Algorithmische Methoden der Netzwerkanalyse

Marco Gaertler

Algorithmic Group
Faculty of Informatics
Universität Karlsruhe (TH)
Research University · founded 1825

9. Dezember, 2008

- Abstandszentralitäten
- Rückkopplungszentralitäten

Distanzsummen auf Bäumen

Lemma

Sei $T = (V, E)$ ein ungerichteter Baum und $T_s = (V_S, E_s)$ der zugehörige Wurzelbaum mit Wurzel s. Ist $T_s(v) = (V_s(v), E_s(v))$ der Wurzelteilbaum von $v \in V$, dann gilt:

$$\sum_{t \in V} d_T(s,t) = \sum_{t \in V} d_{T_s}(s,t) = \sum_{v \in N^+_{T_s}(s)} \sum_{t \in V_s(v)} (1 + d_{T_s}(v,t)) \ .$$

Closeness auf Bäumen

Satz

Die Closeness-Zentralität der Knoten eines ungerichteten Baumes können in $\mathcal{O}(n)$ Zeit berechnet werden.

Betweenness in ungewichteten Graphen

Notation:

$$P^-_G(s,v) := \{(u,v) \in E : \; d_G(s,v) = d_G(s,u) + 1\}$$

Lemma

Es gilt:

$$\sigma_G(s,v) = \begin{cases} \sum_{(u,v)\in P^-_G(s,v)} \sigma_G(s,u) & \text{, falls } s \neq v \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases} .$$

Betweenness in ungewichteten Graphen

Notation:

$$P_G^-(s,v) := \{(u,v) \in E \;:\; d_G(s,v) = d_G(s,u) + 1\}$$

Lemma

Es gilt:

$$\sigma_G(s,v) = \begin{cases} \sum_{(u,v)\in P_G^-(s,v)} \sigma_G(s,u) & \text{, falls } s \neq v \\ 1 & \text{, sonst} \end{cases} .$$

Betweenness in ungewichteten Graphen

Definition

Gegeben sei ein Multigraph $G = (V, E)$. Die *Abhängigkeit* des Paares $s, t \in V$ bzw. des Knoten $s \in V$ von einem KNoten $v \in V$ is definiert als:

$$\begin{aligned} \delta_G(s,t|v) &:= \frac{\sigma_G(s,t|v)}{\sigma_G(s,t)} \\ \delta_G(s|v) &:= \sum_{t \in V} \delta_G(s,t|v) \ . \end{aligned}$$

Es gilt:

$$c_B(G)_v = \sum_{s \in V} \delta_G(s|v) \ .$$

Betweennessberechnung

Lemma

Für $s \neq v \in V$ gilt:

$$\delta_G(s|v) = \sum_{\substack{(v,w)\in P^-_G(s,w)\\ w\in V}} \frac{\sigma_G(s,v)}{\sigma_G(s,w)} \cdot \Big(1 + \delta_G(s|w)\Big) .$$

Satz

Die Betweenness-Zentralitäten der Knoten eines Multigraphen können in $\mathcal{O}\left(n \cdot (n+m)\right)$ Zeit berechnet werden.

Betweennessberechnung

Lemma

Für $s \neq v \in V$ gilt:

$$\delta_G(s|v) = \sum_{\substack{(v,w)\in P_G^-(s,w)\\ w\in V}} \frac{\sigma_G(s,v)}{\sigma_G(s,w)} \cdot \Big(1 + \delta_G(s|w)\Big) \ .$$

Satz

Die Betweenness-Zentralitäten der Knoten eines Multigraphen können in $\mathcal{O}\left(n \cdot (n+m)\right)$ Zeit berechnet werden.

- Abstandszentralitäten
- Rückkopplungszentralitäten

Einflussmatrix

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein Multigraph und $A(G)$ die zugehörige Adjazenzmatrix. Die *Einflussmatrix* A_∞ mit Abschwächungskoeffizient α ist definiert als

$$A_\infty := \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \cdot A)^k \quad .$$

Einfluss

Lemma

Die Einflussmatrix ist wohldefiniert, falls

$$\alpha = \Big(\min(\Delta^-(G), \Delta^+(G)) + 1 \Big)^{-1} .$$

Definition

Die *Einluss-Zentralität c_I* ist definiert durch

$$c_I(G) = A_\infty \cdot \mathbf{1}$$

für alle $G \in \mathcal{G}$ mit Einflussmatrix A_∞ und Abschwächungskoeffizient $\alpha = \Big(\min(\Delta^-(G), \Delta^+(G)) + 1 \Big)^{-1}$.

Einfluss

Lemma

Die Einflussmatrix ist wohldefiniert, falls

$$\alpha = \Big(\min(\Delta^-(G), \Delta^+(G)) + 1\Big)^{-1} .$$

Definition

Die *Einluss-Zentralität* c_I ist definiert durch

$$c_I(G) = A_\infty \cdot \mathbf{1}$$

für alle $G \in \mathcal{G}$ mit Einflussmatrix A_∞ und Abschwächungskoeffizient $\alpha = \Big(\min(\Delta^-(G), \Delta^+(G)) + 1\Big)^{-1}$.

Einfluss

Vermutung:

$$c_I \in \bullet \rightarrow \circ(\mathcal{G}) \cup \bullet \rightarrow \bullet(\mathcal{G})$$

Lemma

Es gilt:

$$c_I(G)_v = \sum_{(v,w)\in E} \alpha \cdot (1 + c_I(G)_w)$$

Einfluss

Vermutung:

$$c_I \in \bullet \to \circ(\mathcal{G}) \cup \bullet \to \bullet(\mathcal{G})$$

Lemma

Es gilt:

$$c_I(G)_v = \sum_{(v,w)\in E} \alpha \cdot (1 + c_I(G)_w)$$

Eigenvektorzentralität

Definition

Die *Eigenvektor-Zentralität* c_E ist definiert für alle $G = (V, E) \in \mathcal{S}$ als die eindeutige Lösung von

$$c_E(G) = \frac{1}{\varrho(G)} \cdot A(G) \cdot c_E(G) \quad ,$$

mit $c_E(G)_v > 0$ für $v \in V$, $\varrho(G)$ dem Spektralradius der Adjazenzmatrix und $\sum_{v \in V} c_E(G)_v = 1$.

Bekannte Varianten der Eigenvektorzentralität

- PageRank
- Hubs & Authorities

PageRank

Definition

Für $G \in \mathcal{G}$ und ein $0 < \omega < 1$ ist der *PageRank* c_P definiert als die eindeutige Lösung von

$$c_P(G) = (1-\omega)M^+(G)^T \cdot c_P(G) + \frac{\omega}{n} \cdot \mathbf{1} \quad ,$$

mit $M^+(G) = (D^+(G))^{-1} \cdot A(G)$.

Hubs & Authorities

Definition

Für $G \in \mathcal{G}$ ist die *Hub-Zentralität* c_H definiert durch

$$c_H(G) = c_E(G') \ ,$$

wobei G' der Multigraph mit der Adjazenzmatrix $A(G) \cdot A(G)^T$ ist und die *Authority-Zentralität* c_A durch

$$c_A(G) = c_E(G''),$$

wobei G'' der Multigraph mit der Adjazenzmatrix $A(G)^T \cdot A(G)$ ist.