5. Übungsblatt

Ausgabe: 16. November 2008
Abgabe: 13. Januar 2009

Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Problem 1 — 1+2+1 Punkte

Vervollständigen Sie den Beweis zum Lemma:

$$\delta_G(s|v) = \sum_{\substack{(v,w)\in P^-_G(s,w) \\ w\in V}} \frac{\sigma_G(s,v)}{\sigma_G(s,w)} \cdot (1 + \delta_G(s|w)) \ ,$$

für $s \neq v \in V$. Betrachten Sie dazu folgende drei Schritte:

(a) Verallgemeinern Sie die Definition von $\delta_G(s,t|v)$ auf $\delta_G(s,t|v,e)$ für Kanten $e \in E$. Wie läßt sich $\delta_G(s|v)$ mit dieser neuen Definition ausdrücken?

(b) Schreiben Sie $\delta_G(s,t|v,(v,w))$ so um, dass es nur noch von σ_G-Ausdrücken abhängt.
Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $w = t$ und $w \neq t$.

(c) Fügen Sie die Ergebnisse zusammen und zeigen Sie, dass die obige Gleichheit gilt.

Problem 2 — 4 Punkte

Die *Spur* einer quadratischen Matrix ist die Summer ihrer Diagonaleinträge. Sei A die Adjazenzmatrix eines schlichten ungerichteten Graphen G. Zeigen Sie, dass

$$\mathit{Spur}\ A^2 = 2 \cdot m \qquad \text{und} \qquad \mathit{Spur}\ A^3 = 6 \cdot t \ ,$$

wobei t die Anzahl der Kreise der Länge drei ist. Was ändert sich, wenn der Graph nicht mehr schlicht ist?

Problem 3 — 4+2 Punkte

In Analogie zur Betweenness-Zentralität betrachtet man den Knotenstrukturindex c_S names *Stress*, der für gerichtete Multigraphen $G = (V,E) \in \mathcal{G}$ definiert ist durch:

$$c_S(G)_v := \sum_{s,t\in V} \sigma_G(s,t|v) \ .$$

Zeigen Sie, dass man Stress ähnlich zu Betweenness mittles Breitensuchen in $\mathcal{O}(nm)$ berechnet werden kann. Entwickeln Sie dazu eine rekursive Formel für $\sigma_G(s|v) := \sum_{t\in V} \sigma_G(s,t|v)$. Zeigen Sie desweiteren, dass $c_S \notin \circ \to \bullet(\mathcal{G}) \cup \bullet \to \circ(\mathcal{G})$.