7. Übungsblatt

Ausgabe: 20. Januar 2009
Abgabe: 27. Januar 2009

Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Problem 1 — 1+3 Punkte

(a) Begründen Sie, dass $\min(|E|-1, \binom{n}{2} - |E|)$ eine obere Schranke für die Editierdistanz ist.

(b) Präzisieren Sie den Term $|E|-1$ in der obigen Schranke. Zeigen Sie, dass es Graphen gibt, bei denen die Verfeinerung gleich $|E|-1$ ist.

Problem 2 — 1+3 Punkte

Geben Sie einen Algorithmus an, der zu einem gegebenen Graphen (und festem k von Clustern) eine Kantenerweiterungsmenge berechnet mit minimaler Größe. Begründen Sie die Laufzeit und Korrektheit.

Problem 3 — 2+5+2+2 Punkte

Vervollständigen Sie den $\mathcal{NP}$-Vollständigkeitsbeweis aus der Vorlesung. Zeigen Sie dazu, dass zu einer gegebenen Instanz $\langle C, U\rangle$ von 3X3C der Graph $G_{C,U}$ (wie unten definiert) genau dann eine Editierdistanz kleiner oder K hat, falls $\langle C, U\rangle$ eine JA-Instanz ist, d.h. es ein Cover $I \subseteq C$ gibt mit $|I| = n$.

Definition von $G_{C,U} := (V, E)$ und K:

$$
\begin{aligned}
m &:= 30 \cdot n \\
V_S &:= \left\{ v_S^{(i)} \mid 1 \le i \le m \right\} \\
V &:= U \cup \biguplus_{S \in C} V_S \\
E_1 &:= \left\{ \{u, v_S^{(i)}\} \mid u \in S, 1 \le i \le m \right\} \\
E_2 &:= \left\{ \{v_S^{(i)}, v_S^{(j)}\} \mid S \in C, 1 \le i < j \le m \right\} \\
E_3 &:= \{\{u, u'\} \mid \exists S \in C \colon u, u' \in S\} \\
E &:= E_1 \cup E_2 \cup E_3 \\
K &:= \underbrace{m \cdot (3 \cdot |C| - 3n)}_{=:A} + \underbrace{|E_3| - 3n}_{=:B}
\end{aligned}
$$

Bitte wenden!

(a) Zeigen Sie, dass falls $\langle C, U\rangle$ ein Cover $I \subseteq C$ der Größe n hat, dann gibt es eine Kantenkorrektur in $G_{C,U}$, die eine Korrekturgröße von K hat.

(b) Zeigen Sie folgenden Aussagen unter der Annahme, dass $G_{C,U}$ eine Kantenkorrektur E' der Größe $F \leq K$ hat. Dazu sei $G' := (V, E \Delta E')$ der zugehörige Clustergraph:

   (i) $F < m/2 \cdot (m/2 - 2)$

   (ii) Für jedes 3-Tupel $S \in C$ existiert eine Clique K_S in G' mit $|V_S \cap K_S| \geq m/2 + 3$.

   (iii) Für jedes 3-Tupel $S \in C$ existiert eine Clique K_S in G' mit $K_S \subseteq V_S \cup S$.

   (iv) Für jedes 3-Tupel $S \in C$ existiert eine Clique K_S in G' mit $V_S \subseteq K_S$.

   (v) Für jeden Knoten $u \in U$ existiert genau eine Clique V_S, zu der er adjazent ist.

(c) Zeigen Sie, dass jedes Kantenkorrektur in $G_{C,U}$ eine Größe $\geq K$ hat.

(d) Zeigen Sie, dass eine Kantenkorrektur der Größe K in $G_{C,U}$ ein Cover von U der Größe n induziert.