# 6. Übungsblatt

**Ausgabe:** 14. Januar 2009
**Abgabe:** 20. Januar 2009

Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

## Problem 1 — 4 Punkte

Ein weiterer Knotenstrukturindex auf der Klasse $\mathcal{S}$ der nicht-isomorphen stark zusammenhängenden Multigraphen ist der *Radiality-Index*. Er ist für einen Knoten $v$ eines stark zusammenhängenden Multigraphen $G$ mit $n > 1$ Knoten durch

$$c_R(G)_v := \frac{\sum_{t \in V} (diam(G) + 1 - d_G(v,t))}{(n-1) \cdot diam(G)}$$

definiert. Geben Sie einen möglichst effizieten Algorithmus zur Berechnung. Begründen Sie die Korrektheit und Laufzeit.

## Problem 2 — 2+3 Punkte

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, wenn es eine Partition $V = X \uplus Y$ der Knotenmenge in zwei disjunkte Teilmengen $X$ und $Y$ gibt, so dass $E \subseteq X \times Y \cup Y \times X$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass ein ungerichteter Graph genau dann bipartit ist, wenn er keine Kreise ungerader Länge enthält.

(b) Spezialisieren Sie die Breitensuche mittels Root, Traverse und Done so, dass in einer Breitensuche getestet wird, ob ein zusammenhängender ungerichteter Graph bipartit ist.

## Problem 3 — 2+1+2 Punkte

Sei $G := (V := X \uplus Y, E)$ mit $E \subseteq X \times Y$ ein einfacher, gerichteter und bipartiter Graph und $A(G)$ die zugehörige Adjazenzmatrix. Weiter seien $G^X$ und $G^Y$ diejenigen Graphen, deren Adjazenzmatrix $A(G)^T \cdot A(G)$ und $A(G) \cdot A(G)^T$ sind.

(a) Welche Knoten $v \in V$ können Kanten in $G^X$ bzw. $G^Y$ haben? Geben Sie eine scharfe obere Schranke für den Grad der Knoten an.

(b) Welche Eigenschaften haben $G^X$ und $G^Y$?

(c) Geben Sie eine möglichst gute untere Schranke für die Größe eines inklusionsmaximalen vollständigen Teilgraphs von $G^X$ bzw. $G^Y$ an. Geben Sie ein Beispiel an, in dem der inklusionsmaximale vollständige Teilgraph grösser ist als die angegebene Schranke.

Bitte wenden!

## Matheübung: ($\alpha$) Struktur und Bedeutung (5) Punkte

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische, reguläre und diagonalisierbare Matrix mit den reellen Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Zeigen Sie, dass Algorithmus 1 eine Näherung eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_1$ liefert, wenn $\lambda_1 > \lambda_2$ und $|\lambda_1| > |\lambda_n|$.

**Algorithm 1**: PowerIteration

```
Input: Matrix A ∈ ℝ^{n×n}
x ← zufälliger Vektor in ℝ^n \ {0}
ε ← ∞
while ε ≫ 0 do
    x' ← A · x
    x' ← (1/‖x'‖) x'
    ε ← ‖ x' − (1/‖x‖) x ‖
```

Sind die beiden Bedingungen ($\lambda_1 > \lambda_2$ und $|\lambda_1| > |\lambda_n|$) notwendig? Wie könnte das Verfahren angepasst werden, um weitere Eigenvektoren zu berechnen?