Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Übungsblatt 4

Vorlesung Algorithmentechnik im WS 08/09

Ausgabe 02. Dezember 2008
Abgabe 16. Dezember, 15:30 Uhr (im Kasten vor Zimmer 319, Informatik-Hauptgebäude, 3. OG)

Bitte schreiben Sie nur Ihren Namen und keine Matrikelnummer auf Ihr Übungsblatt. Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Problem 1: Abgeschlossenheit der Addition

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Summe $c_1 \oplus c_2$ zweier Kreise ist wieder ein Kreis.

Problem 2: LU Kreise sind Matroide

Sei G ein Graph. $\mathcal{C}$ der Vektorraum aller Kreise von G über GF(2). Zeigen Sie: Die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen von $\mathcal{C}$ ist ein Matroid.

Problem 3: Kreisbasen

Wir betrachten einen konstruktiven Beweis der folgenden Aussage:
Die Dimension des Kreisraums eines zusammenhängenden, ungerichteten Graphen $G(V, E)$ mit $|E| = m$ Kanten und $|V| = n$ Knoten ist $m - n + 1$.

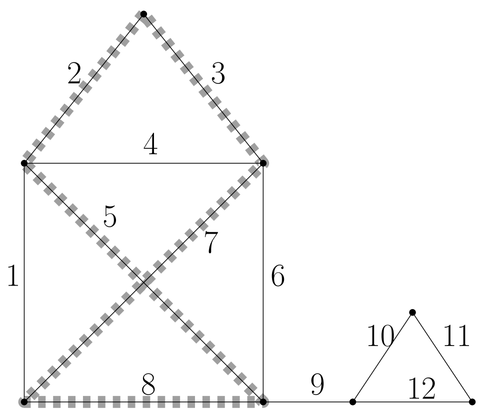
(a) Man betrachte einen aufspannenden Baum $T(V', E')$ von $G(V, E)$. Jede nicht-Baumkante $e \in E \setminus E'$ induziert einen eindeutigen Kreis C_e. Die Menge aller solcher Kreise sei $B = \{C_e \mid e \in E \setminus E'\}$. Zeigen Sie dass gilt $|B| = m - n + 1$

(b) Zeigen Sie, dass B linear unbhängig ist.

(c) Zeigen Sie dass B eine Kreisbasis ist. Gehen Sie dabei konstruktiv vor und beschreiben Sie, wie ein beliebiger Kreis durch Linearkombination von Elementen aus B gebildet werden kann.

Problem 4: Finde die Kreisbasis!

Betrachten Sie folgenden Graphen:



(a) Konstruieren Sie eine Kreisbasis.

(b) Bilden Sie die Linearkombination aller Basisvektoren, was erhalten Sie?

(c) Erstellen Sie mit einer linearen Kombination der Basisvektoren den schraffierten Kreis.

Problem 5: Kreisbasen

(a) Konstruieren Sie eine unendliche Familie von Graphen, in denen die Anzahl Kreise (Kreis wie in Definition 5.1 der Vorlesung) exponentiell in der Anzahl Kanten ist. Beweisen Sie dies.

Anmerkung: Eine Familie $(G_i)_{i \in I}$ ist nichts anderes als eine Menge, bei der jedes Element G_i durch einen Index i identifiziert werden kann. Bei dieser Aufgabe bietet es sich an, die Familie so zu wählen, dass jeder Graph sich leicht aus der Anzahl der Kanten konstruieren lässt.

(b) Konstruieren Sie eine Familie von Graphen, in denen die Anzahl Kreise linear in der Anzahl Kanten ist. Beweisen Sie dies.