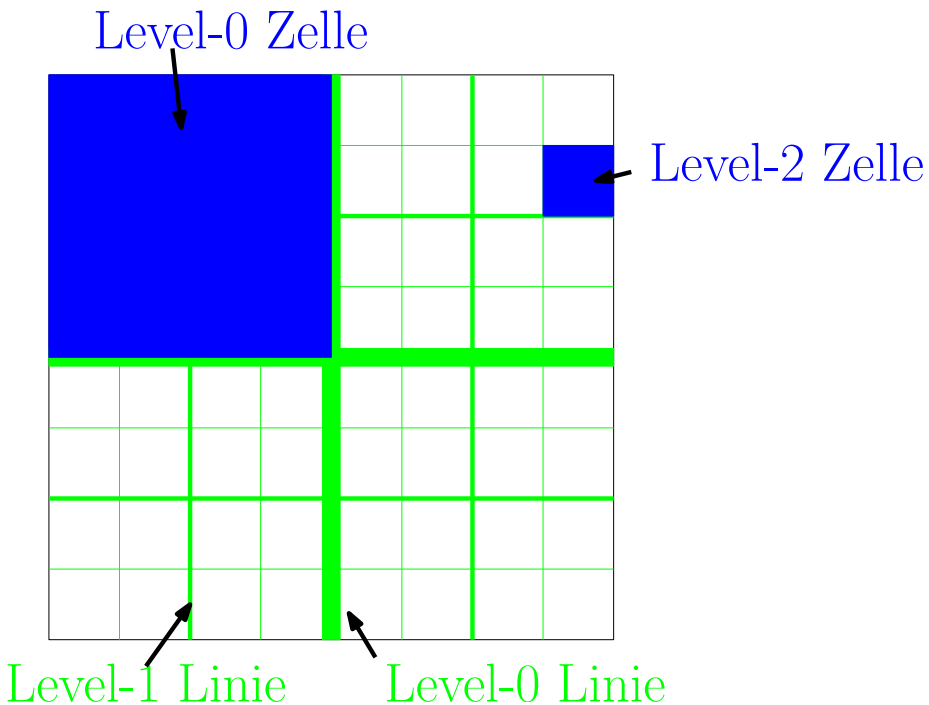
Vorgehen

- Platziere zufällig (Parameter a,b) ein Quadrat Q mit Seitenlänge $L = 2l$ um die Boundingbox der Punkte
- Zerteile Q in 4 gleichgroße kleinere Quadrate durch 2 Linien (Level-0)
- Setze rekursiv fort bis 1-Zellen (Seitenlänge 1) Q überdecken



Schritt 2: Randomisierte Zerteilung

Bezeichnungen



Schritt 2: Randomisierte Zerteilung

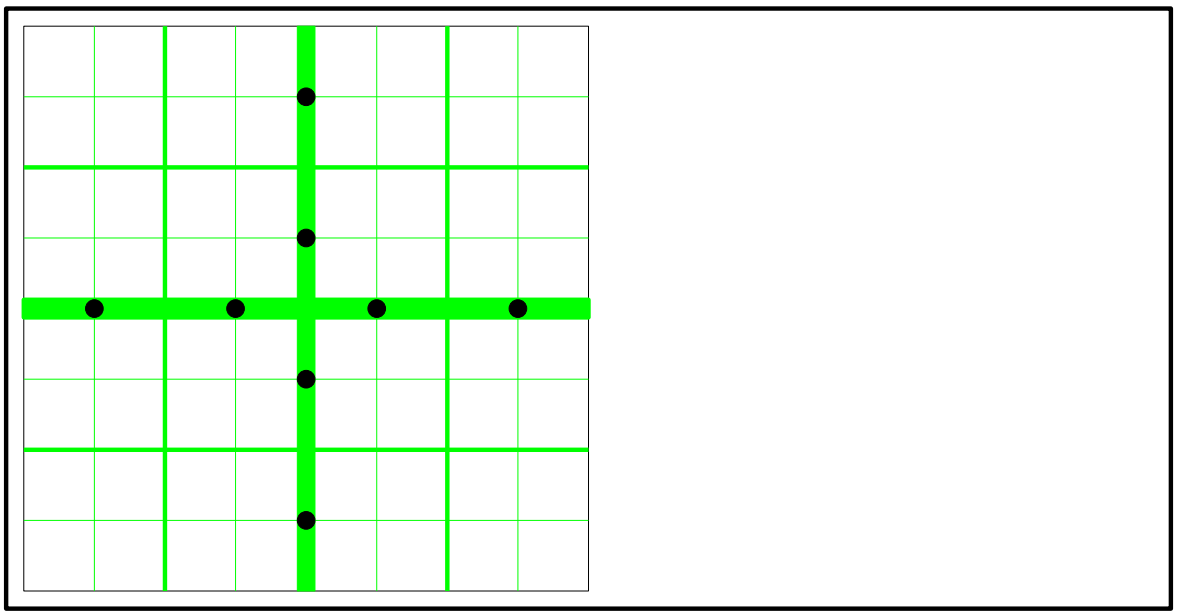
Ergebnis

- Seitenlänge von Q ist $L \leq n^2$
- Quadtree-Zerteilung von Q der Tiefe $\log L$
- Pro 1-Zelle höchstens ein Punkt aus S'.
- $\mathbb{P}[\text{Linie hat Level-}i] = 2^{i+1}/L$
- Aufwand: $O(L \log L) = O(n^2 \log n)$

Portale

Konstruktion der Portale

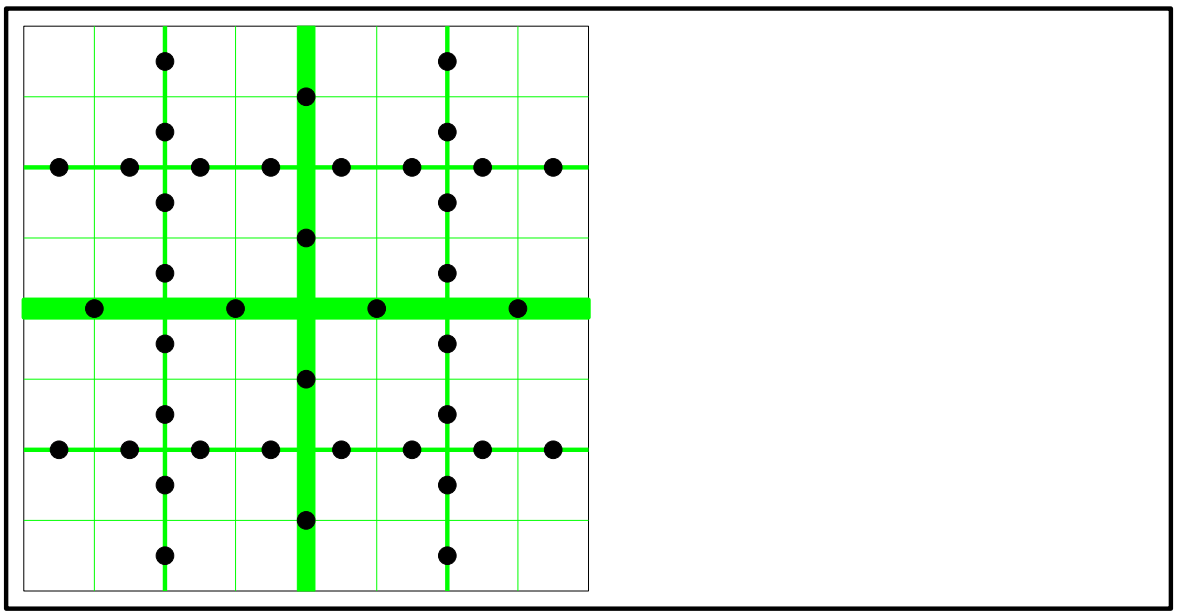
Auf einer Level-i Linie gibt es $2^{i+1}m$ gleichmäßig verteilte Portale.



Portale

Konstruktion der Portale

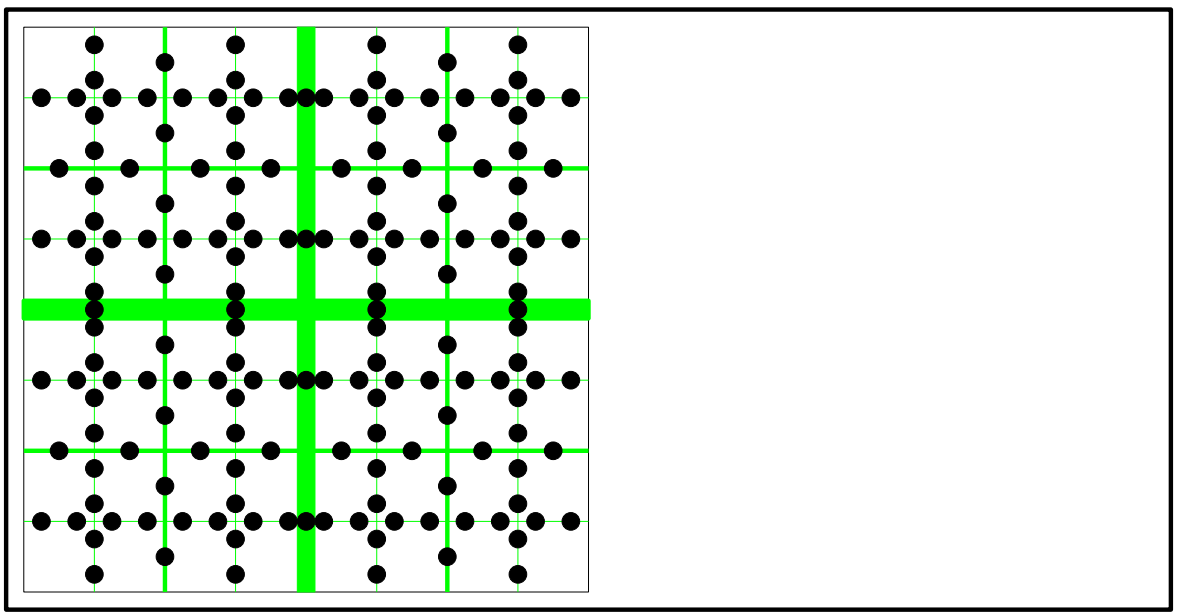
Auf einer Level-i Linie gibt es $2^{i+1}m$ gleichmäßig verteilte Portale.



Portale

Konstruktion der Portale

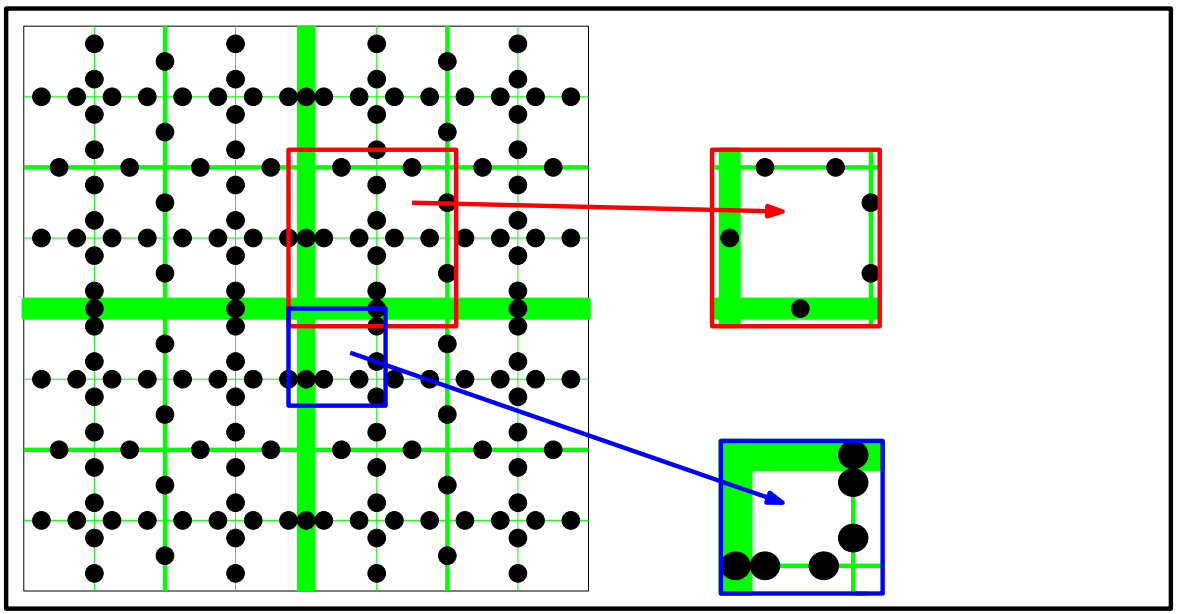
Auf einer Level-i Linie gibt es $2^{i+1}m$ gleichmäßig verteilte Portale.



Portale

Konstruktion der Portale

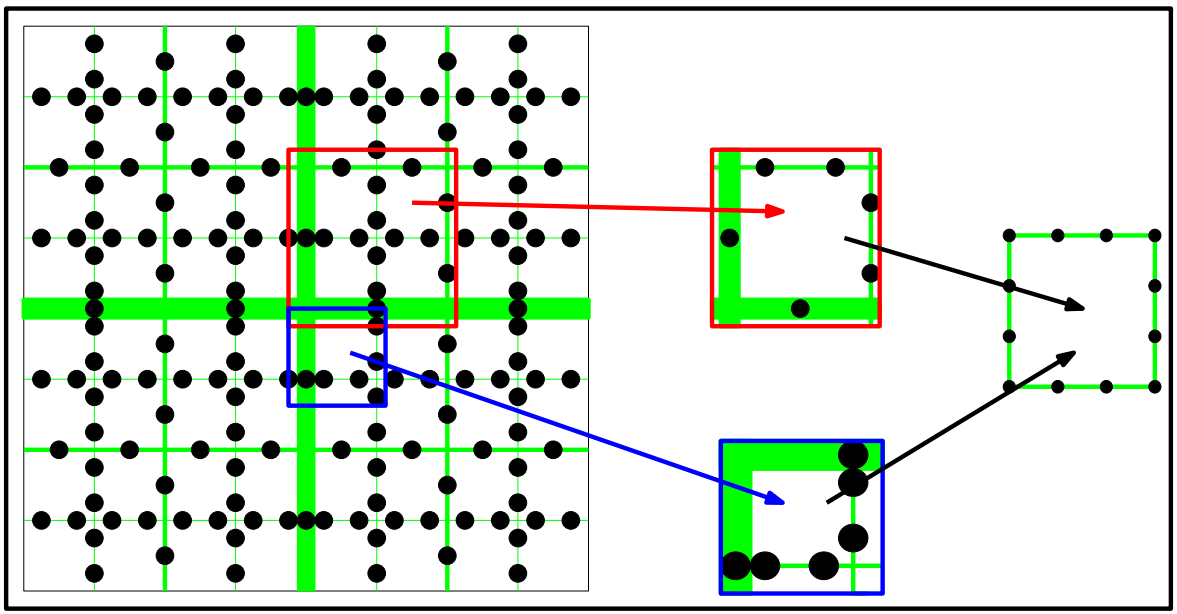
Auf einer Level-i Linie gibt es $2^{i+1}m$ gleichmäßig verteilte Portale.



Portale

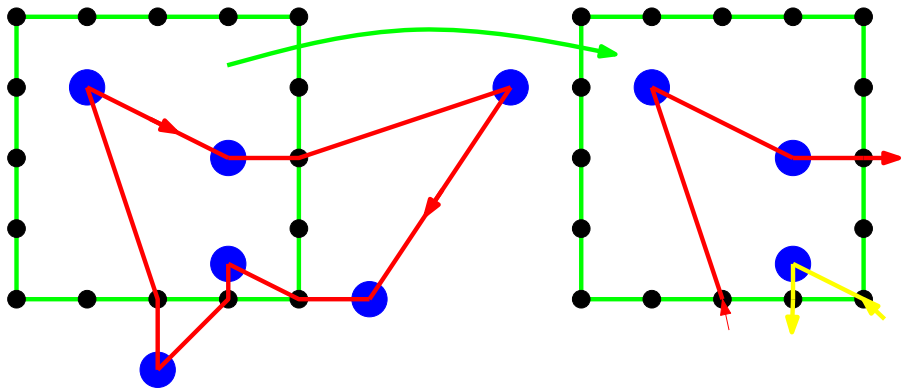
Konstruktion der Portale

Auf einer Level-i Linie gibt es $2^{i+1}m$ gleichmäßig verteilte Portale.

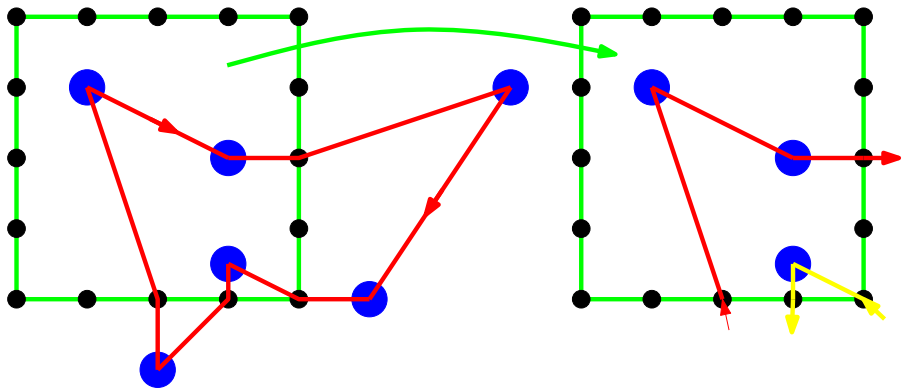


Jede Zelle hat max $4m + 4$ Portale

Interfaces



Interfaces



Definition

Ein Interface $\mathcal{I}$ einer Zelle ist eine Folge von Portalen, die die Ein-/Austrittreihenfolge einer möglichen Tour durch die Zelle beschreibt.

k-light Portal-Respecting Tour

Definition

Eine **k-light Portal-Respecting Tour** ist eine Handlungsreise,

- die das Gitter nur an Portalpunkten kreuzt
- die jede Seite einer Zelle maximal k-mal kreuzt

k-light Portal-Respecting Tour

Definition

Eine **k-light Portal-Respecting Tour** ist eine Handlungsreise,

- die das Gitter nur an Portalpunkten kreuzt
- die jede Seite einer Zelle maximal k-mal kreuzt

Satz 2

Eine optimale Portal-Respecting Tour ist $(m+2)$-light.

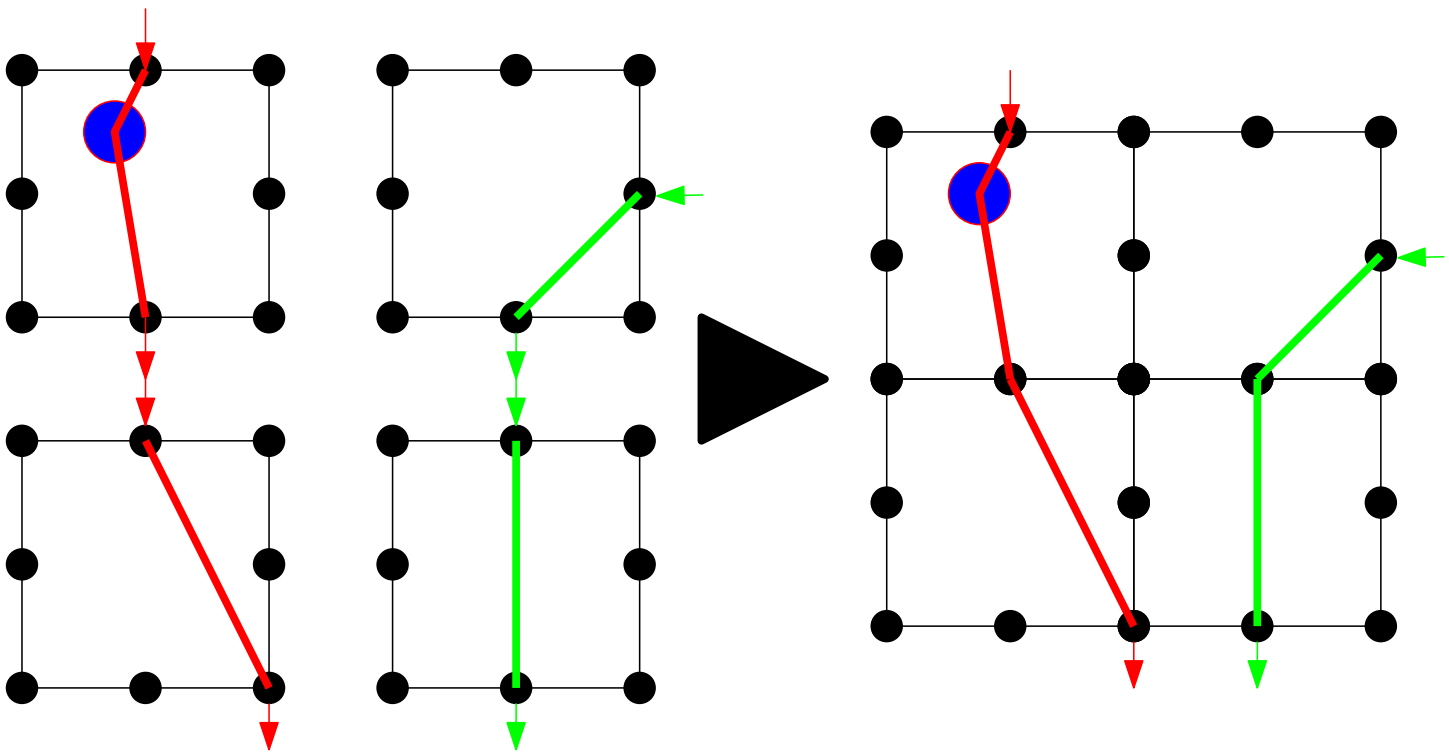
Schritt 3: Dynamische Programmierung

Vorgehen

- Berechnung bottom-up im Quadtree
- Berechne pro Interface für jede 1-Zelle die kürzesten Wege, die Tourknoten und Interface-Portalknoten verbinden.
- Wähle aus Kombinationen von den 4 Level-(i-1) Vorgängerinterfaces die das Level-i Interface ergeben das beste aus.
- Es dürfen keine Kreise entstehen
- Zellen in denen ein Tourknoten liegt müssen min 1 mal betreten werden

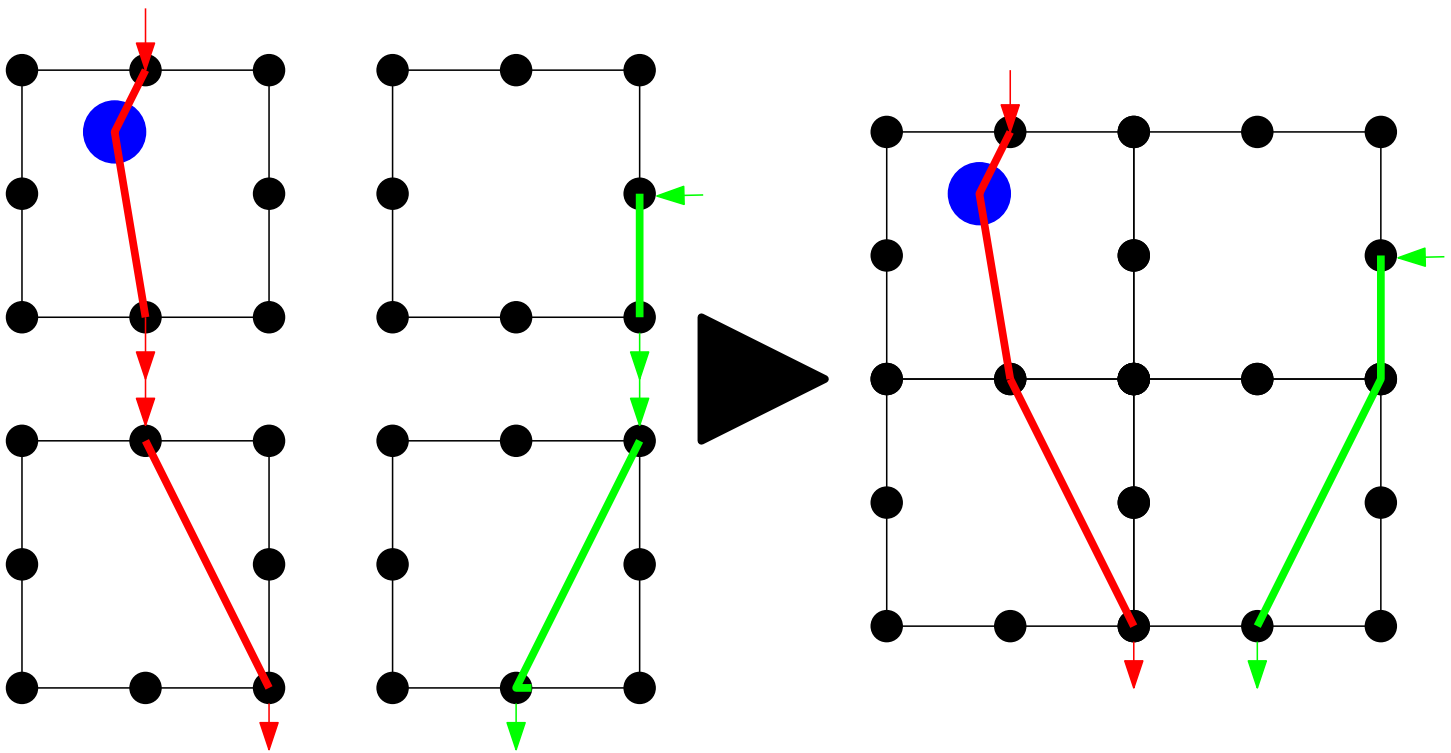
Schritt 3: Dynamische Programmierung

Beispiel



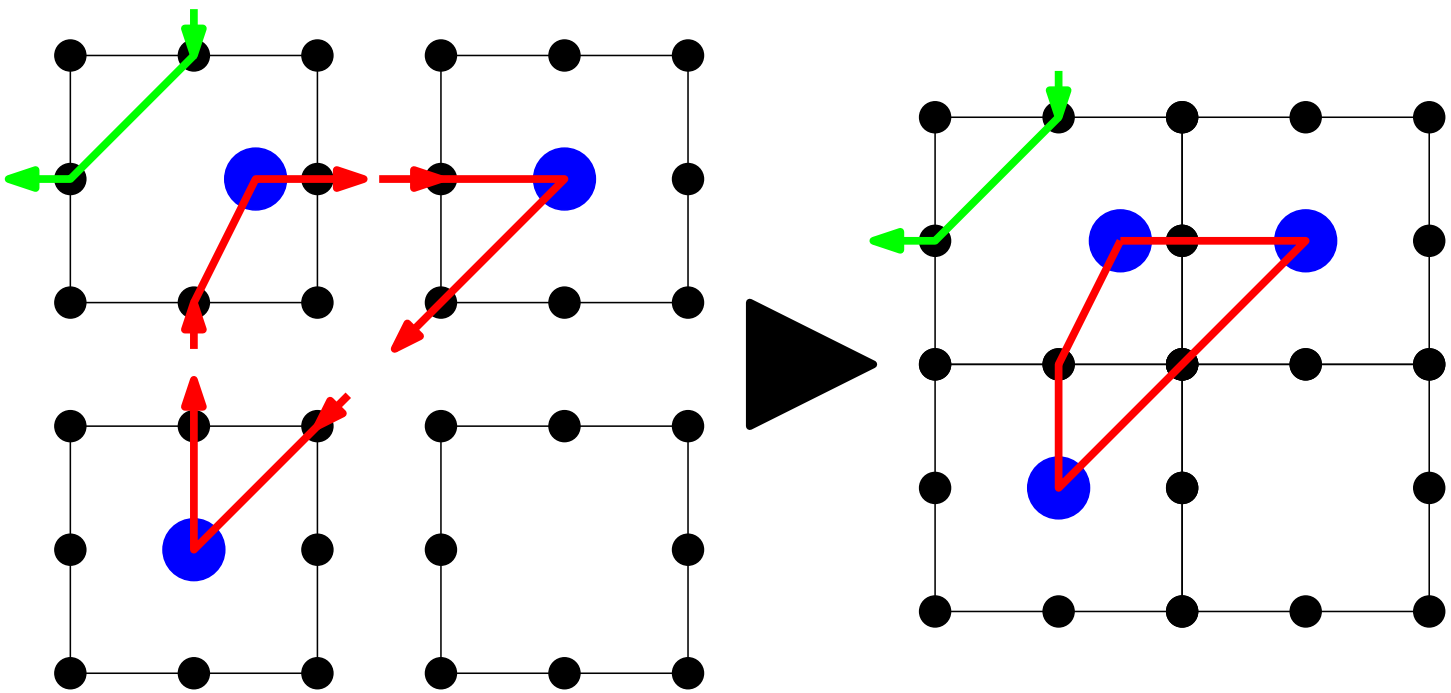
Schritt 3: Dynamische Programmierung

Beispiel



Schritt 3: Dynamische Programmierung

Beispiel



Schritt 3: Dynamische Programmierung

Details

- Anzahl möglicher Interfaces einer Zelle: $m^{O(k)}k!$
- Laufzeit: $n^4 \cdot m^{O(k)}k! = n^4(\log n)^{O(1/\varepsilon)}$ für $m \in \Omega(\log(n)/\varepsilon)$, $k \in \Omega(1/\varepsilon)$

Schritt 3: Dynamische Programmierung

Details

- Anzahl möglicher Interfaces einer Zelle: $m^{O(k)}k!$
- Laufzeit: $n^4 \cdot m^{O(k)}k! = n^4(\log n)^{O(1/\varepsilon)}$ für $m \in \Omega(\log(n)/\varepsilon)$, $k \in \Omega(1/\varepsilon)$

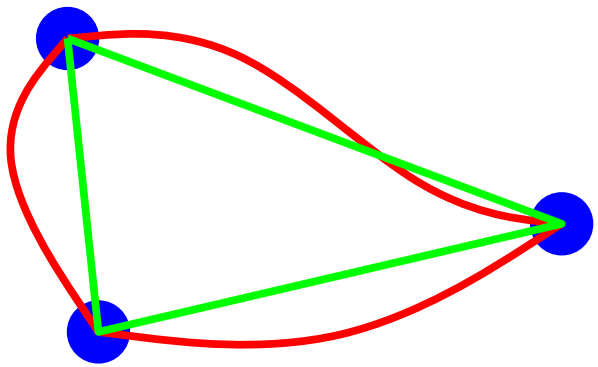
Satz 3

Eine **k-light Portal-Respecting Tour** liefert für $m \in \Omega(\log(n)/\varepsilon)$, $k \in \Omega(1/\varepsilon)$ eine ε-Approximation.

Lemma 0

Lemma 0

Eine optimale Handlungsreise besteht aus Geradenstücken.



Beweis Satz 2

Satz 2

Eine optimale **Portal-Respecting Tour** ist $(m+2)$-light.

Beweis Satz 2

Satz 2

Eine optimale **Portal-Respecting Tour** ist $(m+2)$-light.

Beweis

Eine optimale **Portal-Respecting Tour** benutzt kein Portal mehr als 2 mal.
Eine Zelle hat Maximal $m+2$ Portale pro Seite $\Rightarrow$ Behauptung

Beweisübersicht Satz 1

Satz 1

Eine optimale **Portal-Respecting Tour** liefert eine ε-Approximation.

Beweisübersicht Satz 1

Satz 1

Eine optimale **Portal-Respecting Tour** liefert eine ε-Approximation.

Satz 1A

$\mathbb{E}_{a,b}[Opt_{a,b,m} - Opt] \leq 2 \log(L)/m \cdot Opt$ mit

- Opt die optimale Tourlänge
- $Opt_{a,b,m}$ die optimale Portal-Respecting Tourlänge

Beweisübersicht Satz 1

Satz 1

Eine optimale **Portal-Respecting Tour** liefert eine ε-Approximation.

Satz 1A

$\mathbb{E}_{a,b}[Opt_{a,b,m} - Opt] \leq 2\log(L)/m \cdot Opt$ mit

- Opt die optimale Tourlänge
- $Opt_{a,b,m}$ die optimale Portal-Respecting Tourlänge

Lemma 1

$\mathbb{E}_{a,b}[d_{a,b,m}(u,v) - d(u,v)] \leq 2\log(L)/m \cdot d(u,v)$

- $d_{a,b,m}(u,v)$ Portal-Respecting Abstand von u und v

Beweis Satz 1

Erinnerung an Satz 1A

$\mathbb{E}_{a,b}[Opt_{a,b,m} - Opt] \leq 2\log(L)/m \cdot Opt$ mit

- $Opt_{a,b,m}$ die optimale Portal-Respecting Tourlänge

Beweis Satz 1

- Für $m > a \cdot 4\log(n)/\varepsilon$ gilt:
  $2\log(L)/m \leq a \cdot \varepsilon$
- **Satz 1A** $\Rightarrow E_{a,b}[Opt_{a,b,m} - Opt] \leq a \cdot \varepsilon Opt$
- Markov-Ungelichung $\Rightarrow \mathbb{P}[Opt_{a,b,m} - Opt > \varepsilon Opt] < 1/a$
- $\Rightarrow \mathbb{P}[Opt_{a,b,m} - Opt \leq \varepsilon Opt] \geq 1/a$

Lemma 2

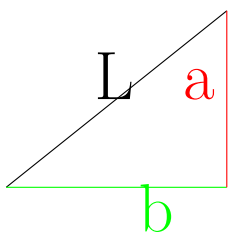
Lemma 2

Sei l eine Gitterlinie, π eine optimale Handlungsreise und $t(\pi, l)$ die Anzahl der Schnitte von π mit l:
$\sum_{l:\text{vertikal}} t(\pi, l) + \sum_{l:\text{horizontal}} t(\pi, l) \leq 2cost(\pi)$

Beweis

Es genügt die Verbindungsgeraden der Punkte zu betrachten:

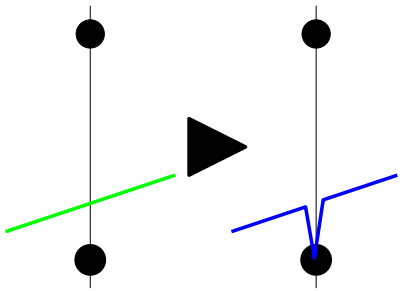
- Strecke L waagrecht bzw senkrecht: $t(L, l) \leq cost(L)$
- Für beliebige Strecke L gilt:
  $cost(a), cost(b) \leq L \Rightarrow cost(a) + cost(b) < 2cost(L)$



Beweis von Lemma 1

Lemma 1

$\mathbb{E}_{a,b}[d_{a,b,m}(u,v) - d(u,v)] \leq 2 \log L/m \cdot d(u,v)$



Beweis

- Die Strecke $\overline{uv}$ Kreuzt das Gitter höchstens $2d(u,v)$ mal
- Für jede Kreuzung mit Level-i Linie füge "Abstecher" ein. Umweg maximal Portalabstand $m_i = L/(m2^{i+1})$
- Erwarteter Umweg:
  $\sum_{i=0}^{\log L-1} \mathbb{P}[\text{Level-i Linie}] m_i = \sum_{i=0}^{\log L-1} \frac{2^{i+1}}{L} \frac{L}{m2^{i+1}} = \frac{\log L}{m}$
- Linearität Erwartungswert $\Rightarrow$ Behauptung

Beweis von Satz 1A

Satz 1

$\mathbb{E}_{a,b}[Opt_{a,b,m} - Opt] \leq 2\log(L)/mOpt$ mit

- Opt die optimale Tourlänge
- $Opt_{a,b,m}$ die optimale Portal-Respecting Tourlänge

Beweis

- Zerlege Optimale Tour in einzelne Strecken die Punkte aus S verbindet
- Wende **Lemma 1** auf jede Teilstrecke an
- Linearität Erwartungswert $\Rightarrow$ Behauptung

Beweis von Satz 3

Satz 3

Eine **k-light Portal-Respecting Tour** liefert für $m \in \Omega(\log(n)/\varepsilon)$, $k \in \Omega(1/\varepsilon)$ eine ε-Approximation.

Folgt analog **Satz 1** aus:

Beweis von Satz 3

Satz 3

Eine **k-light Portal-Respecting Tour** liefert für $m \in \Omega(\log(n)/\varepsilon)$, $k \in \Omega(1/\varepsilon)$ eine ε-Approximation.

Folgt analog **Satz 1** aus:

Satz 3A

$\mathbb{E}_{a,b}[Opt_{a,b,k,m} - Opt] \leq (2 \log L/m \cdot \frac{6}{k-5}) Opt$ mit

- $Opt_{a,b,k,m}$ die optimale k-light Portal-Respecting Tourlänge

Das Patching Lemma

Das Patching Lemma

- Sei S ein Liniensegment der Länge s
- Sei π ein geschlossener Pfad der S mindestens 3 mal kreuzt
- Es ist möglich π in geschlossenen Pfad π' umzuwandeln, der
  - S nur 2 mal kreuzt,
  - zusätzlich Liniensegmente auf S der Gesamtlänge $< 3s$ zu π hinzufügt.

Beweis von Satz 3A

Satz 3A

$\mathbb{E}_{a,b}[Opt_{a,b,k,m} - Opt] \leq (2 \log L/m \cdot \frac{6}{k-5}) Opt$ mit

- $Opt_{a,b,k,m}$ die optimale k-light Portal-Respecting Tourlänge

Beweisstrategie

Transformiere Optimale Tour in k-light PRT:

- Betrachte Segmente in absteigender Reihenfolge der Level ($\log L - 1$ bis 0):
  - Wenn Segment überladen: **Patching Lemma** $\Rightarrow$ 2 Kreuzungen
  - Segment überladen: mehr als $s = k - 4$ Kreuzungen mit der Tour
- Wende **Satz 1** an um die Tour in PRT umzuwandeln

Kosten für das Anwenden des Patching Lemmas I

- Es wird nur der Fall für vertikale Gitterlinien betrachtet
- $X_{l,j}(b)$: Anzahl überladener Level-j Segmente auf l
- $E_{l,i}(a)$: Erhöhung der Tourkosten, falls l Level-i hat
- $Y_{l,b}(a)$: Erhöhung der Tourkosten verursacht durch l, falls Schift a,b ist
- $\sum_{j\geq 0} X_{l,j}(b) \leq \frac{t(\pi,l)}{s-1}$ (s=k-4)
- $E_{l,i}(a) \leq \sum_{j\geq i+1} X_{l,j}(b)\frac{3L}{2^j}$
- $\mathbb{E}[Y_{l,b}] = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}[l \text{ hat Level i}]E_{l,i} \leq \frac{3t(\pi,l)}{s-1}$

Kosten für das Anwenden des Patching Lemmas II

- Analog für horizontale Gitterlinien
- Zusätzlich kosten um nur k-Kreuzungen pro Gitter zu erhalten daher: $\frac{3t(\pi,l)}{s-1} + \frac{3t(\pi,l)}{s-1} \leq_{\text{Lemma 2}} 6\frac{cost(\pi)}{s-1}$
- Anwenden von **Satz 1** auf diese Tour $\Rightarrow$ Behauptung