# Übungen zu Algorithmentechnik Wintersemester 09/10

7. Sitzung

Thomas Pajor | 21. Januar 2009

# Infos zur Klausur

## Klausurtermine

- Hauptklausur: Montag, 1. März 2010, 9:00 Uhr morgens
- Nachklausur: Freitag, 16. April 2010, 16:00 Uhr nachmittags

**Verbindlich:** http://www.informatik.kit.edu/klausuren.php

# Infos zur Klausur

## Klausurtermine

- Hauptklausur: Montag, 1. März 2010, 9:00 Uhr morgens
- Nachklausur: Freitag, 16. April 2010, 16:00 Uhr nachmittags

**Verbindlich:** http://www.informatik.kit.edu/klausuren.php

## Anmeldefrist Hauptklausur

- Bis spätestens Montag, 22.02.2010 im Studierendenportal
- Keine Spätanmeldungen zugelassen!

# Infos zur Klausur

## Klausurtermine

- Hauptklausur: Montag, 1. März 2010, 9:00 Uhr morgens
- Nachklausur: Freitag, 16. April 2010, 16:00 Uhr nachmittags

**Verbindlich:** http://www.informatik.kit.edu/klausuren.php

## Anmeldefrist Hauptklausur

- Bis spätestens Montag, 22.02.2010 im Studierendenportal
- Keine Spätanmeldungen zugelassen!

## Klausurmodalitäten

- 60 Minuten, 60 Punkte (Merkregel: 1 Punkt pro Minute)
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine
- Relevanter Stoff: Vorlesung, Übung

# Wiederholung: Lineare Programme

## Lineares Programm

Zu einer Menge $x_1, \ldots, x_n$ von Variablen wollen wir eine bezüglich der Variablen lineare Zielfunktion $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$ minimieren oder maximieren unter Einhaltung einer Menge von $m$ linearen Nebenbedingungen der Form

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 + \ldots + a_{i,n} x_n \begin{array}{c} \geq \\ = \\ \leq \end{array} b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

# Wiederholung: Lineare Programme

## Lineares Programm

Zu einer Menge $x_1, \ldots, x_n$ von Variablen wollen wir eine bezüglich der Variablen lineare Zielfunktion $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$ minimieren oder maximieren unter Einhaltung einer Menge von $m$ linearen Nebenbedingungen der Form

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \ldots + a_{i,n}x_n \begin{array}{c} \geq \\ = \\ \leq \end{array} b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

## Normalform

Ein lineares Program ist in Normalform, wenn es folgende Gestalt hat:

MAXIMIERE $c^\top x$ unter den Nebenbedingungen $Ax \leq b$ und $x \geq 0$.
Dabei sind $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$.

# Wiederholung: Lineare Programme

Karlsruher Institut für Technologie

**Herleiten der Normalform**

Jedes lineare Programm kann in ein äquivalentes lineares Programm in Normalform überführt werden.

# Wiederholung: Lineare Programme

## Herleiten der Normalform

Jedes lineare Programm kann in ein äquivalentes lineares Programm in Normalform überführt werden.

## Zulässigkeitsbereich

Der Bereich zulässiger Lösungen $x$, die die Nebenbedingungen erfüllen ist definiert durch

$$M := \{Ax \leq b, x \geq 0\}.$$

Dabei ist $M$ ein Polyeder. Die Seiten von $M$ werden dabei durch die Halbräume bestimmt, die durch die Ungleichungen induziert werden.

Ist $M$ beschränkt, so heißt $M$ *Polytop*.

# Wiederholung: Lineare Programme

**Lösbarkeit**

Für die Lösbarkeit eines linearen Programms gibt es folgende Möglichkeiten:

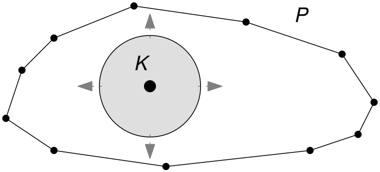
- Das Polyeder $M$ ist leer, also $M = \emptyset$
  $\Rightarrow$ Das LP ist unlösbar.
- Das Polyeder $M$ ist in Richtung der Optimierungsfunktion unbeschränkt, also $\sup\{c^\top x \mid x \in M\} = \infty$
  $\Rightarrow$ Das LP ist unlösbar.
- Sonst:
  Das LP ist lösbar mit Optimallösung $x^* \in M$.

# Aufgabe 1

## Größter Kreis in konvexem Polygon

**Gegeben:** Polygon $P \subseteq \mathbb{R}^2$ begrenzt durch $n$ Seiten.

**Gesucht:** Größtmöglicher Kreis $K \subseteq \mathbb{R}^2$, der vollständig in $P$ enthalten ist, d. h. $K \subseteq P$ und $r$ maximal.

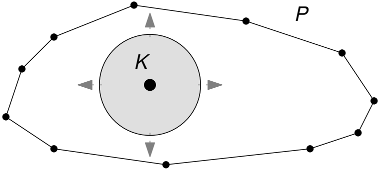


# Aufgabe 1

## Größter Kreis in konvexem Polygon

**Gegeben:** Polygon $P \subseteq \mathbb{R}^2$ begrenzt durch $n$ Seiten.

**Gesucht:** Größtmöglicher Kreis $K \subseteq \mathbb{R}^2$, der vollständig in $P$ enthalten ist, d. h. $K \subseteq P$ und $r$ maximal.



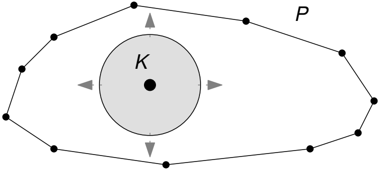

(a) Geben Sie ein lineares Programm zur Lösung des Problems für ein Polygon $P$ an und erläutern Sie dabei die Zielfunktion, sowie alle Variablen und Nebenbedingungen.

# Aufgabe 1

## Größter Kreis in konvexem Polygon

**Gegeben:** Polygon $P \subseteq \mathbb{R}^2$ begrenzt durch $n$ Seiten.

**Gesucht:** Größtmöglicher Kreis $K \subseteq \mathbb{R}^2$, der vollständig in $P$ enthalten ist, d. h. $K \subseteq P$ und $r$ maximal.




(b) Lässt sich das auf höhere Dimensionen verallgemeinerte Problem (das heißt, wir suchen nach der größtmöglichen Kugel, die in einem konvexen Polytop enthalten ist) ebenfalls durch ein lineares Programm lösen? Begründen Sie Ihre Antwort.

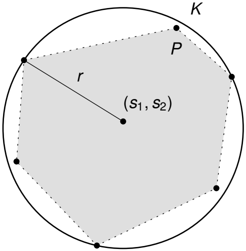
# Aufgabe 1

## Größter Kreis in konvexem Polygon

**Gegeben:** Polygon $P \subseteq \mathbb{R}^2$ begrenzt durch $n$ Seiten.

**Gesucht:** *Kleinstmöglicher* Kreis $K \subseteq \mathbb{R}^2$ so, dass das Polygon vollständig in $K$ enthalten ist, d. h. $P \subseteq K$ und $r$ minimal.

(c) Können Sie dieses Problem ebenfalls durch ein lineares Programm (ähnlich zu Aufgabe (a) lösen? Begründen Sie Ihre Antwort.



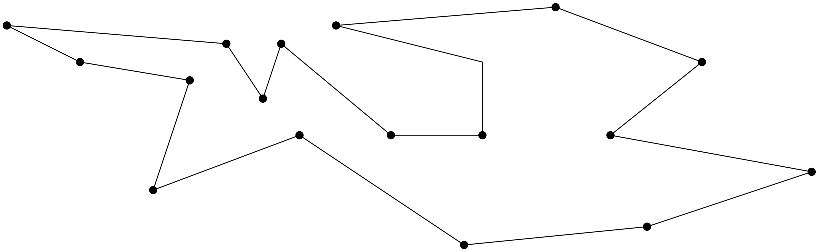
# Aufgabe 2

## Euklidischer Geschäftsreisender

**Gegeben:** Punkte $p_i \in P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ in der Ebene mit Koordinaten $(x_i, y_i)$ für jeden Punkt $p_i \in P$.

**Gesucht:** Kürzeste Rundtour, die alle Knoten mindestens einmal besucht.

Modellieren Sie das Problem als (gegebenenfalls) ganzahliges lineares Programm. Erklären Sie hierbei Zielfunktion, alle Variablen und alle Nebenbedingungen.



# Wiederholung: Dualität

Zu einem primalen linearen Programm **PP** der Form

$$\textbf{maximiere } c^\top x$$

unter den Nebenbedingungen

$$Ax \leq b \qquad \text{und} \qquad x \geq 0$$

mit $x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ ist das *duale* lineare Programm **DP** definiert durch

$$\textbf{minimiere } y^\top b$$

unter den Nebenbedingungen

$$A^\top y \geq c \qquad \text{und} \qquad y \geq 0$$

mit $y \in \mathbb{R}^m$. Der Zulässigkeitsbereich von **DP** sei $N$.

# Aufgabe 3

## Dualität, Ernährungsoptimierung

**Gegeben:**

- Menge von wichtigen Nährstoffen $1, \ldots, m$.
- Minimaler täglicher Bedarf $b_i$ für jeden Nährstoff.
- Menge $n$ von Produkten $1, \ldots, n$.
- Preis $c_j$ für jedes Produkt (pro Stück).
- Für jeden Nährstoff $i$ und Produkt $j$ Anteil $a_{ij}$ von $i$ in $j$.

**Ziel:** Die Ernährungskosten auf ein notwendiges Minimum zu beschränken.

# Aufgabe 3

## Dualität, Ernährungsoptimierung

**Gegeben:**

- Menge von wichtigen Nährstoffen $1, \ldots, m$.
- Minimaler täglicher Bedarf $b_i$ für jeden Nährstoff.
- Menge $n$ von Produkten $1, \ldots, n$.
- Preis $c_j$ für jedes Produkt (pro Stück).
- Für jeden Nährstoff $i$ und Produkt $j$ Anteil $a_{ij}$ von $i$ in $j$.

**Ziel:** Die Ernährungskosten auf ein notwendiges Minimum zu beschränken.

(a) Formulieren Sie das beschriebene Optimierungsproblem als lineares Programm **PP**.

# Aufgabe 3

## Dualität, Ernährungsoptimierung

**Gegeben:**

- Menge von wichtigen Nährstoffen $1, \ldots, m$.
- Minimaler täglicher Bedarf $b_i$ für jeden Nährstoff.
- Menge $n$ von Produkten $1, \ldots, n$.
- Preis $c_j$ für jedes Produkt (pro Stück).
- Für jeden Nährstoff $i$ und Produkt $j$ Anteil $a_{ij}$ von $i$ in $j$.

**Ziel:** Die Ernährungskosten auf ein notwendiges Minimum zu beschränken.

(b) Formulieren Sie das zu **PP** duale lineare Programm **DP**. Geben Sie eine sinnvolle Interpretation des dualen Programms an und überlegen Sie sich dabei, wer ein Interesse daran haben könnte, das duale Programm zu optimieren.

# Wiederholung: Dualitätssätze

### Schwacher Dualitätssatz

(i) **DP** beschränkt **PP** von oben:
Für alle $x \in M, y \in N$ gilt $c^\top x \leq b^\top y$

(ii) Wenn es $x \in M$ und $y \in N$ gibt, dann sind **PP** und **DP** lösbar.

(iii) Bei Gleichheit der Zielfunktion ist Lösung optimal:
$x^* \in M$ und $y^* \in N$ mit $c^\top x^* = b^\top y^*$ dann sind $x^*$ und $y^*$ jeweils optimale Lösungen.

# Wiederholung: Dualitätssätze

## Schwacher Dualitätssatz

(i) **DP** beschränkt **PP** von oben:
Für alle $x \in M, y \in N$ gilt $c^\top x \leq b^\top y$

(ii) Wenn es $x \in M$ und $y \in N$ gibt, dann sind **PP** und **DP** lösbar.

(iii) Bei Gleichheit der Zielfunktion ist Lösung optimal:
$x^* \in M$ und $y^* \in N$ mit $c^\top x^* = b^\top y^*$ dann sind $x^*$ und $y^*$ jeweils optimale Lösungen.

## Starker Dualitätssatz

(i) **PP** ist lösbar genau dann wenn **DP** lösbar ist.

(ii) Sind **PP** und **DP** lösbar, so gilt

$$\max\{c^\top x \mid x \in M\} = \min\{b^\top y \mid y \in N\}.$$

# Dualitätssätze: Konsequenzen

## Konsequenzen der Dualitätssätze

**Gegeben:**

**PP**: MAXIMIERE $c^\top x$ unter $Ax \leq b$ und $x \geq 0$.
**DP**: MINIMIERE $b^\top y$ unter $A^\top y \geq c$ und $y \geq 0$.

Dann tritt immer genau einer der folgenden Fälle ein:

1. Weder **PP** noch **DP** haben eine zulässige Lösung.
2. **PP** ist nicht beschränkt und **DP** hat keine zulässige Lösung.
3. **PP** hat keine zulässige Lösung und **DP** ist nicht beschränkt.
4. **PP** und **DP** haben eine zulässige Lösung. Dann haben **PP** und **DP** eine optimale Lösung, und es gilt

$$c^\top x^* = b^\top y^*,$$

wobei $x^*$ Optimallösung von **PP** und $y^*$ Optimallösung von **DP** ist.

# Aufgabe 4

## Linear Inequality Feasibility

**Gegeben:** Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^m$.

**Gesucht:** Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, der die Ungleichungen $Ax \leq b$ erfüllt.

# Aufgabe 4

## Linear Inequality Feasibility

**Gegeben:** Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^m$.

**Gesucht:** Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, der die Ungleichungen $Ax \leq b$ erfüllt.

(a) Zeigen Sie, dass mit einem Algorithmus zur Lösung eines linearen Programms auch das Problem LINEAR INEQUALITY FEASIBILITY gelöst werden kann.

# Aufgabe 4

## Linear Inequality Feasibility

**Gegeben:** Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^m$.

**Gesucht:** Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, der die Ungleichungen $Ax \leq b$ erfüllt.

(a) Zeigen Sie, dass mit einem Algorithmus zur Lösung eines linearen Programms auch das Problem LINEAR INEQUALITY FEASIBILITY gelöst werden kann.

(b) Zeigen Sie die Umkehrung von Aufgabe (a): Gegeben ein lineares Programm, zeigen Sie, wie Sie mit einem Algorithmus für das LINEAR INEQUALITY FEASIBILITY Problem das lineare Programm lösen können.

*Hinweis*: Dualitätssätze aus der Vorlesung.