KIT Karlsruhe Institute of Technology
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 6

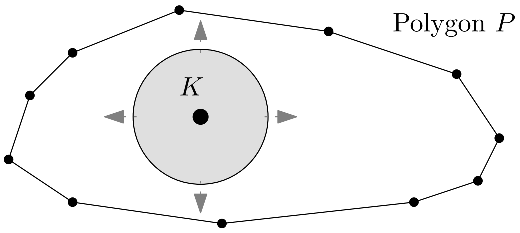
Vorlesung Algorithmentechnik im WS 09/10

Ausgabe 12. Jänner 2010
Abgabe 21. Jänner, 15:30 Uhr in der Übung (oder im Kasten vor Zimmer 319, Geb. 50.34)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre E-Mailadresse aber keine Matrikelnummer auf Ihr Übungsblatt. Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Problem 1: Größter Kreis in konvexem Polygon [vgl. Kapitel 6 im Skript, Vorlesungsfolien vom 7. Jänner 2010]***

Gegeben sei ein konvexes Polygon $P \subseteq \mathbb{R}^2$. Bei dem Problem in dieser Aufgabe suchen wir nach dem größtmöglichen Kreis $K \subseteq \mathbb{R}^2$, der vollständig in P enthalten ist; Das heißt, es gilt $K \subseteq P$ wobei der Radius von K maximal ist.



(a) Geben Sie ein lineares Programm zur Lösung des Problems für ein Polygon P an und erläutern Sie dabei die Zielfunktion, sowie alle Variablen und Nebenbedingungen.

Hinweis: Überlegen Sie sich wie Sie ein konvexes Polygon mit n Seiten definieren können so, dass ausgehend davon die Bedingung $K \subseteq P$ für einen beliebigen Kreis überprüft werden kann. Bauen Sie ausgehend davon Ihr lineares Programm.

(b) Lässt sich das auf höhere Dimensionen verallgemeinerte Problem (das heißt, wir suchen nach der größtmöglichen Kugel, die in einem konvexen Polytop enthalten ist) ebenfalls durch ein lineares Programm lösen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Betrachten Sie das folgende, sehr ähnliche Problem: Zu einem konvexen Polygon $P \subseteq \mathbb{R}^2$ suchen wir den *kleinstmöglichen* Kreis $K \subseteq \mathbb{R}^2$ so, dass P vollständig in K enthalten ist, also $P \subseteq K$ gilt. Können Sie dieses Problem ebenfalls durch ein lineares Programm (ähnlich zu Aufgabe (a)) lösen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Problem 2: Euklidischer Geschäftsreisender [vgl. Kapitel 6 im Skript, Vorlesungsfolien vom 7. Jänner 2010] **

Das *Problem des euklidischen Geschäftsreisenden* ist folgendermaßen definiert: Gegeben seien n Punkte $p_i \in P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ in der Ebene mit Koordinaten (x_i, y_i) für jeden Punkt $p_i \in P$. Gesucht ist die kürzeste Rundtour, die alle Knoten mindestens einmal besucht. Rundtour bedeutet, dass die Tour an dem gleichen (frei wählbaren) Knoten beginnen und enden muss. Der Abstand zweier Punkte ist definiert durch den euklidischen Abstand der beiden Punkte.

Modellieren Sie das Problem als (gegebenenfalls) ganzahliges lineares Programm. Erklären Sie hierbei Zielfunktion, alle Variablen und alle Nebenbedingungen.

Problem 3: Dualität [vgl. Kapitel 6 im Skript, Vorlesungsfolien vom 7. Jänner 2010] **

Marco Stanley Fogg[1] ist ein Student, dem nach dem Tod seines Onkels lediglich dessen antiquarische Buchsammlung als finanzielle Rücklage bleibt. Um sein Studium möglichst lange durch den Verkauf der Bücher finanzieren zu können, versucht er, seine Ernährung auf ein Minimum zu beschränken. Nachdem er für eine Menge von m wichtigen Nährstoffen $1, \ldots, m$ jeweils den minimalen täglichen Bedarf b_i $(i = 1, \ldots, m)$ für einen Mann seines Alters und Gewichts in Erfahrung gebracht hat, sucht er den lokalen Supermarkt auf und ermittelt für eine Menge von n Produkten $1, \ldots, n$ jeweils den Preis pro Einheit c_j $(j = 1, \ldots, n)$ sowie den Anteil a_{ij} des Nährstoffes i $(i = 1, \ldots, m)$ am Produkt j $(j = 1, \ldots, n)$.

(a) Formulieren das beschriebene Optimierungsproblem als lineares Programm L.

(b) Formulieren Sie das zu L duale lineare Programm D. Geben Sie eine sinnvolle Interpretation des dualen Programms an und überlegen Sie sich dabei, wer ein Interesse daran haben könnte, das duale Programm zu optimieren.

Problem 4: Lineare Ungleichungssysteme [vgl. Kapitel 6 im Skript, Vorlesungsfolien vom 7. Jänner 2010] **

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass das Problem ein lineares Programm zu lösen äquivalent zu dem Problem ist, zu ein System von Ungleichungen danach zu fragen ob dieses bereits eine gültige Lösung hat.

Gegeben sei also eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^m$. Bei dem Problem LINEAR INEQUALITY FEASIBILITY suchen wir einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, der die Ungleichungen $Ax \leq b$ erfüllt.

(a) Zeigen Sie, dass mit einem Algorithmus zur Lösung eines linearen Programms auch das Problem LINEAR INEQUALITY FEASIBILITY gelöst werden kann. Die Anzahl Variablen und Nebenbedingungen für das lineare Programm soll dabei polynomiell in n und m sein.

(b) Zeigen Sie die Umkehrung von Aufgabe (a): Gegeben ein lineares Programm, zeigen Sie, wie Sie mit einem Algorithmus für das LINEAR INEQUALITY FEASIBILITY Problem das lineare Programm lösen können. Die Anzahl Variablen und Ungleichungen des Ungleichungssystems soll dabei polynomiell in der Anzahl Variablen und Nebenbedingungen des linearen Programms sein.

Hinweis: Nutzen Sie beim Aufstellen des Ungleichungssystems die Dualitätssätze aus der Vorlesung aus.

[1]Figur aus dem Roman "Moon Palace" von Paul Auster, die Handlung wurde leicht abgeändert ;)