

## Übungsblatt 4 – Lösungsvorschläge

Vorlesung Algorithmentechnik im WS 09/10

### Problem 1: Flüsse [vgl. Kapitel 4.1 im Skript]

\*\*

Gegeben sei ein Netzwerk  $D = (V, E)$ , in dem es zu einigen Kanten  $(u, v) \in E$  auch Kanten  $(v, u) \in E$  gibt. Weiterhin sei ein maximaler Fluss  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  gegeben. Zeigen Sie, dass man dieses Flussproblem auf ein Flussproblem auf dem Netzwerk  $D' = (V, E')$  überführen kann, wobei gilt:  $E'$  ist maximale Teilmenge von  $E$  mit  $(u, v) \in E' \Rightarrow (v, u) \notin E'$ , so dass der Wert des Maximalflusses nicht verändert wird.

**Lösung.** Sei  $f$  ein maximaler Fluss auf  $D$  und  $(u, v), (v, u) \in E$  mit  $f(u, v) \geq f(v, u)$ . Wir zeigen zunächst, dass das Flussnetzwerk  $D' = (V, E')$  mit  $E' := E \setminus \{(v, u)\}$  den Wert des Maximalflusses erhält. Damit ist klar, dass die Aussage der Aufgabe gilt. Dazu definieren wir den Fluss  $f'$  durch

$$f'(i, j) := \begin{cases} f(i, j) & \text{falls } (i, j) \neq (u, v) \\ f(i, j) - f(j, i) & \text{falls } (i, j) = (u, v) \end{cases}.$$

Der Fluss  $f'$  erfüllt auf der Kante  $(u, v) \in E'$  wegen  $f(u, v) \geq f(v, u)$  weiterhin die Kapazitätsbedingung, d. h.

$$0 \leq f'(i, j) \leq c(i, j).$$

Des Weiteren ist die Kapazitätsbedingung für alle übrigen Kanten  $(x, y) \neq (u, v)$  trivialerweise erfüllt.

Für den Knoten  $u$  gilt außerdem:

$$\begin{aligned} w'(u) &= \sum_{(w,u) \in E'} f'(w, u) - \sum_{(u,w) \in E'} f'(u, w) \\ &= \sum_{(w,u) \in E'} f'(w, u) - \sum_{(u,w) \in E' \setminus \{(u,v)\}} f'(u, w) - f'(u, v) \\ &= \sum_{(w,u) \in E'} f(w, u) - \sum_{(u,w) \in E' \setminus \{(u,v)\}} f(u, w) - (f(u, v) - f(v, u)) \\ &= \sum_{(w,u) \in E} f(w, u) - \sum_{(u,w) \in E} f(u, w) \\ &= w(u) \end{aligned}$$

Für  $u \neq s$  und  $u \neq t$  gilt  $w(u) = 0$ . Folglich gilt auch für  $f'$  Flusserhaltungsbedingung. Die Gleichung zeigt darüber hinaus, dass  $w'(f') = w(f)$  gilt, da für  $u = s$  die Gleichung  $w'(f') = w'(s) = w(s) = w(f)$  gilt. Sei  $\tilde{f}$  ein Maximalfluss in  $D'$  dann gilt also  $w'(\tilde{f}) \geq w'(f') = w(f)$ . Da sich jeder Fluss in  $D'$  trivial zu einem Fluss in  $D$  fortsetzen lässt, gilt auch  $w'(\tilde{f}) \leq w(f)$  und damit  $w'(\tilde{f}) = w(f)$ .  $\square$

### Problem 2: Flüsse mit Knotenkapazitäten [vgl. Kapitel 4.1 im Skript]

\*\*

Das maximale Flussproblem aus der Vorlesung kann folgendermaßen erweitert werden: Neben den Kantenkapazitäten  $c$  seien noch Knotenkapazitäten  $\gamma : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  gegeben. In einem solchen Netzwerk

$(D, s, t, c, \gamma)$  heißt eine Abbildung  $f$  Fluss, wenn sie neben den bekannten Eigenschaften (Flusserhaltungsbedingung und (Kanten)-Kapazitätsbedingung) auch die folgende erfüllt: Für alle  $v \in V$  ist die *Knotenkapazitätsbedingung*

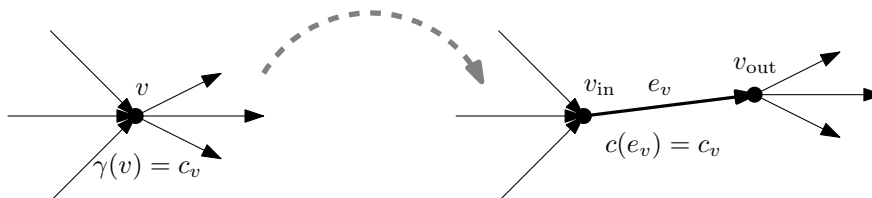
$$\sum_{(v,w) \in E} f(v,w) \leq \gamma(v) \quad \text{wenn } v \in V \setminus \{t\}$$

$$\sum_{(u,v) \in E} f(u,v) \leq \gamma(v) \quad \text{wenn } v = t$$

erfüllt.

Zeigen Sie, dass die Bestimmung eines maximalen Flusses in einem Netzwerk mit Kanten- **und** Knotenkapazitäten auf ein maximales Flussproblem in einem normalen (d. h. ohne Knotenkapazitäten) Netzwerk mit vergleichbarer Größe zurückgeführt werden kann.

**Lösung.** Abbildung 1 zeigt wie ein Knoten mit Knotenkapazität umgeformt werden muss, um ein solches Netzwerk auf ein normales Flussnetzwerk zurückzuführen. Die Umformung ist flussä-



**Abbildung 1:** Knotenkapazität wird flussäquivalent in Kantenkapazität umgeformt

quivalent, da durch die Kapazitätsbedingung der Kante  $e_v$  die Knotenkapazitätsbedingung  $\gamma(v)$  realisiert wird und alle sonstigen Nachbarschaften und Kantenkapazitätsbedingungen beibehalten werden. Die Knotenkapazitätsbedingung beschränkt den Ausfluss eines Knotens  $v$  ebenso wie die Kapazität der Kante  $e_v$ . Für  $t_{out}$  ist analog der Einfluss beschränkt. Der Fluss im Rest des Netzwerkes bleibt durch diese Umwandlung somit unverändert. Es ist leicht zu sehen, dass jeder Fluss im Netzwerk vor der Umwandlung auch im Netzwerk nach der Umwandlung gültig ist, und umgekehrt.

Formal gilt für ein Netzwerk also: Konstruiere Netzwerk  $N' = (D' = (V', E'); s'; t'; c')$  aus einem Netzwerk  $N = (D = (V, E); s; t; c; \gamma)$ , das Knotenkapazitäten enthält, wie folgt:

- Knoten:  $V' = \bigcup_{v \in V} \{v_{in}, v_{out}\}$
- Quelle und Senke:  $s' = s_{in}$ , und  $t = t_{out}$
- Kanten  $E' = \{(v_{out}, w_{in}) \mid (v, w) \in E\} \cup \{(v_{in}, v_{out}) \mid v \in V\}$
- Kapazitäten:  $c' : E' \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit  $c'(v_{out}, w_{in}) = c(v, w)$  und  $c'(v_{in}, v_{out}) = \gamma(v)$

Korrektheit: Offenbar ist  $N'$  ein normales Flussnetzwerk von vergleichbarer Größe wie  $N$  ( $|E'| = |E| + |V|$ ,  $|V'| = 2|V|$ ). Da die Umwandlung eines jeden Knoten den Fluss im Rest des Netzwerkes unverändert lässt und die Knotenbedingungen erfüllt bleiben, gilt zudem, dass der maximale Fluss in  $N$  und in  $N'$  den gleichen Wert haben. Eine Lösung in  $N'$  kann kanonisch auf eine Lösung in  $N$  übersetzt werden.  $\square$

**Problem 3:** Strömungen und Goldberg & Tarjan Algorithmus [vgl. Kapitel 4.1–4.2 im Skript]

\*/\*\*\*

Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph. Zusätzlich zu den bereits bekannten Kantenkapazitäten  $c : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  definieren wir *untere* Schranken  $l : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , wobei für alle Kanten  $(u, v) \in E$  gilt, dass  $0 \leq l(u, v) \leq c(u, v)$ .

Eine Funktion  $\beta : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  heißt *Strömung*, wenn die Flusserhaltungsbedingung für *alle* Knoten  $v \in V$  erfüllt ist, das heißt

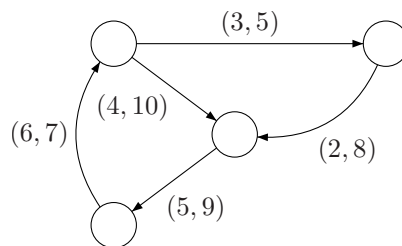
$$\sum_{(u,v) \in E} \beta(u,v) - \sum_{(v,w) \in E} \beta(v,w) = 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

Die Strömung  $\beta$  heißt *zulässig*, falls für alle  $(u,v) \in E$  gilt, dass  $l(u,v) \leq \beta(u,v) \leq c(u,v)$ .

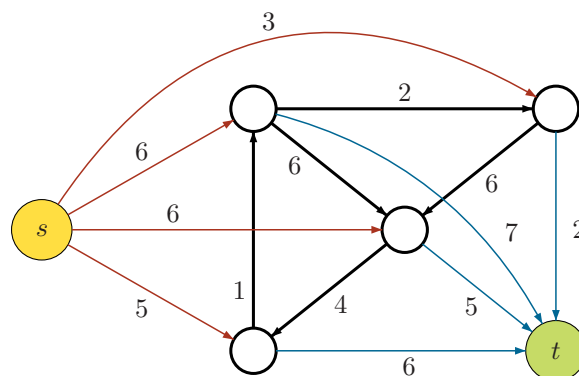
Wir wollen in dieser Aufgabe die Frage beantworten, ob es eine bezüglich  $l$  und  $c$  zulässige Strömung  $\beta$  in  $G$  gibt, indem wir das Problem auf ein reguläres Flussproblem zurückführen. Dazu konstruieren wir einen Graphen  $G' = (V' \supset V, E' \supset E)$ . Wir führen eine Super-Quelle und -Senke  $s$  und  $t$  in  $V'$  ein. Für jeden Knoten  $v \in V$  führen wir Kanten  $(s,v)$  und  $(v,t)$  in  $E'$  ein. Die Kapazitäten  $c' : E' \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  des Flussnetzwerkes in  $G'$  sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} c'(u,v) &:= c(u,v) - l(u,v) && \text{für alle } (u,v) \in E \\ c'(s,v) &:= \sum_{(u,v) \in E} l(u,v) && \text{für alle } v \in V \quad (\text{Mindestzufluss}) \\ c'(v,t) &:= \sum_{(v,w) \in E} l(v,w) && \text{für alle } v \in V \quad (\text{Mindestabfluss}) \end{aligned}$$

- (a) Konstruieren Sie zu folgendem Graphen  $G$  den Graphen  $G'$  gemäß den obigen Regeln. Dabei sei für jede Kante  $(u,v)$  der erste Wert  $l(u,v)$ , der zweite Wert  $c(u,v)$ .



**Lösung.** Das Netzwerk in Abbildung 2 zeigt die Konstruktion des Graphen  $G' = (V', E')$  sowie die Flusskapazitäten an den Kanten.



**Abbildung 2:** Flussnetzwerk  $G' = (V', E')$ , das aus dem Stroemungsgraphen aus Aufgabe (a) hervorgeht. Der ursprüngliche Teilgraph  $G$  ist fett dargestellt.

□

- (b) Zeigen Sie: Ist  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  eine beliebige Funktion, dann gilt für  $f' : E' \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit

$$f'(u,v) := f(u,v) - l(u,v) \quad \text{für alle } (u,v) \in E \quad (1)$$

$$f'(u,v) := c'(u,v) \quad \text{für alle } (u,v) \in E' \setminus E \quad (2)$$

für jeden Knoten  $v \in V$ , dass

$$\sum_{(v,w) \in E'} f'(v,w) = \sum_{(v,w) \in E} f(v,w) \quad \text{und} \quad \sum_{(u,v) \in E'} f'(u,v) = \sum_{(u,v) \in E} f(u,v).$$

**Lösung.** Wir zeigen die Behauptung durch einfaches Nachrechnen.

$$\begin{aligned} \sum_{(v,w) \in E'} f'(v,w) &= f'(v,t) + \sum_{(v,w) \in E} f'(v,w) && \text{(Kante } (v,t) \text{ rausziehen)} \\ &= c'(v,t) + \sum_{(v,w) \in E} (f(v,w) - l(v,w)) && \text{(Aufgabenstellung)} \\ &= \sum_{(v,w) \in E} l(v,w) + \sum_{(v,w) \in E} f(v,w) - \sum_{(v,w) \in E} l(v,w) && \text{(Definition von } c') \\ &= \sum_{(v,w) \in E} f(v,w) \end{aligned}$$

Die Gleichung  $\sum_{(u,v) \in E'} f'(u,v) = \sum_{(u,v) \in E} f(u,v)$  zeigt man analog.  $\square$

- (c) Zeigen Sie: In  $G$  existiert genau dann eine bezüglich  $l$  und  $c$  zulässige Strömung  $\beta$ , wenn in  $G'$  der maximale  $s$ - $t$ -Fluss  $f$  den Wert  $w(f) = \sum_{(u,v) \in E} l(u,v)$  besitzt.

*Hinweis:* Benutzen Sie die Definition von  $f'$  aus Aufgabe (b) in Ihrem Beweis um zu einer gegebenen Strömung  $\beta$  in  $G$  einen Fluss  $f'$  in  $G'$  zu konstruieren, und umgekehrt.

**Lösung.** Wir zeigen die zu beweisende Äquivalenz in zwei Schritten.

“ $\Rightarrow$ ”: Sei  $\beta$  eine bezüglich  $l$  und  $c$  zulässige Strömung in  $G$ . Wir definieren nun eine Funktion  $f' : E' \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  auf  $G'$  und zeigen dass  $f'$  ein maximaler  $s$ - $t$ -Fluss auf  $G'$  mit Flusswert  $w(f') = \sum_{(u,v) \in E} l(u,v)$  ist. Wir setzen dazu wie in Aufgabe (b)  $f'(u,v) = \beta(u,v) - l(u,v)$  für alle Kanten  $(u,v) \in E$  und  $f'(u,v) = c'(u,v)$  für die restlichen Kanten  $(u,v) \in E' \setminus E$ . Damit sind die Voraussetzungen der Aussage in Aufgabe (b) erfüllt, und es gilt für jeden Knoten  $v \in V$ :

$$\begin{aligned} \sum_{(v,w) \in E'} f'(v,w) &= \sum_{(v,w) \in E} \beta(v,w) && \text{(Aufgabe b)} \\ &= \sum_{(u,v) \in E} \beta(u,v) && \text{(Da } \beta \text{ Strömung)} \\ &= \sum_{(u,v) \in E'} f'(u,v) && \text{(Aufgabe b)} \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also  $\sum_{(v,w) \in E'} f'(v,w) = \sum_{(u,v) \in E'} f'(u,v)$  für alle Knoten  $v \in V = V' \setminus \{s,t\}$ , was gerade die Flusserhaltungsbedingung für einen  $s$ - $t$ -Fluss in  $G'$  ist. Der Wert des Flusses  $f'$  ist somit

$$\begin{aligned} w(f') &= \sum_{v \in V} f'(v,t) \\ &= \sum_{v \in V} c'(v,t) && \text{(Definition von } f') \\ &= \sum_{v \in V} \sum_{(v,w) \in E} l(v,w) && \text{(Definition von } c') \\ &= \sum_{e \in E} l(e) \end{aligned}$$

Des Weiteren ist  $f'$  ein maximaler Fluss, da wegen  $w(f') = \sum_{v \in V} c'(v,t)$  alle Kanten zur Senke gesättigt sind. Damit ist die zu zeigende Aussage bewiesen.

“ $\Leftarrow$ ”: Für die Rückwärtsrichtung nehmen wir nun an, dass  $f' : E' \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  ein zulässiger  $s$ - $t$ -Fluss in  $G'$  mit Flusswert  $w(f') = \sum_{e \in E} l(e)$  ist. Wegen

$$\begin{aligned} w(f') &= \sum_{e \in E} l(e) \\ &= \sum_{v \in V} \sum_{(u,v) \in E} l(u,v) \\ &= \sum_{(s,v) \in E'} \sum_{(u,v) \in E} l(u,v) \\ &= \sum_{(s,v) \in E'} c'(s,v) \end{aligned}$$

sind alle Kanten  $(s,v) \in E'$  gesättigt. Analog folgt, dass die Kanten  $(v,t) \in E'$  ebenfalls gesättigt sein müssen. Zu  $f'$  konstruieren wir nun eine Strömung  $\beta : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  wie folgt: Sei  $\beta(u,v) = f'(u,v) + l(u,v)$  für jede Kante  $(u,v) \in E$ . Dann sind wieder die Voraussetzungen von Aufgabe (b) erfüllt, und es gilt für  $\beta$  die Flusserhaltungsbedingung für alle Knoten  $v \in V$ :

$$\begin{aligned} \sum_{(v,w) \in E} \beta(v,w) &= \sum_{(v,w) \in E'} f'(v,w) && \text{(Aufgabe b)} \\ &= \sum_{(u,v) \in E'} f'(u,v) && \text{(Flusserhaltung von } f) \\ &= \sum_{(u,v) \in E'} \beta(u,v) && \text{(Aufgabe b)} \end{aligned}$$

Das heißt  $\beta$  ist eine Strömung. Weiterhin ist  $\beta$  eine zulässige Strömung, da wegen

$$0 \leq f'(u,v) \leq c(u,v) - l(u,v)$$

folgt, dass

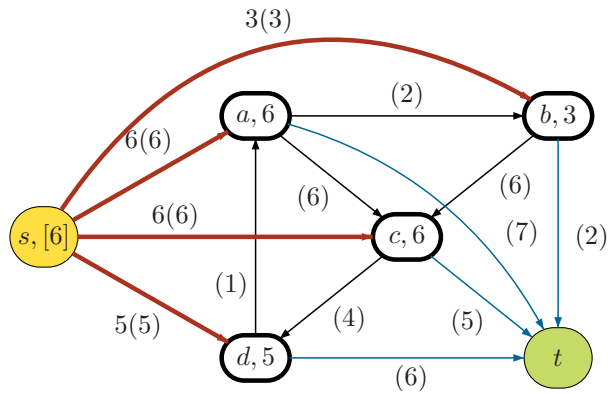
$$0 \leq \underbrace{f'(u,v) + l(u,v)}_{=\beta(u,v)} \leq c(u,v).$$

Insgesamt ist also bewiesen dass in  $G$  genau dann eine bezüglich  $c$  und  $l$  zulässige Strömung  $\beta$  existiert, wenn in  $G'$  ein maximaler  $s$ - $t$ -Fluss mit Wert  $w(f) = \sum_{(u,v) \in E} l(u,v)$  existiert. □

- (d) Bestimmen Sie eine zulässige Strömung in dem Graphen aus Aufgabe (a). Berechnen Sie dazu einen maximalen Fluss in dem Graphen  $G'$ , den Sie aus Aufgabe (a) erhalten haben. Benutzen Sie hierzu den Algorithmus von Goldberg & Tarjan. Geben Sie sämtliche Zwischenschritte an. Zeichnen Sie das aktuelle Netzwerk vor jeder (bis auf die erste) RELABEL-Operation und nachdem der Algorithmus terminiert. Halten Sie sich an die Notation aus dem Skript.

**Lösung.** Im Folgenden halten wir uns an die Notation aus dem Skript: Gegenkanten bleiben implizit, und werden nicht dargestellt. Die Werte an den Kanten entsprechen dem Präfluss, falls er von 0 abweicht. Die Werte in Klammern geben die Maximalkapazität an. Die Werte an den Knoten geben den Flussüberschuss an (sofern dieser größer als 0 ist). Die Knotenwerte in eckigen Klammern geben die Höhe des jeweiligen Knotens an. Fett gezeichnete Knoten sind aktiv, während fett gezeichnete Kanten saturiert sind.

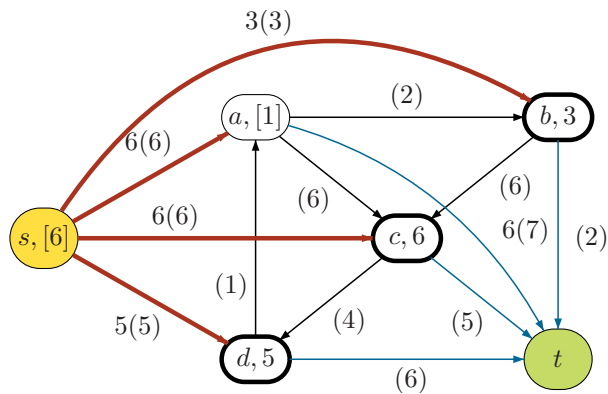
Zunächst wird RELABEL( $s$ ) durchgeführt. Dann ist  $\text{dist}(s) = 6$  und alle Kanten  $(s,v) \in E$  werden saturiert. Das führt zu folgender Situation im Netzwerk.



Wir führen jetzt folgende Operationen durch:

- $RELABEL(a)$ .  
Dann ist  $dist(a) = 1$ .
- $PUSH(a, t)$  mit  $\Delta = 6$ .  
Es ist nun  $e(a) = 0$ .

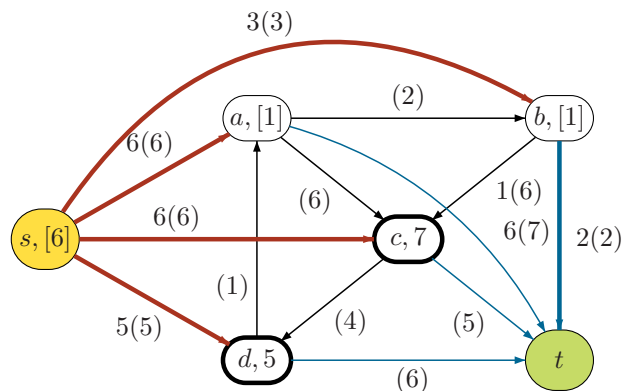
Es ergibt sich folgende Situation im Netzwerk.



Wir führen jetzt folgende Operationen durch:

- $RELABEL(b)$ .  
Dann ist  $dist(b) = 1$ .
- $PUSH(b, t)$  mit  $\Delta = 2$ .  
Es ist nun  $e(b) = 1$ .
- $PUSH(b, c)$  mit  $\Delta = 1$ .  
Es ist nun  $e(b) = 0$  und  $e(c) = 7$ .

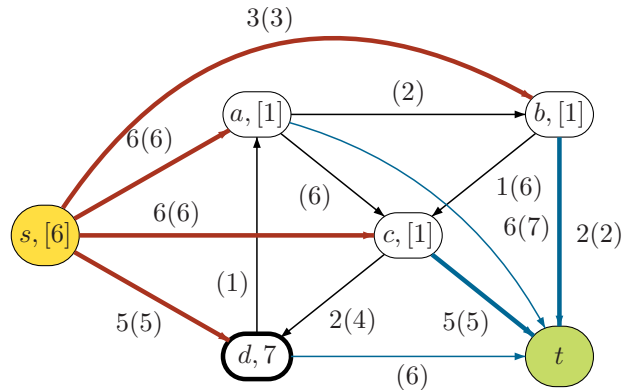
Es ergibt sich folgende Situation im Netzwerk.



Wir führen jetzt folgende Operationen durch:

- RELABEL( $c$ ).  
Dann ist  $\text{dist}(c) = 1$ .
- PUSH( $c, t$ ) mit  $\Delta = 5$ .  
Es ist nun  $e(c) = 2$ .
- PUSH( $c, d$ ) mit  $\Delta = 2$ .  
Es ist nun  $e(c) = 0$  und  $e(d) = 7$ .

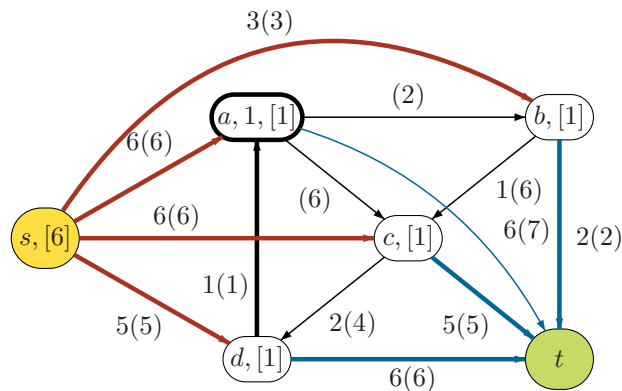
Es ergibt sich folgende Situation im Netzwerk.



Wir führen jetzt folgende Operationen durch:

- RELABEL( $d$ ).  
Dann ist  $\text{dist}(d) = 1$ .
- PUSH( $d, t$ ) mit  $\Delta = 6$ .  
Es ist nun  $e(d) = 1$ .
- PUSH( $d, a$ ) mit  $\Delta = 1$ .  
Es ist nun  $e(d) = 0$  und  $e(a) = 1$ .

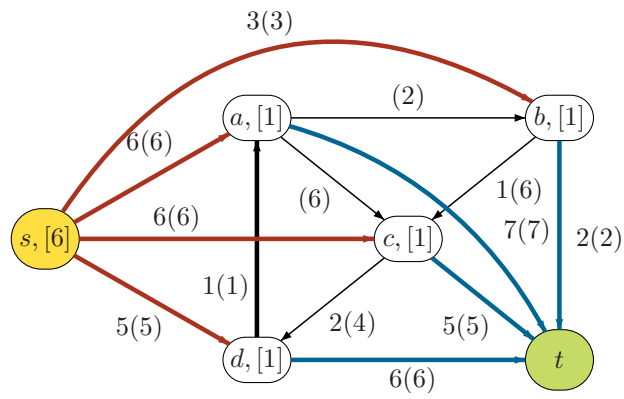
Es ergibt sich folgende Situation im Netzwerk.



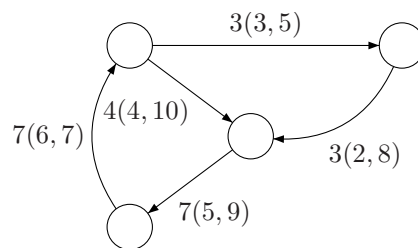
Wir führen jetzt folgende Operationen durch:

- PUSH( $a, t$ ) mit  $\Delta = 1$ .  
Dann ist  $e(a) = 0$ .

Es ist kein weiterer Knoten aktiv, das heißt der Algorithmus terminiert, und die Endsituation ist wie folgt.



Der resultierende Fluss  $f$  hat den Wert  $w(f) = 20$ . Setzt man nun für jede Kante  $\beta(e) := f(e) + l(e)$ , so erhält man folgende gültige Strömung in  $G$ .



□