Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmentechnik - Übung 5

6. Sitzung

Tanja Hartmann | 12. Januar 2010

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK, PROF. DR. DOROTHEA WAGNER

Lineare Algebra - Problem 1 [Kap. 5.1]
(Kreisbasen)

Definition

Ein Teilgraph $C = (V_C, E_C)$ von $G = (V, E)$ d.h. $V_C \subseteq V$, $E_C \subseteq E$ heißt *Kreis* in G, falls alle Knoten aus V_C in C **geraden Grad** haben. Falls C **zusammenhängend** ist und alle Knoten aus V_C **Grad zwei** haben, so heißt C *einfacher Kreis*.

$$\uparrow$$

Äquivalenzrelation auf der Menge aller Kreise $\mathcal{C}$:

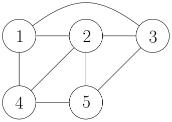
$$C_1 \sim C_2 :\Leftrightarrow E_{C_1} = E_{C_2}$$

$$\downarrow$$

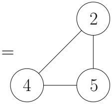
Kreis als Kantenmenge – **Vektordarstellung** in $GF(2)^m$

(a) Zählen Sie alle Elemente der Kreis-Äquivalenzklasse auf, die C enthält.

$G :=$



$C :=$



Lineare Algebra - Problem 1 [Kap. 5.1]
(Kreisbasen)

Zeige, $\mathcal{C}$ ist Untervektorraum von $GF(2)^m$:

- Abgeschlossenheit der Addition
- Neutrales Element
- Abgeschlossenheit der äußeren Verknüpfung/Skalarmultiplikation

Konvention:

- Identifiziere $C \in \mathcal{C}$ mit (eindeutigem) kanteninduzierten Repräsentanten.
- Für $v \in V_C$ sei $E_C(v) = \{e \in E_C | e \text{ inzident zu } v\}$.

(b) Zeige: Für den Kreisraum $\langle \mathcal{C} \rangle_{GF(2)\text{-VR}}$ eines Graphen G gilt

$$\langle \mathcal{C} \rangle_{GF(2)\text{-VR}} \; = \; \mathcal{C}.$$

Lineare Algebra - Problem 1 [Kap. 5.1]
(Kreisbasen)

Abgeschlossenheit der **Addition**:

Seien $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, so gilt:

- $d_1(u)$, $d_2(v)$ sind **gerade** für alle u, v.
- $C_1 \oplus C_2 =: C_3 \in \langle \mathcal{C} \rangle_{GF(2)\text{-VR}}$ beeinflusst nur Knoten in $V_1 \cap V_2$.

Sei $v \in V_1 \cap V_2$:

- $E_3(v) = (E_1(v) \cup E_2(v)) \setminus (E_1(v) \cap E_2(v))$

$\Longrightarrow C_3 \in \mathcal{C}$. ($C_3$ i.A. nicht kanteninduziert)

(b) Zeige: Für den Kreisraum $\langle \mathcal{C} \rangle_{GF(2)\text{-VR}}$ eines Graphen G gilt

$$\langle \mathcal{C} \rangle_{GF(2)\text{-VR}} = \mathcal{C}.$$

Lineare Algebra - Problem 1 [Kap. 5.1]
(Kreisbasen)

Neutrales Element:

- $C_0 \in \mathcal{C}$ mit $E_0 = \emptyset$ entspricht Nullvektor $0 \in \langle \mathcal{C} \rangle_{GF(2)\text{-VR}}$.
- Nullvektor 0 ist neutrales Element bzgl. Addition in $GF(2)^m$.

$\Longrightarrow$ Neutrales Element $\in \mathcal{C}$.

Abgeschlossenheit der **äußeren Verknüpfung/Skalarmultiplikation**:

- $GF(2) = \{0, 1\}$.
- $0 \cdot C =$ neutrales Element $\in \mathcal{C} \quad \forall C \in \mathcal{C}$.
- $1 \cdot C = C \in \mathcal{C} \quad \forall C \in \mathcal{C}$.

$\Longrightarrow aC \in \mathcal{C} \quad \forall a \in GF(2), C \in \mathcal{C}$.

(b) Zeige: Für den Kreisraum $\langle \mathcal{C} \rangle_{GF(2)\text{-VR}}$ eines Graphen G gilt

$$\langle \mathcal{C} \rangle_{GF(2)\text{-VR}} = \mathcal{C}.$$

Fundamentalbasis-Def. - Prob. 2 [Kap. 5.1]

(Kreisbasen)

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zshg. Graph und $T = (V, E_T)$ ein aufspannender Baum in G. Dann heißt
$B_T := \{C_e \in \mathcal{C} | e \in E \setminus E_T, E_{C_e} = \{e = \{u, v\}\} \cup \{u\text{-}v\text{-Pfad in } T\}\}$
Fundamentalbasis des Kreisraumes $\mathcal{C}$ von G (bzgl. T).

(a) Zeige: $B_T \subseteq GF(2)^m$, $m := |E|$, ist **linear unabhängig**.

(b) Zeige (konstruktiv): $B_T \subseteq GF(2)^m$ ist **Erzeugendensystem** von $\mathcal{C}$.

Dimension des Kreisraums ist $m - n + 1$, wobei $n := |V|$, $m := |E|$.

(c) Zeige: $|B_T| = m - n + 1$.

Beobachtung:

u-v-Pfade in T eindeutig $\Rightarrow$ $e = \{u, v\}$ induziert genau einen Kreis C_e in B_T.

Fundamentalbasis-Def. - Prob. 2 [Kap. 5.1]
(Kreisbasen)

(a) Zeige: $B_T \subseteq GF(2)^m$, $m := |E|$, ist **linear unabhängig**:

Beweis durch Widerspruch:

Annahme: $\sum_{e \in E \setminus E_T} a_e C_e = 0,\ a_e \in GF(2)$, mit $a_{e'} \neq 0$ für mindestens ein e'

- $C_{e'} \ni e'$, e' in **keinem** anderen Kreis aus B_T (nach Beobachtung).
- Addition ist *symmetrische Differenz* $\Rightarrow$ e' bleibt in LinKombi erhalten.

$\Longrightarrow \sum_{e \in E \setminus E_T} a_e C_e \neq 0$ (Widerspruch zur Annahme!)

Fundamentalbasis-Def. - Prob. 2 [Kap. 5.1]
(Kreisbasen)

(b) Zeige (konstruktiv): $B_T \subseteq GF(2)^m$ ist **Erzeugendensystem** von $\mathcal{C}$:

Behauptung: $C = \sum_{e \in E_C \setminus E_T} C_e$.

- Für $e \in E_C$ zeige: e **bleibt** in LinKombi **erhalten**.
- Für $e \in E \setminus E_C$ zeige: e **fällt** aus LinKombi **heraus**.

<u>Sei $e \in E_C \setminus E_T$</u> <u>[$e \in E \setminus (E_C \cup E_T)$]</u>:

- *Nichtbaumkante* e ist in genau einem Kreis C_e in B_T enthalten.
- $e \in E_C$ [$e \notin E_C$].

$\Longrightarrow$ e ist in **ungerader** **[gerader]** Anzahl an Kreisen in LinKombi enthalten.

Fundamentalbasis-Def. - Prob. 2 [Kap. 5.1]
(Kreisbasen)

Sei $e \in E_C \cap E_T$ [Sei $e \in (E \setminus E_C) \cap E_T$]:

- *Baumkante* e induziert einen Schnitt S_e in G.
- S_e wird sonst nur von Nichtbaumkanten gekreuzt.
- $|\{e' \in E_C | e' \text{ kreuzt } S_e\}|$ ist gerade.
- $e \in E_C$ [$e \notin E_C$].

$\Longrightarrow$ S_e wird von **ungerader** [geraden] Anzahl Nichtbaumkanten aus E_C gekreuzt!

S_e kreuzende Nichtbaumkanten in $G \Leftrightarrow e$ enthaltende Kreise in B_T.

Fundamentalbasis-Def. - Prob. 2 [Kap. 5.1]
(Kreisbasen)

(c) Zeige: $|B_T| = m - n + 1$.

nach Definition und Beobachtung:

$$B_T = E \setminus E_T$$

(**Basiskreise** und **Nichtbaumkanten** entsprechen sich **bijektiv**.)

$\Longrightarrow$

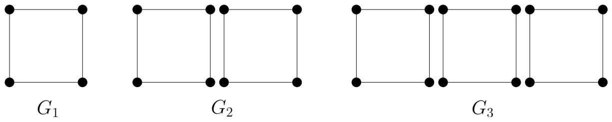
$$|B_T| = |E \setminus E_T| = m - (n-1) = m - n + 1.$$

Kreisräume - Problem 3 [Kap. 5.4]

(Kreisbasen)

(a) Gesucht: Familie $(G_i)_{i \in I}$ mit $|\mathcal{C}_i|$ **exponentiell** in $|E_i|$.

Familie $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der 4*er-Kreis-Kopien*:



Korrektheit: Für G_n gilt

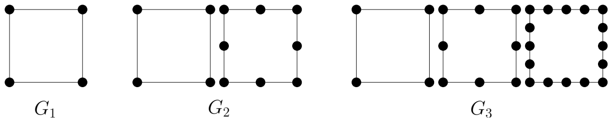
- $|V_n| = 4n$
- $|E_n| = 4n$
- $|\mathcal{C}_n| = |\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})| = 2^n = 2^{|E_n|/4} = (2^{\frac{1}{4}})^{|E_n|}$

Kreisräume - Problem 3 [Kap. 5.4]

(Kreisbasen)

(b) Gesucht: Familie $(G_i)_{i \in I}$ mit $|\mathcal{C}_i|$ **linear** in $|E_i|$.

Familie $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der 4*er-Kreis-Kopien-Unterteilungen*:



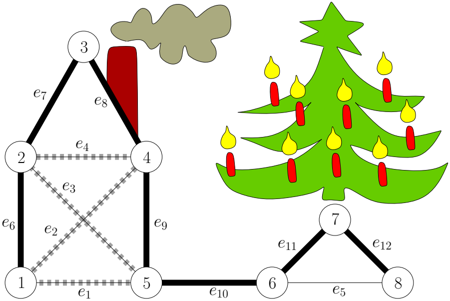
Korrektheit: Für G_n gilt

- $|V_n| = \sum_{i=0}^{i=n} 4 \cdot 2^i$
- $|E_n| = \sum_{i=0}^{i=n} 4 \cdot 2^i = 4 \sum_{i=0}^{i=n} 2^i = 4(2^{n+1} - 1) = 8 \cdot 2^n - 4$
- $|\mathcal{C}_n| = |\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})| = 2^n = (|E_n| + 4)/8$

Algo von de Pina - Problem 4 [Kap. 5.4]

Eingabe : Graph $G = (V, E)$
Ausgabe : MCB von G

```
für i = 1 bis N tue
    S_i ← {e_i};
für k = 1 bis N tue
    Finde einen kürzesten Kreis C_k mit ⟨C_k, S_k⟩ = 1 ;
    für i = k + 1 bis N tue
        wenn ⟨C_k, S_i⟩ = 1 dann
            S_i ← S_i ⊕ S_k ;
Ausgabe ist: {C_1, ..., C_N};
```



Algo von de Pina - Problem 4 [Kap. 5.4]

Initialisierung:
$S_1 = \{e_1\}$, $S_2 = \{e_2\}$, $S_3 = \{e_3\}$, $S_4 = \{e_4\}$, $S_5 = \{e_5\}$

k = 1:
$S_1 = \{e_1\}$, $C_1 := \{e_1, e_3, (e_6)\}$, $S_3 = \{e_1\} \oplus \{e_3\} = \{e_1, e_3\}$

k = 2:
$S_2 = \{e_2\}$, $C_2 := \{e_1, e_2, (e_9)\}$, $S_3 = \{e_1, e_3\} \oplus \{e_2\} = \{e_1, e_2, e_3\}$

k = 3:
$S_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$, $C_3 := \{e_2, e_4, (e_6)\}$, $S_4 = \{e_4\} \oplus \{e_1, e_2, e_3\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

k = 4:
$S_4 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $C_4 := \{e_4, (e_7, e_8)\}$ (keine Änderung)

k = 5:
$S_5 = \{e_5\}$, $C_5 := \{e_5, (e_{11}, e_{12})\}$ (keine Änderung)

Algo von de Pina - Problem 4 [Kap. 5.4]

Ausgabe:

$C_1 = \{e_1, e_3, (e_6)\}$, $C_2 = \{e_1, e_2, (e_9)\}$, $C_3 = \{e_2, e_4, (e_6)\}$, $C_4 = \{e_4, (e_7, e_8)\}$, $C_5 = \{e_5, (e_{11}, e_{12})\}$

Gestrichelter Kreis:

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\} = C_1 \oplus C_3 = \{e_1, e_3, (e_6)\} \oplus \{e_2, e_4, (e_6)\}$