Algorithmische Methoden der Netzwerkanalyse

28. Oktober, 2008

Eigenschaften

Lemma

Jeder schlichte ungerichtete Graph mit mindestens zwei Knoten enthält zwei Knoten gleichen Grades.

Eigenschaften

Lemma

Jeder schlichte ungerichtete Graph mit mindestens zwei Knoten enthält zwei Knoten gleichen Grades.

Handschlaglemma

In (gerichteten wir ungerichteten) Multigraphen gilt:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot m \quad .$$

Existenzfrage

Fragen

- Welche Folgen von natürlichen Zahlen sind Gradfolgen bestimmter Multigraphenklassen?
- Gibt es Unterschiede, ob man Multigraphen oder Graphen betrachtet?

Konjungierte Zahlenfolge

Definition: Konjungierte Zahlenfolge

Zu einer Folge $D = (d_1, \ldots, d_n)$ von natürlichen Zahlen sei $\Delta = \max_{j=1,\ldots,n} d_j$. Die zu D *konjungierte Folge* $D^* = (d_1^*, \ldots, d_\Delta^*)$ ist definiert durch

$$d_i^* = \left| \left\{ j \in \{1, \ldots, n\} \,\middle|\, d_j \geq i \right\} \right| \quad .$$

Vereinbarung: $d_i^* := 0$ für $i > \Delta$.

Existenzaussage

Satz (Ryser 1957; Gale 1957)

Eine Folge $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ von Paaren natürlicher Zahlen mit $a_1 \geq \cdots \geq a_n$ und $a_i, b_i \leq n$ ist genau dann die Gradfolge eines Graphens, wenn

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{j \geq 1} b_j^* \\ \text{und} \sum_{i=1}^{k} a_i &\leq \sum_{j=1}^{k} b_j^* \quad \text{für } k = 1, \ldots, n-1 \ . \end{aligned}$$

Korrigiert-konjungierte Zahlenfolge

Definition: Korrigiert-konjungierte Zahlenfolge

Zu einer nicht-aufsteigend sortierten Folge $D = (d_1, \dots, d_n)$ von natürlichen Zahlen ist die *korrigiert-konjungierte Folge* $\overline{D} = (\overline{d}_1, \dots, \overline{d}_{d_1+1})$ definiert durch

$$\begin{aligned} \overline{d}_i \quad = \quad & \left| \left\{ j \in \{1, \dots, i-1\} \,\middle|\, d_j \geq i-1 \right\} \right| \\ & + \left| \left\{ j \in \{i+1, \dots, n\} \,\middle|\, d_j \geq i \right\} \right| \quad . \end{aligned}$$

Existenzaussage

Satz (Erdős und Gallai 1960)

Eine Folge $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ von natürlichen Zahlen ist genau dann die Gradfolge eines schlichten unggerichteten Graphen, wenn

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} d_i &\equiv 0 \mod 2 \\ \text{und} \sum_{i=1}^{k} d_i &\leq \sum_{i=1}^{k} \overline{d}_i \quad \text{für } k = 1, \ldots, n \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Existenzaussage

Satz (Erdős und Gallai 1960)

Eine Folge $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ von natürlichen Zahlen ist genau dann die Gradfolge eines schlichten unggerichteten Graphen, wenn

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} d_i &\equiv 0 \mod 2 \\ \text{und} \sum_{i=1}^{k} d_i &\leq \sum_{i=1}^{k} \overline{d}_i \quad \text{für } k = 1, \ldots, n \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Satz

Die Bedingungen (1) sind äquivalent zu

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{d_i, k\} \quad \text{für } k = 1, \ldots, n \ .$$

Existenzaussage

Satz (Havel 1955; Hakimi 1962)

Eine Folge $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ mit $d_1 \leq n-1$ ist genau dann Gradfolge eines schlichten ungerichteten Graphen, wenn auch $d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$ Gradfolge eines solchen Graphen ist.

Existenzaussage

Satz (Havel 1955; Hakimi 1962)

Eine Folge $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ mit $d_1 \leq n-1$ ist genau dann Gradfolge eines schlichten ungerichteten Graphen, wenn auch $d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$ Gradfolge eines solchen Graphen ist.

Lemma

Zu einer Folge $D = (d_1, \ldots, d_n)$ mit $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ sei $\mathcal{G}_D$ die Menge aller schlichten ungerichteten Graphen mit Knoten $\{v_1, \ldots, v_n\}$, in denen v_i den Grad d_i hat. Ist $\mathcal{G}_D$ nicht leer, dann enthält sie einen Graphen mit $N(v_1) = \{v_2, \ldots, v_{d_1+1}\}$.

Teilgraph

Definition: Teilgraph

Ein Multigraph $G = (V, E)$ *enthält* einen Multigraphen $G' = (V', E')$, falls

$$V' \subseteq V \quad \text{und} \quad E' \subseteq E \ .$$

Wir nennen G' auch *Teilgraph* von G und schreiben $G' \subseteq G$.

Weg und Kreis

Definition: Weg und Kreis

Ein *(gerichteter) Weg* der *Länge* k ist ein Graph $P_k = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$ und $E = \{(v_1, v_2), \ldots, (v_k, v_{k+1})\}$, wobei $|E| = k$ verlangt wird. Wir nennen P_k auch einen (v_1, v_{k+1})-*Weg*. Der Graph $C_k = (V, E \cup \{(v_{k+1}, v_1)\})$ mit $(v_{k+1}, v_1) \notin E$ heißt *(gerichteter) Kreis* der *Länge* $k + 1$. Die Graphen P_k und C_k heißen einfach, falls $|V| = k + 1$.

Existenz

Satz

Jeder schlichte ungerichtete Graph G enthält einen Weg der Länge $\delta(G)$ und, falls $\delta(G) \geq 2$, auch einen Kreis der Länge mindestens $\delta(G) + 1$.