Übungsblatt 5

Vorlesung Algorithmentechnik im WS 09/10

Ausgabe 17. Dezember 2009
Abgabe 12. Januar (Di.), 15:30 Uhr in der Übung (oder im Kasten vor Zimmer 319, Geb. 50.34)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre E-Mailadresse aber keine Matrikelnummer auf Ihr Übungsblatt. Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Problem 1: Lineare Weihnachtsalgebra – Kreisbasen [vgl. Kapitel 5.1 im Skript]

Machen Sie sich folgende Zusammenhänge klar:

- Addition und Multiplikation des endlichen Körpers $GF(2)$ (Galois-Field; alternative Schreibweise: $\mathbb{F}_2$) induzieren eine $GF(2)$-Vektorraumstruktur auf dem kartesischen Produkt $GF(2)^n = \underbrace{GF(2) \times GF(2) \times \cdots \times GF(2)}_{n\text{-mal}}$.

- Die Identifizierung der in Definition 5.1 gegebenen Kreise $\{C \mid C \text{ ist Kreis in } G\}$ mit Vektoren $\{X^C := X^{E_C} \mid C \text{ ist Kreis in } G\}$ aus $GF(2)^m$, $m := |E|$, impliziert folgende Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{C}$ aller Kreise:

$$C_1 \sim C_2 :\Leftrightarrow \; E_{C_1} = E_{C_2}$$

  Skript bzw. Vorlesung und Übung unterscheiden **nicht** explizit zwischen Kreisen nach Definition 5.1 und Kreisklassen nach obiger Äquivalenzrelation. Die jeweilige Bedeutung der Notation geht aus dem Kontext hervor.

- Analog zur obigen Identifizierung von Kreisen mit bestimmten Vektoren aus $GF(2)^m$ lassen sich auch allgemeine Kantenmengen mit Vektoren aus $GF(2)^m$ identifizieren. Das kartesische Produkt $GF(2)^m$ kann sogar, vermöge der kanonischen Vektorraumstruktur, als Vektorraum $\mathcal{P}(E)$ aller Kantenteilmengen eines Graphen aufgefasst werden.

- Sei V ein K-Vektorraum und $S \subseteq V$. Dann ist der von S erzeugte Untervektorraum $\langle S \rangle_{K\text{-VR}}$ definiert als $\langle S \rangle_{K\text{-VR}} := \min\{ U \subseteq V \mid U \text{ ist UVR von V, } S \subseteq U\}$. Die Menge S ist ein Erzeugendensystem des Untervektorraums $\langle S \rangle_{K\text{-VR}}$.
  Die Menge $\mathcal{C} \subseteq GF(2)^m$ aller Kreise eines Graphen G ist ein Erzeugendensystem des Untervektorraums $\langle \mathcal{C} \rangle_{GF(2)\text{-VR}}$ (Kreisraum von G).

(a) Untenstehende Abbildung zeigt einen Kreis C im Graphen $G = (V, E)$. Zählen Sie alle Elemente der Kreis-Äquivalenzklasse auf, die C enthält.

(b) Zeigen Sie, dass für den Kreisraum $\langle \mathcal{C} \rangle_{GF(2)\text{-VR}}$ eines Graphen G gilt:

$$\langle \mathcal{C} \rangle_{GF(2)\text{-VR}} \; = \; \mathcal{C}.$$

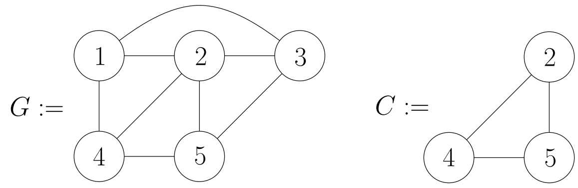

Abbildung 1: zu Teilaufgabe (b).

Problem 2: Korrektheit der Fundamentalbasis-Definition – Kreisbasen [vgl. Kapitel 5.1 im Skript]

Zur Wiederholung:

- Für einen K-Vektorraum V sind folgende Aussagen äquivalent:
  - $B \subseteq V$ ist eine Basis von V.
  - $B \subseteq V$ ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V.
  - $B \subseteq V$ ist ein minimales Erzeugendensystem von V.
  - $B \subseteq V$ ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.
- Eine Teilmenge $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq V$ eines K-Vektorraums V heißt *linear unabhängig*, wenn gilt:
$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i = 0,\ a_i \in K \quad \Longleftrightarrow \quad a_i = 0 \quad \forall\, i,$$
das heißt, wenn der Nullvektor sich nur als triviale Linearkombination der Vektoren in B schreiben lässt.

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender Graph und $T = (V, E_T)$ ein aufspannender Baum in G. Dann ist die Fundamentalbasis (bzgl. T) des Kreisraumes $\mathcal{C}$ von G definiert als
$B_T := \{C_e \,|\, e \in E \setminus E_T,\, C_e \in \mathcal{C},\, E_{C_e} = \{e = \{u, v\}\} \cup \{\text{Pfadkanten von } u \text{ nach } v \text{ in } T\}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $B_T \subseteq GF(2)^m$, $m := |E|$, linear unabhängig ist.

(b) Zeigen Sie, dass $B_T \subseteq GF(2)^m$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{C}$ ist. Gehen Sie dabei konstruktiv vor und beschreiben Sie, wie ein beliebiger Kreis durch Linearkombination von Elementen aus B_T gebildet werden kann.

(c) Zeigen Sie, dass $|B_T| = m - n + 1$ gilt, wobei $n := |V|$, $m := |E|$.

Problem 3: Kreisräume – Kreisbasen [vgl. Kapitel 5.4 im Skript]

(a) Geben Sie eine (unendliche) Familie $(G_i)_{i \in I}$ von Graphen an, so dass für jeden Graphen G_i die Anzahl der Kreise in G_i (als Kreisklassen betrachtet) **exponentiell** in der Anzahl der Kanten in G_i ist. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung.

(b) Geben Sie eine (unendliche) Familie $(G_i)_{i \in I}$ von Graphen an, so dass für jeden Graphen G_i die Anzahl der Kreise in G_i (als Kreisklassen betrachtet) **linear** in der Anzahl der Kanten in G_i ist. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung.

Problem 4: Algorithmus von de Pina – MCB [vgl. Kapitel 5.4 im Skript]

Verdeutlichen Sie sich folgende Zusammenhänge:

- Die in Kapitel 5.4.2 eingeführte "verkürzte" Schreibweise der mit Kreisen identifizierten Inzidenzvektoren in $GF(2)^m$ ist nichts anderes als die Darstellung der Vektoren aus $\mathcal{C}$ bezüglich einer festen Fundamentalbasis des Kreisraums $\mathcal{C}$. Im Gegensatz dazu wurden zuvor die Inzidenzvektoren (und alle anderen Vektoren in $\mathcal{P}(E) = GF(2)^m$) bezüglich der Standardbasis von $GF(2)^m$ dargestellt. Die verkürzte Darstellung hat eine Länge von $dim(\mathcal{C}) \leq dim(GF(2)^m) = m$.
- Für das auf $\mathcal{C}$ eingeführte Skalarprodukt (auf allgemeinen K-Vektorräumen ist die Bezeichnung *Skalarprodukt* auch für nicht positiv definite, symmetrische Bilinearformen üblich) gilt:
  - $\langle C_1, C_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow$ Die (eindeutigen) Vektordarstellungen von C_1 und C_2 bezüglich einer festen Fundamentalbasis haben eine **gerade** Anzahl gemeinsamer Basisvektoren.
  - $\langle C_1, C_2 \rangle = 1 \Leftrightarrow$ Die (eindeutigen) Vektordarstellungen von C_1 und C_2 bezüglich einer festen Fundamentalbasis haben eine **ungerade** Anzahl gemeinsamer Basisvektoren.

Untenstehende Abbildung zeigt einen Graphen $G = (V, E)$ und einen fett, schwarz eingezeichneten aufspannenden Baum $T = (V, E_T)$ von G.

(a) Führen Sie den Algorithmus von de Pina (algebraisch, Algorithmus 41 im Skript) auf G aus. Nutzen Sie den eingezeichneten Baum und halten Sie sich an die Reihenfolge der Kanten entsprechend ihrer Nummerierung. Notieren Sie für jeden Schleifendurchlauf der Zeilen 3 bis 7 des Algorithmus k, C_k, S_k sowie alle S_i, die geändert werden, und die resultierende Basis. Nehmen Sie als Kantengewicht $c(e_i) = 1$ an, für alle Kanten e_i.

(b) Stellen Sie den gestrichelt, grau eingezeichneten Kreis als Linearkombination der in (a) berechneten MCB dar.

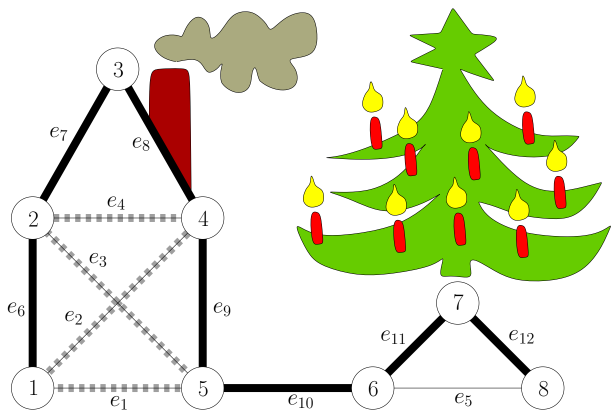

Abbildung 2: Das ist das Haus vom Nikolaus...