Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 6

Vorlesung Algorithmentechnik im WS 08/09

Ausgabe 13. Januar 2009
Abgabe 27. Januar 2009, 15:30 Uhr (im Kasten vor Zimmer 319, Informatik-Hauptgebäude, 3. OG)

Bitte schreiben Sie nur Ihren Namen und keine Matrikelnummer auf Ihr Übungsblatt. Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Problem 1: Vertex-Cover

Ein *Vertex Cover* eines ungerichteten, einfachen Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $C \subseteq V$ mit der Eigenschaft, dass für jede Kante $\{u, v\} \in E$ mindestens einer der beiden Knoten u, v in C enthalten ist.

Gegeben seien 2-Approximationsalgorithmen zur Lösung der Problems.

Algorithmus 1 : Vertex-Cover-Approx-1(G)

$C \leftarrow \emptyset$
$E' \leftarrow E[G]$
solange $E' \neq \emptyset$ **tue**
  $e \leftarrow \{u, v\}$ beliebige Kante aus E'
  $C \leftarrow C \cup \{u, v\}$
  entferne alle Kanten inzident zu u, v aus E'
return C

Algorithmus 2 : Vertex-Cover-Approx-2(G)

$C \leftarrow \emptyset$
$E' \leftarrow E[G]$
solange $E' \neq \emptyset$ **tue**
  $v \leftarrow$ Knoten mit maximalem Grad in $G' = (V \setminus C, E')$
  $C \leftarrow C \cup \{v\}$
  entferne alle Kanten inzident zu v aus E'
return C

(a) Zeigen Sie, dass Algorithmus 1 ein 2-Approximationsalgorithmus ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass Algorithmus 2 kein 2-Approximationsalgorithmus ist.

(c) Geben Sie einen effizienten Greedy-Algorithmus an, der in linearer Zeit (bezogen auf $|E|$) ein optimales Vertex Cover in einem Baum findet.

Problem 2: euklid-TSP-Approximation

Betrachten Sie das *Problem des euklidischen Handlungsreisenden (e-TSP)*: Gegeben sei eine Menge von n Punkten $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ in der Ebene mit Koordinaten (x_i, y_i) für jeden Punkt $p_i \in P$. Gesucht ist die kürzeste Rundtour $T = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_n})$, die alle Knoten mindestens einmal besucht. Rundtour bedeutet, dass die Tour an dem gleichen (frei wählbaren) Knoten beginnen und enden muss. Der Abstand $d(p_i, p_j)$ zweier Punkte ist definiert durch den euklidischen Abstand der beiden Punkte. Die Länge einer Rundtour $T = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_n})$ ist $\sum_{j=1}^{n-1} d(p_{i_j}, p_{i_{j+1}}) + d(p_{i_n}, p_{i_1})$.

Algorithmus 3 : E-TSP-APPROX-1(G)

$T \leftarrow p_1$
solange $|T| < |V|$ **tue**
  $v, p_{i_j} \leftarrow$ Knoten mit $d(p_{i_j}, v)$ minimal, mit $p_{i_j} \in T, v \in V \setminus T$
  $k \leftarrow |T|$
  $T \leftarrow (p_{i_1}, \ldots, p_{i_j}, v, p_{i_{j+1}}, \ldots p_{i_k})$ //füge v zwischen p_{i_j} und $p_{i_{j+1}}$ ein
  $(p_{i_1}, \ldots, p_{i_{k+1}}) \leftarrow T$
return T

Zeigen Sie, dass Algorithmus 3 ein 2-Approximationsalgorithmus ist.

Problem 3: CLIQUE-Approximation

Eine Clique ist ein vollständig verbundener Teilgraph eines Graphen G. Das Problem CLIQUE besteht darin, eine Clique maximaler Größe in G zu bestimmen. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, zusammenhängender, einfacher Graph. Für jedes $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$ sei $G^{(k)}$ der ungerichtete Graph $(V^{(k)}, E^{(k)})$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $V^{(k)}$ sei die Menge aller geordneten k-Tupel von Knoten aus V

(ii) $E^{(k)}$ sei so definiert, dass $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ genau dann mit $(w_1, w_2, \ldots, w_k)$ benachbart ist, wenn für alle i mit $1 \leq i \leq k$ entweder der Knoten v_i in G mit w_i benachbart ist oder $v_i = w_i$ gilt.

Zeigen Sie:

(a) Die Größe einer maximalen Clique in in $G^{(k)}$ ist gleich der k-ten Potenz der Größe einer maximalen Clique in G.

(b) Es existiert ein Approximationschema mit polynomieller Laufzeit (PAS) für CLIQUE, falls es einen Approximationsalgorithmus mit konstantem Approximationsverhältnis für dieses Problem gibt.

(c) Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ ist, gibt es kein vollpolynomiales Approximationsschema (FPAS) für CLIQUE.