Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 5 – Lösungsvorschläge

Vorlesung Algorithmentechnik im WS 09/10

Problem 1: Lineare Weihnachtsalgebra – Kreisbasen [vgl. Kapitel 5.1 im Skript]

Machen Sie sich folgende Zusammenhänge klar:

- Addition und Multiplikation des endlichen Körpers $GF(2)$ (Galois-Field; alternative Schreibweise: $\mathbb{F}_2$) induzieren eine $GF(2)$-Vektorraumstruktur auf dem kartesischen Produkt $GF(2)^n = \underbrace{GF(2) \times GF(2) \times \cdots \times GF(2)}_{n\text{-mal}}$.

- Die Identifizierung der in Definition 5.1 gegebenen Kreise $\{C \mid C \text{ ist Kreis in } G\}$ mit Vektoren $\{X^C := X^{E_C} \mid C \text{ ist Kreis in } G\}$ aus $GF(2)^m$, $m := |E|$, impliziert folgende Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{C}$ aller Kreise:

$$C_1 \sim C_2 :\Leftrightarrow \; E_{C_1} = E_{C_2}$$

  Skript bzw. Vorlesung und Übung unterscheiden **nicht** explizit zwischen Kreisen nach Definition 5.1 und Kreisklassen nach obiger Äquivalenzrelation. Die jeweilige Bedeutung der Notation geht aus dem Kontext hervor.

- Analog zur obigen Identifizierung von Kreisen mit bestimmten Vektoren aus $GF(2)^m$ lassen sich auch allgemeine Kantenmengen mit Vektoren aus $GF(2)^m$ identifizieren. Das kartesische Produkt $GF(2)^m$ kann sogar, vermöge der kanonischen Vektorraumstruktur, als Vektorraum $\mathcal{P}(E)$ aller Kantenteilmengen eines Graphen aufgefasst werden.

- Sei V ein K-Vektorraum und $S \subseteq V$. Dann ist der von S erzeugte Untervektorraum $\langle S\rangle_{K\text{-VR}}$ definiert als $\langle S\rangle_{K\text{-VR}} := \min\{\, U \subseteq V \,|\, U \text{ ist UVR von V, } S \subseteq U\}$. Die Menge S ist ein Erzeugendensystem des Untervektorraums $\langle S\rangle_{K\text{-VR}}$.
  Die Menge $\mathcal{C} \subseteq GF(2)^m$ aller Kreise eines Graphen G ist ein Erzeugendensystem des Untervektorraums $\langle \mathcal{C}\rangle_{GF(2)\text{-VR}}$ (Kreisraum von G).

(a) Untenstehende Abbildung zeigt einen Kreis C im Graphen $G = (V, E)$. Zählen Sie alle Elemente der Kreis-Äquivalenzklasse auf, die C enthält.

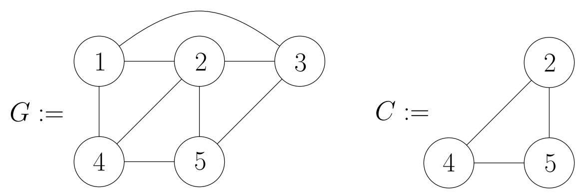
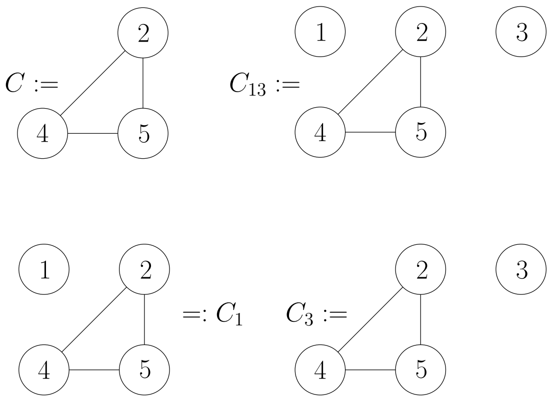


Abbildung 1: zu Teilaufgabe (a).

Lösung.

Die Äquivalenzklasse $[C]_\sim$ von C enthält vier Elemente: $[C]_\sim = \{C, C_1, C_3.C_{13}\}$



(b) Zeigen Sie, dass für den Kreisraum $\langle \mathcal{C} \rangle_{GF(2)\text{-VR}}$ eines Graphen G gilt:

$$\langle \mathcal{C} \rangle_{GF(2)\text{-VR}} \;=\; \mathcal{C}.$$

Lösung.

Zeige, dass $\mathcal{C}$ ein Untervektorraum von $GF(2)^m$ ist. Dann gilt mit $\mathcal{C} \subseteq \langle \mathcal{C} \rangle_{GF(2)\text{-VR}}$ auch $\mathcal{C} = \langle \mathcal{C} \rangle_{GF(2)\text{-VR}}$.

Konvention: Wir identifizieren Kreisklasse $C \in \mathcal{C}$ mit dem durch E_C (kanten)induzierten Repräsentanten. Für $v \in V_C$ sei $E_C(v)$ die Menge der Kanten aus E_C, die zu v inzident sind und $d_C(v) := |E_C(v)|$.

- **Abgeschlossenheit der Addition**:
  Seien $C_1 = (V_1, E_1), C_2 = (V_2, E_2) \in \mathcal{C}$, so gilt: $d_1(u)$, $d_2(v)$ sind gerade $\forall u \in V_1, v \in V_2$. Durch die Verknüpfung $C_3 := C_1 \oplus C_2$ werden nur Knotengrade in $V_1 \cap V_2$ beeinflusst. Die Grade aller übrigen Knoten bleiben unverändert und sind damit auch nach der Verknüpfung gerade. Sei nun $v \in V_1 \cap V_2$. Dann gilt: $E_3(v) = (E_1(v) \cup E_2(v)) \setminus (E_1(v) \cap E_2(v))$ und $d_3(v) = d_1(v) + d_2(v) - 2|E_1(v) \cap E_2(v)|$. Mit $d_1(v)$, $d_2(v)$ gerade, ist also auch $d_3(v)$ gerade und $C_3 := C_1 \oplus C_2$ ein Repräsentant einer Kreisklasse in $\mathcal{C}$ (jedoch nicht unbedingt der (eindeutige) kanteninduzierte Repräsentant).
- **Neutrales Element**:
  Der Kreis $C_0 \in \mathcal{C}$ mit $E_0 = \emptyset$ entspricht dem Nullvektor (neutrales Element der Addition) in $GF(2)^m$. Damit enthält $\mathcal{C}$ ein passendes neutrales Element.
- **Abgeschlossenheit der äußeren Verknüpfung/Skalarmultiplikation**:
  Der Körper $GF(2)$ enthält nur die beiden Elemente 0 und 1. Die Skalarmultiplikation eines Kreises mit 0 ergibt gerade den Nullvektor, der, wie eben gesehen, als neutrales Element in $\mathcal{C}$ liegt. Die Skalarmultiplikation eines Kreises mit 1 ergibt den Kreis selbst und liegt damit auch in $\mathcal{C}$.

Problem 2: Korrektheit der Fundamentalbasis-Definition – Kreisbasen [vgl. Kapitel 5.1 im Skript]

Zur Wiederholung:

- Für einen K-Vektorraum V sind folgende Aussagen äquivalent:
  - $B \subseteq V$ ist eine Basis von V.
  - $B \subseteq V$ ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V.
  - $B \subseteq V$ ist ein minimales Erzeugendensystem von V.

– $B \subseteq V$ ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.

- Eine Teilmenge $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq V$ eines K-Vektorraums V heißt *linear unabhängig*, wenn gilt:
$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i = 0,\ a_i \in K \quad \iff \quad a_i = 0 \quad \forall\, i,$$
das heißt, wenn der Nullvektor sich nur als triviale Linearkombination der Vektoren in B schreiben lässt.

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph und $T = (V, E_T)$ ein aufspannender Baum in G. Dann ist die Fundamentalbasis (bzgl. T) des Kreisraumes $\mathcal{C}$ von G definiert als $B_T := \{C_e \,|\, e \in E \setminus E_T,\ C_e \in \mathcal{C},\ E_{C_e} = \{e = \{u, v\}\} \cup \{\text{Pfadkanten von } u \text{ nach } v \text{ in } T\}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $B_T \subseteq GF(2)^m$, $m := |E|$, linear unabhängig ist.

Lösung.

Da die u-v-Pfade in T eindeutig sind, induziert jede Nichtbaumkante e genau einen Kreis C_e in B_T; aufgrund der Konstruktion der Kreise in B_T ist C_e der einzige Kreis der e enthält. Annahme: Sei $\sum_{e \in E \setminus E_T} a_e C_e = 0$, $a_e \in GF(2)$ mit $a_{e'} \neq 0$, für mindestens ein e'. Ein entsprechender Kreis $C_{e'}$ enthält dann die Nichtbaumkante e', die in keinem anderen Kreis aus B_T enthalten ist und somit nicht zu Null summiert werden kann, da die hier betrachtete Verknüpfung die *symmetrische Differenz* ist. Damit ist die Annahme widerlegt, und es folgt die lineare Unabhängigkeit von B_T.

(b) Zeigen Sie, dass $B_T \subseteq GF(2)^m$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{C}$ ist. Gehen Sie dabei konstruktiv vor und beschreiben Sie, wie ein beliebiger Kreis durch Linearkombination von Elementen aus B_T gebildet werden kann.

Lösung.

Sei $C \in \mathcal{C}$ ein beliebiger Kreis. Behauptung:
$$C = \sum_{e \in E_C \setminus E_T} C_e.$$

Beweis: Wir unterscheiden zwei Arten von Kanten in E_C und zwei Arten von Kanten in $E \setminus E_C$. Für jede Kante in E_C zeigen wir, dass sie in der obigen Linearkombination **nicht** zu Null summiert wird; für jede Kante in $E \setminus E_C$ dagegen, dass sie zu Null summiert wird.

- Sei $e \in E_C \setminus E_T$.
Die Nichtbaumkante e ist in genau einem Kreis $C_e \in B_T$ enthalten. Mit $e \in E_C \setminus E_T$ kommt C_e als Summand in der Linearkombination vor, und wegen der **Einmaligkeit** von e bleibt diese Kante bei Verknüpfung mittels symmetrischer Differenz erhalten.
- Sei $e \in E_C \cap E_T$.
Die Baumkante e induziert einen Schnitt in G, da der Baum T durch Löschung von e in zwei Schnittseiten zerfällt. Außer e sind damit alle übrigen, den Schnitt kreuzende Kanten Nichtbaumkanten. Die Anzahl der Kanten in E_C, die diesen Schnitt kreuzen, ist (wie für jeden Kreis und jeden Schnitt) gerade. Mit $e \in E_C$ bleibt also (ohne e) eine **ungerade** Anzahl den Schnitt kreuzender Nichtbaumkanten in E_C. Die Menge dieser Nichtbaumkanten entspricht gerade der Menge der Kreise in der Linearkombination, die die Baumkante e enthalten. Damit wird e nicht zu Null summiert.
- Sei $e \in E \setminus (E_C \cup E_T)$.
Die Nichtbaumkante e ist in genau einem Kreis $C_e \in B_T$ enthalten. Mit $e \notin E_C$ ist C_e nicht in der Linearkombination enthalten; e kommt somit in einer **geraden** Anzahl an Kreisen vor, wird also zu Null summiert.

- Sei $e \in (E \setminus E_C) \cap E_T$.
Die Baumkante e induziert einen Schnitt in G, da der Baum T durch Löschung von e in zwei Schnittseiten zerfällt. Außer e sind damit alle übrigen, den Schnitt kreuzende Kanten Nichtbaumkanten. Die Anzahl der Kanten in E_C, die diesen Schnitt kreuzen, ist (wie für jeden Kreis und jeden Schnitt) gerade. Mit $e \notin E_C$ liegt also eine **gerade** Anzahl den Schnitt kreuzender Nichtbaumkanten in E_C. Die Menge dieser Nichtbaumkanten entspricht gerade der Menge der Kreise in der Linearkombination, die die Baumkante e enthalten. Damit wird e zu Null summiert.

(c) Zeigen Sie, dass $|B_T| = m - n + 1$ gilt, wobei $n := |V|$, $m := |E|$.

Lösung.

Da die u-v-Pfade in T eindeutig sind, induziert jede Nichtbaumkante e genau einen Kreis C_e in B_T, und nach Konstruktion enthält jeder Kreis C_e in B_T genau eine Nichtbaumkante e. Damit gilt $B_T = E \setminus E_T$ (bijektive Mengenentsprechung) und

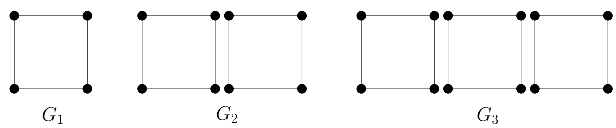
$$|B_T| = |E \setminus E_T| = m - (n-1) = m - n + 1.$$

Problem 3: Kreisräume – Kreisbasen [vgl. Kapitel 5.4 im Skript]

(a) Geben Sie eine (unendliche) Familie $(G_i)_{i \in I}$ von Graphen an, so dass für jeden Graphen G_i die Anzahl der Kreise in G_i (als Kreisklassen betrachtet) **exponentiell** in der Anzahl der Kanten in G_i ist. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung.

Lösung.

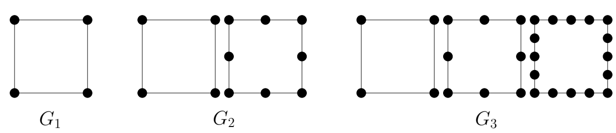
Sei $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Familie der 4*er-Kreis-Kopien*, in der der Graph G_n aus n Kopien eines einfachen Kreises mit vier Knoten besteht (siehe Abbildung). Damit gilt für G_n: $|V_n| = 4n$, $|E_n| = 4n$, $|\mathcal{C}_n| = |\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})| = 2^n = 2^{|E|/4} = (2^{\frac{1}{4}})^{|E|}$.



(b) Geben Sie eine (unendliche) Familie $(G_i)_{i \in I}$ von Graphen an, so dass für jeden Graphen G_i die Anzahl der Kreise in G_i (als Kreisklassen betrachtet) **linear** in der Anzahl der Kanten in G_i ist. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung.

Lösung.

Sei $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Familie der 4*er-Kreis-Kopien-Unterteilungen*, in der der Graph G_n aus G_{n-1} hervorgeht durch Hinzunahme eines $(n-1)$-fach unterteiten einfachen Kreis mit vier Knoten. Dabei sei ein Unterteilungsschritt die Teilung jeder Kante des ursprünglichen Kreises durch Einfügen eines zusätzlichen Knotens (siehe Abbildung). Der Graph G_1 sei gerade ein einfacher Kreis mit vier Knoten. Damit gilt für G_n: $|V_n| = \sum_{i=0}^{i=n} 4 \cdot 2^i$, $|E_n| = \sum_{i=0}^{i=n} 4 \cdot 2^i = 4 \sum_{i=0}^{i=n} 2^i = 4(2^{n+1} - 1) = 8 \cdot 2^n - 4$, $|\mathcal{C}_n| = |\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})| = 2^n = (|E| + 4)/8$.



Problem 4: Algorithmus von de Pina – MCB [vgl. Kapitel 5.4 im Skript]

Verdeutlichen Sie sich folgende Zusammenhänge:

- Die in Kapitel 5.4.2 eingeführte "verkürzte" Schreibweise der mit Kreisen identifizierten Inzidenzvektoren in $GF(2)^m$ ist nichts anderes als die Darstellung der Vektoren aus $\mathcal{C}$ bezüglich einer festen Fundamentalbasis des Kreisraums $\mathcal{C}$. Im Gegensatz dazu wurden zuvor die Inzidenzvektoren (und alle anderen Vektoren in $\mathcal{P}(E) = GF(2)^m$) bezüglich der Standardbasis von $GF(2)^m$ dargestellt. Die verkürzte Darstellung hat eine Länge von $dim(\mathcal{C}) \leq dim(GF(2)^m) = m$.
- Für das auf $\mathcal{C}$ eingeführte Skalarprodukt (auf allgemeinen K-Vektorräumen ist die Bezeichnung *Skalarprodukt* auch für nicht positiv definite, symmetrische Bilinearformen üblich) gilt:
  - $\langle C_1, C_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow$ Die (eindeutigen) Vektordarstellungen von C_1 und C_2 bezüglich einer festen Fundamentalbasis haben eine **gerade** Anzahl gemeinsamer Basisvektoren.
  - $\langle C_1, C_2 \rangle = 1 \Leftrightarrow$ Die (eindeutigen) Vektordarstellungen von C_1 und C_2 bezüglich einer festen Fundamentalbasis haben eine **ungerade** Anzahl gemeinsamer Basisvektoren.

Untenstehende Abbildung zeigt einen Graphen $G = (V, E)$ und einen fett, schwarz eingezeichneten aufspannenden Baum $T = (V, E_T)$ von G.

(a) Führen Sie den Algorithmus von de Pina (algebraisch, Algorithmus 41 im Skript) auf G aus. Nutzen Sie den eingezeichneten Baum und halten Sie sich an die Reihenfolge der Kanten entsprechend ihrer Nummerierung. Notieren Sie für jeden Schleifendurchlauf der Zeilen 3 bis 7 des Algorithmus k, C_k, S_k sowie alle S_i, die geändert werden, und die resultierende Basis. Nehmen Sie als Kantengewicht $c(e_i) = 1$ an, für alle Kanten e_i.

Lösung.

Soweit nicht anders angegeben sind die Kreise/Kantenmengen (als Vektoren interpretiert) bzgl. der Fundamentalbasis zum gegebenen Baum dargestellt. Dabei ist eine Kante genau dann in der Menge enthalten, wenn sie im Vektor mit einer 1 notiert ist.

Zu Beginn: Initialisierung der S_i (Fundamentalkreise bzgl. Baum T)

- $S_1 = \{e_1\}$, $S_2 = \{e_2\}$, $S_3 = \{e_3\}$, $S_4 = \{e_4\}$, $S_5 = \{e_5\}$

$k = 1$:

- $C_1 = \{e_1\} \oplus \{e_3\} = \{e_1, e_3\}$ ($= \{e_1, e_3, e_6\}$ bzgl. Standardbasis), $S_1 = \{e_1\}$
- $S_3 = \{e_1\} \oplus \{e_3\} = \{e_1, e_3\}$

$k = 2$:

- $C_2 = \{e_1\} \oplus \{e_2\} = \{e_1, e_2\}$ ($= \{e_1, e_2, e_9\}$ bzgl. Standardbasis), $S_2 = \{e_2\}$
- $S_3 = \{e_1, e_3\} \oplus \{e_2\} = \{e_1, e_2, e_3\}$

$k = 3$:

- $C_3 = \{e_2\} \oplus \{e_4\} = \{e_2, e_4\}$ ($= \{e_2, e_4, e_6\}$ bzgl. Standardbasis), $S_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$
- $S_4 = \{e_4\} \oplus \{e_1, e_2, e_3\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

$k = 4$:

- $C_4 = \{e_4\}$ $(= \{e_4, e_7, e_8\}$ bzgl. Standardbasis), $S_4 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
- keine Änderung

$k = 5$:

- $C_5 = \{e_5\}$ $(= \{e_5, e_{11}, e_{12}\}$ bzgl. Standardbasis), $S_5 = \{e_5\}$
- keine Änderung

Resultierende Basis (bzgl. Fundamentalbasis):
$C_1 = \{e_1, e_3\}$, $C_2 = \{e_1, e_2\}$, $C_3 = \{e_2, e_4\}$, $C_4 = \{e_4\}$, $C_5 = \{e_5\}$
Resultierende Basis (bzgl. Standardbasis):
$C_1 = \{e_1, e_3, e_6\}$, $C_2 = \{e_1, e_2, e_9\}$, $C_3 = \{e_2, e_4, e_6\}$, $C_4 = \{e_4, e_7, e_8\}$, $C_5 = \{e_5, e_{11}, e_{12}\}$

(b) Stellen Sie den gestrichelt, grau eingezeichneten Kreis als Linearkombination der in (a) berechneten MCB dar.

Lösung.

Für den grauen Kreis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ gilt: $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} = C_1 \oplus C_3 = \{e_1, e_3\} \oplus \{e_2, e_4\}$.

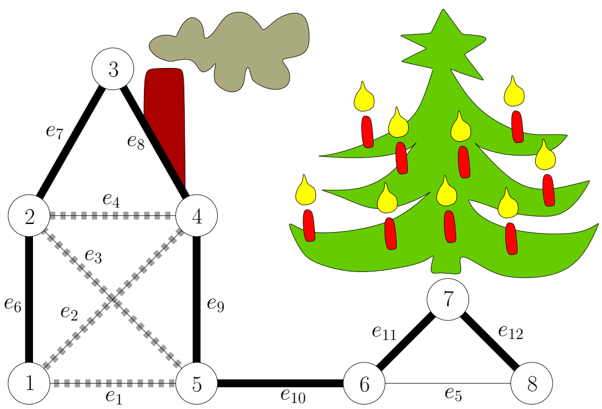


Abbildung 2: Das ist das Haus vom Nikolaus...