Algorithmentechnik - Übung 7

8. Sitzung

Tanja Hartmann | 04. Februar 2010

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK, PROF. DR. DOROTHEA WAGNER

Seminar im Sommersemester 2010

Algorithmisches in der Geometrie
Präsentationen, das Wortproblem und formale Sprachen

- Endlich präsentierte Gruppe $G = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_n \rangle$.
- Wortproblem in G: Ist das Wort w über $\{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}\}$ das neutrale Element in G?
- Wortproblem zu einer Grammatik $\mathcal{G} = (\Sigma, V, S, R)$: Liegt $w \in \Sigma^*$ in der von $\mathcal{G}$ erzeugten Sprache?

unsere Ziele

- Wortproblem in $G \rightsquigarrow$ Wortproblem einer Grammatik $\mathcal{G}$
- G endlich $\Leftrightarrow \mathcal{G}$ ist regulär
- G fast frei $\Leftrightarrow \mathcal{G}$ ist kontextfrei

Seminar im Sommersemester 2010

Algorithmisches in der Geometrie
Präsentationen, das Wortproblem und formale Sprachen

Voraussetzungen

Grundlagen zu Gruppen (z.B. aus der Algebra I)

Vorbesprechung in einer Woche

Kurze Vorstellung und Vergabe der Themen am

Donnerstag, 11.2.2010, 13:15 Uhr im S33 (Gebäude 20.30)

Weitere Informationen unter:

`http://www.math.kit.edu/iag3/lehre/semalgogeo2010s`

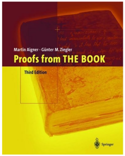
Werbeblock - Veranstaltungen 2010

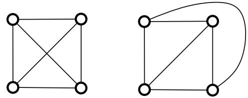
Vorlesungen

- Algorithmen für *Routenplanung* (mit Übung)
- Algorithmen für *planare Graphen* (mit Übung)
- Algorithmen für *Ad-hoc- und Sensornetzwerke*
- Algorithmische *Spieltheorie*
- Approximations- und Online-Algorithmen

Seminare

- Proofs from The Book
  (Anmeldung ab sofort bei Marcus Krug, Raum 317)

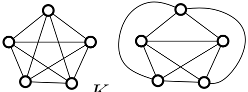




$K_{4,4}$

G planar $\Rightarrow m \leq 3n - 6$

hier: $n = 5, m = 10 > 9$



$K_{5,5}$

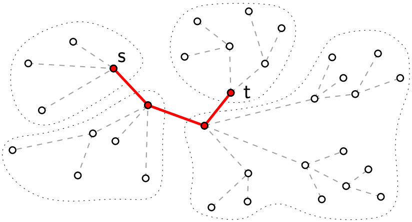
Werbeblock - Hiwi-Stellen 2010

FYS - Feasibility Study zu dynamischen Gomory-Hu-Bäumen

- **Stichworte:** multiterminale Flüsse/Schnitte, Minimale Schnittbasen
- **Zielsetzung:** Entwicklung dynamischer Updates
- **State of the art:**
  - $n-1$ Flussberechnungen für statischen GH-Baum, sparen durch Steiner-Schnitte in *ungewichtetem* Graph
  - viele Erkenntnisse zu *global* minimalen Schnitten

Wenige Erkenntnisse zu dynamischen Gomory-Hu-Bäumen
⇝ großes Potential für Neues!

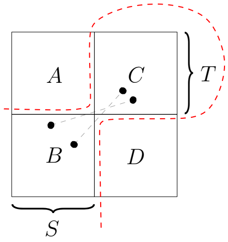
Hiwi-Stellen zu vergeben!



Min. Schnittbasis - Problem 1 [Kap. 7.1]
(Approximationsalgos relativer Gütegarantie)

- Kantenraum $\mathcal{E}$ ist $GF(2)$-VR der Dimension $|E| =: m$.
- Schnittraum $\mathcal{C}^*$ ist UVR von $\mathcal{E}$, Schnitte char. durch **kreuzende Kanten**.
- $c(B) := \sum_{b_i \in B} c(b_i)$ mit $c(b_i)$ **Anzahl Kanten**, die Schnitt b_i kreuzen.

(a) Formulieren Sie die **Partitionendarstellung** des Schnitts $s_3 := s_1 \oplus s_2$ mit $s_1 := (S, V \setminus S)$, $s_2 := (T, V \setminus T)$ in Abhängigkeit der Seiten S und T.



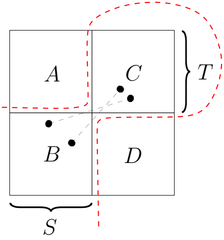
- $s_3 := (s_1 \cup s_2) \setminus (s_1 \cap s_2)$.
- $s_1 = \{e \in E | e$ hat genau ein Ende in $S\}$,
  $s_2 = \{e \in E | e$ hat genau ein Ende in $T\}$
- $s_1 \cap s_2 = \{e \in E | e$ hat jeweils genau ein Ende in S und $T\} \not\subseteq s_3$
  $\Rightarrow B \cup C$ und $A \cup D$ werden nicht zerschnitten
- Übrige Kanten in $s_1 \cup s_2$ bleiben erhalten $\Rightarrow A \cup D$ gegenüber von $B \cup C$
  $s_3 = ((S \setminus T) \cup (T \setminus S), (S \cap T) \cup (V \setminus T \cap V \setminus S))$

Min. Schnittbasis - Problem 1 [Kap. 7.1]
(Approximationsalgos relativer Gütegarantie)

- Kantenraum $\mathcal{E}$ ist $GF(2)$-VR der Dimension $|E| =: m$.
- Schnittraum $\mathcal{C}^*$ ist UVR von $\mathcal{E}$, Schnitte char. durch **kreuzende Kanten**.
- $c(B) := \sum_{b_i \in B} c(b_i)$ mit $c(b_i)$ **Anzahl Kanten**, die Schnitt b_i kreuzen.

(b) Zeige: Für je zwei Knoten $u, v \in V$ und jede Basis B von $\mathcal{C}^*$ gilt, dass mindestens ein Schnitt aus B die Konten u und v trennt.

- Betrachte den Schnitt $(\{u\}, V \setminus \{u\})$
  $\leadsto$ muss als Linkombi darstellbar sein
- Annahme:
  In B gibt es **keinen** Schnitt, der u, v trennt
  $\Rightarrow (\{u\}, V \setminus \{u\})$ nicht kombinierbar, denn ...
- Sei $s_3 := s_1 \oplus s_2$ und s_1, s_2 trennen u, v nicht



Min. Schnittbasis - Problem 1 [Kap. 7.1]
(Approximationsalgos relativer Gütegarantie)

Ausgabe : Basis B' des Schnittraumes $\mathcal{C}^*$ von G

Wähle einen Knoten $v \in V$
$B' \leftarrow \emptyset$
forall $v' \in V \setminus \{v\}$ **do**
  $b_{v'} \leftarrow \{e \in E | e \text{ inzident zu } v'\}$
  $B' \leftarrow B' \cup \{b_{v'}\}$
Return B'

(c) Zeige: Obiger Algo ist ein polynomieller 2-Approxalgo für MIN-SCHNITT-BASIS (Hinweis: B' ist Basis).

Sei B minimale Basis:

- $\{u, w\}$ kreuzt in B' genau b_u, b_w $\Rightarrow$ trägt 2 bei
- $\{u, w\}$ kreutz mind. einen Schnitt in B (nach (b)) $\Rightarrow$ trägt ≥ 1 bei
- $\Rightarrow c(B') \leq 2\,c(B)$ (Laufzeit in $O(2|E|)$)

APPROX-SUBSET-SUM - Prob. 2 [Kap. 7.2] (FPAS)

Eingabe : S, t, ϵ
Ausgabe : Teilmengensumme z'

1 $n \leftarrow |S|$, $L_0 \leftarrow \langle 0 \rangle$
2 **for** $i = 1, \ldots, n$ **do**
3     $L_i \leftarrow$ MERGE-LISTS$(L_{i-1}, L_{i-1} + x_i)$
4     $L_i \leftarrow$ TRIM$(L_i, \epsilon/2n)$
5   Entferne alle Elemente größer t aus L_i
6 Return größtes (letztes) Element z' in L_n

Problem SUBSET-SUM

- Gegeben: $S := \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}$
- Gesucht: $M \subseteq S$, mit Summe z aller Elemente in M maximal, aber $\leq t$

Zeige: Algo ist FPAS für optimales z.

- (Ohne Zeile 4) L_i enthält Summe $\leq t$ jeder Teilmenge aus $\mathcal{P}(\{x_1, \ldots, x_i\})$
- $P_i := \{\sum_{m \in M} m \leq t | M \in \mathcal{P}(\{x_1, \ldots, x_i\})\}$
- $\forall \gamma \in P_i : \exists \hat{\gamma} \in P_{i-1}$, so dass $\gamma = \hat{\gamma} + x$ mit $x \in \{0, x_i\}$ gilt   (1)

APPROX-SUBSET-SUM - Prob. 2 [Kap. 7.2] (FPAS)

Eingabe : $L := \langle y_1 \ldots, y_m \rangle, \delta$

Ausgabe : verkürzte Liste L'

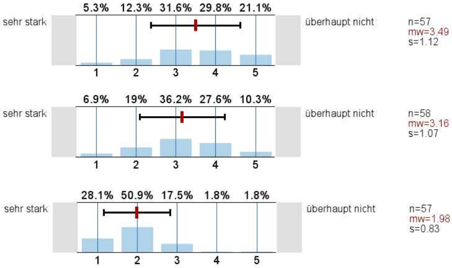
```
L' ← ⟨y_1⟩
last ← y_1
for i = 2, ..., m do
    if y_i > last · (1 + δ) then
                                        // y_i ≥ last, da L sortiert
        Füge y_i an L' an
        last ← y_i
Return L'
```

Lösung an der Tafel...(siehe Lösungsvorschlag)

Ergebnisse der Evaluierung

Fragen zum Übungsleiter

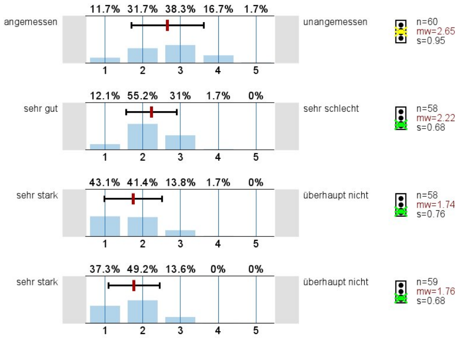
- Verweis auf aktuelle Forschung?
- Verweis Theorie-Praxis?
- Kompetente Wirkung?



Ergebnisse der Evaluierung

Allgemeines

- Arbeitsaufwand . . .
- Strukturierung
- Engagement + Motivation
- Eingehen auf Fragen



Gleichverteiltes JA/NEIN - Prob. 4 [Kap. 8]
(Randomisierte Algorithmen)

- Gegeben: RANDOM $\rightarrow$ Wert 1 mit W'keit p, Wert 0 mit W'keit $(1-p)$
- Gesucht: ALGO $\rightarrow$ Wert 1 mit W'keit $1/2$, Wert 0 mit W'keit $1/2$
  Erwartete Laufzeit in Abhängigkeit von p

- Symmetrie durch Multiplikation: $p(1-p) = (1-p)p$
  $\Rightarrow$ UND-Verknüpfung Elementarereignisse
- $2\times$ RANDOM: x erste Rückgabe, y zweite Rückgabe
  $P(\{x=0, y=1\}) = (1-p)p$
  $P(\{x=1, y=0\}) = p(1-p)$

Gleichverteiltes JA/NEIN - Prob. 4 [Kap. 8]
(Randomisierte Algorithmen)

- Gegeben: RANDOM $\rightarrow$ Wert 1 mit W'keit p, Wert 0 mit W'keit $(1-p)$
- Gesucht: ALGO $\rightarrow$ Wert 1 mit W'keit $1/2$, Wert 0 mit W'keit $1/2$
  Erwartete Laufzeit in Abhängigkeit von p

```
while x = y do
    x ← BIASED-RANDOM
    y ← BIASED-RANDOM
return x
```

- Erwartete Laufzeit bestimmt durch Anzahl Schleifendurchläufe
- Schleifendurchlauf = Bernoulli-Experiment mit W'keit $2p(1-p)$ auf Erfolg
- Gesamte Schleife = unabhängige Bernoulli-Experimente mit geometrischer Verteilung
  $X =$ Anzahl Durchläufe bis zum ersten Erfolg
  $E(X) = 1/(2p(1-p)) \Rightarrow$ Erwartete Laufzeit in $\Theta(1/(2p(1-p)))$