Algorithmische Methoden der Netzwerkanalyse

21.10.2008

Fragen

1. Was sind Netzwerke und wo treten sie auf?
2. Welche Aufgabe hat Netzwerkanalyse?
3. Warum ist es für Euch interessant? Was erwartet Ihr?

Multimenge

Definition: Multimenge

Ein Menge E zusammen mit einer *Vielfachheit* $\#_E : E \to \mathbb{N}_0$ ihrer Elemente heißt *Multimenge*. Die *Kardinalität*

$$|E| = \sum_{e \in E} \#_E(e) \quad .$$

Kurzschreibweise:

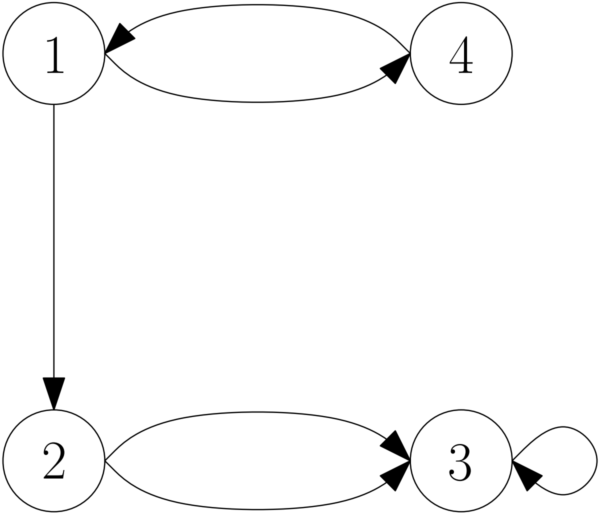
- $\#e$ für $\#_E(e)$
- $e \in_k E$ falls $e \in E$ und $\#e = k$

Multigraph

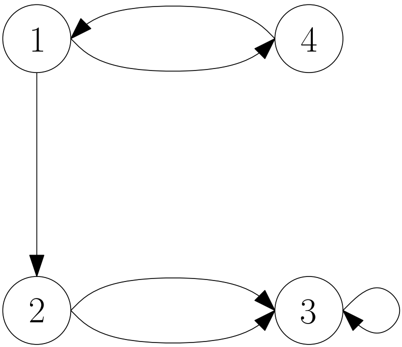
Definition: Multigraph

Ein *(gerichteter) Multigraph* ist ein Paar $G = (V, E)$ aus einer endlichen Menge V von *Knoten* und einer Multimenge $E \subseteq V \times V$ von *Kanten*. Kanten in $\{(v, v) \mid v \in V\}$ nennen wir *Schleifen*, und ein Multigraph ist *schlicht*, wenn er keine Schleifen hat.
Kanten $e \in_k E$ mit $k > 1$ heißen *Multikanten*.

Beispiel

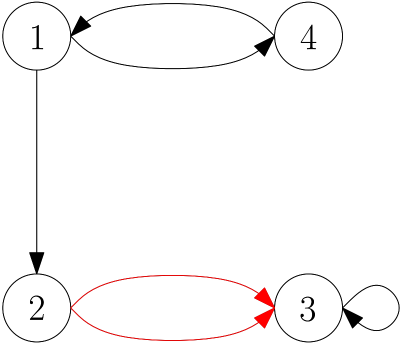


Notation



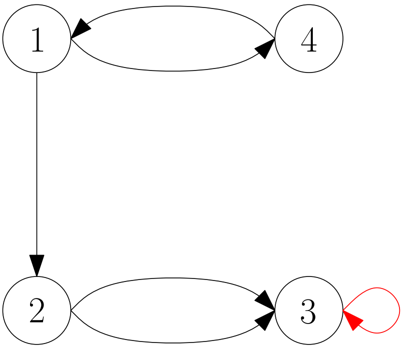
- $V = \{1, 2, 3, 4\}$
- $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3),$
  $(3, 3), (4, 1)\}$
  mit $\#(2, 3) = 2$ und
  $\#e = 1$ für $e \in E \setminus \{(2, 3)\}$

Notation



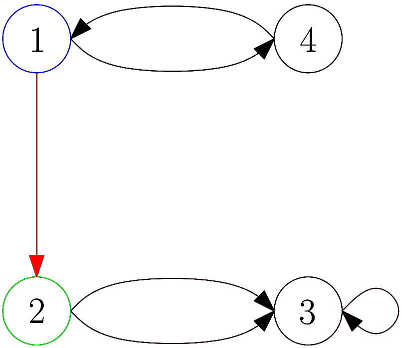
- $V = \{1, 2, 3, 4\}$
- $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 3), (4, 1)\}$ mit $\#(2, 3) = 2$ und $\#e = 1$ für $e \in E \setminus \{(2, 3)\}$
- $(2, 3)$ ist eine Multikante

Notation



- $V = \{1, 2, 3, 4\}$
- $E = \{(1,2), (1,4), (2,3), (3,3), (4,1)\}$ mit $\#(2,3) = 2$ und $\#e = 1$ für $e \in E \setminus \{(2,3)\}$
- $(2,3)$ ist eine Multikante
- $(3,3)$ ist eine Schleife

Notation



- $V = \{1, 2, 3, 4\}$
- $E = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 3), (4, 1)\}$
  mit $\#(2, 3) = 2$ und
  $\#e = 1$ für $e \in E \setminus \{(2, 3)\}$
- $(2, 3)$ ist eine Multikante
- $(3, 3)$ ist eine Schleife
- 1 ist Vorgänger von 2, 2 ist Nachfolger von 1 und 1 ist adjazent zu 2
- $(1, 2)$ ist inzident zu 1 (bzw. 2)

Knotengrad

Definition: Knotengrad

Sind $\vec{G} = (V, \vec{E})$ ein Multigraph und $v \in V$, so heißen

- $d^-_{\vec{G}}(v) = d^-(v) = \sum_{(u,v)\in\vec{E}} \#(u, v)$ *Eingangsgrad*
- $d^+_{\vec{G}}(v) = d^+(v) = \sum_{(v,w)\in\vec{E}} \#(v, w)$ *Ausgangsgrad*
- $d_{\vec{G}}(v) = d(v) = d^-(v) + d^+(v)$ *Knotengrad* (oder kurz *Grad*)

von v.

Knotengrad

Definition: Knotengrad

Sind $\vec{G} = (V, \vec{E})$ ein Multigraph und $v \in V$, so heißen

- $d^-_{\vec{G}}(v) = d^-(v) = \sum_{(u,v)\in\vec{E}} \#(u,v)$ *Eingangsgrad*
- $d^+_{\vec{G}}(v) = d^+(v) = \sum_{(v,w)\in\vec{E}} \#(v,w)$ *Ausgangsgrad*
- $d_{\vec{G}}(v) = d(v) = d^-(v) + d^+(v)$ *Knotengrad* (oder kurz *Grad*)

von v.

Ist $\overline{G} = (V, \overline{E})$ ein ungerichteter Multigraph, so definieren wir den (ungerichteten) Grad von v als

$$d_{\overline{G}}(v) = d(v) = \sum_{\substack{\{v,w\}\in\overline{E} \\ v\neq w}} \#\{v,w\} + 2\cdot\#\{v,v\}$$

Gradfolgen

Definition: Gradfolgen

Gegeben sei ein gerichteter oder ungerichteter Multigraph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Die Folge

$$D(G) = ((d^-(v_1), d^+(v_1)), \ldots, (d^-(v_n), d^+(v_n)))$$

des gerichteten bzw.

$$D(G) = (d(v_1), \ldots, d(v_n))$$

des ungerichteten Multigraphen G heißt dessen *Gradfolge*.