5. Übung zur Vorlesung

Algorithmentechnik

am

16.12.2008

Programm für heute

- Veranstaltungsevaluation
- Wiederholung LA (falls gewünscht)
- Kreisbasen
  - Wiederholung
  - In der Vorlesung nicht behandelte Beweise
  - Beispielaufgaben Übungsblatt

Kleine Wiederholung aus der Linearen Algebra

- Gruppe
- Körper
- Vektorraum

Gruppe

Ein Tupel $(G, \circ)$ bestehend aus einer Menge G und einer zweistelligen inneren Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$ heißt Gruppe, wenn

- die Verknüpfung assoziativ ist: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- ein neutrales Element existiert: $a \circ 1 = a$
- für jedes Element ein Inverses Element existiert: $a \circ a^{-1} = 1$

Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt abelsch oder kommutativ, wenn die Verknüpfung $\circ$ symmetrisch ist.

Beispiele

- Gruppe: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$
- keine Gruppe: $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$

Körper

Ein Tripel $(G, \circ, +)$ bestehend aus einer Menge G und zwei inneren zweistelligen Verknüpfungen $\circ$, $+$ heißt Körper, falls gilt

- $(K, +)$ ist kommutative Gruppe (mit neutralem Element 0)
- $K \setminus \{0\}$ ist kommutative Gruppe (mit neutralem Element 1)
- die Distributivgesetze gelten: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Beispiele

- Körper: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
- Kein Körper $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

Der Körper $GF(2)$

$GF(2) = \mathbb{F}_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist der Körper mit 2 Elementen

Zugehörige Verknüpfungstabellen:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Vektorraum

Ein Vektorraum über einem Körper $(K, +, \cdot)$ ist eine additive abelsche Gruppe $(V, +)$ auf der zusätzlich die Multiplikation mit einem Skalar aus K erklärt ist: $* : K \times V \to V$ und für die folgendes erfüllt ist:

- Assoziativität: $\alpha * (\beta * v) = (\alpha \cdot \beta) * v$
- Distributivgesetze

$$\begin{aligned} a * (u + v) &= a * u + a * v \\ (\alpha + \beta) * v &= \alpha * v + \beta * v \end{aligned}$$

- Neutralität der 1 des Körpers K: $1 * v = v$

Beispiel: $\mathbb{R}^k$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation

- **Untervektorraum (UVR)**
  Ein Untervektorraum (UVR) ist eine Teilmenge eines Vektorraums, die selbst wieder ein Vektorraum über demselben Körper ist.
- **linear unabhängig**
  Eine Teilmenge eines Vektorraumes heißt linear unabhängig, wenn die einzige Linearkombination dieser Vektoren, die den Nullvektor darstellt, die trivale ist.
- **Basis eines (Unter-)Vektorraumes UVR**
  Linear unabhängige Teilmenge von UVR mit deren Hilfe sich jeder Vektor in UVR eindeutig als endliche Linearkombination darstellen lässt
- **Dimension eines UVR**
  Kardinalität einer Basis von *UVR*

≫ **Untervektorraum (UVR)**
Ein Untervektorraum (UVR) ist eine Teilmenge eines Vektorraums, die selbst wieder ein Vektorraum über demselben Körper ist.

≫ **linear unabhängig**
Eine Teilmenge eines Vektorraumes heißt linear unabhängig, wenn die einzige Linearkombination dieser Vektoren, die den Nullvektor darstellt, die trivale ist.

≫ **Basis eines (Unter-)Vektorraumes UVR**
Linear unabhängige Teilmenge von UVR mit deren Hilfe sich jeder Vektor in UVR eindeutig als endliche Linearkombination darstellen lässt

≫ **Dimension eines UVR**
Kardinalität einer Basis von *UVR*

≫ **Untervektorraum (UVR)**
Ein Untervektorraum (UVR) ist eine Teilmenge eines Vektorraums, die selbst wieder ein Vektorraum über demselben Körper ist.

≫ **linear unabhängig**
Eine Teilmenge eines Vektorraumes heißt linear unabhängig, wenn die einzige Linearkombination dieser Vektoren, die den Nullvektor darstellt, die trivale ist.

≫ **Basis eines (Unter-)Vektorraumes UVR**
Linear unabhängige Teilmenge von UVR mit deren Hilfe sich jeder Vektor in UVR eindeutig als endliche Linearkombination darstellen lässt

≫ **Dimension eines UVR**
Kardinalität einer Basis von *UVR*

- **Untervektorraum (UVR)**
  Ein Untervektorraum (UVR) ist eine Teilmenge eines Vektorraums, die selbst wieder ein Vektorraum über demselben Körper ist.
- **linear unabhängig**
  Eine Teilmenge eines Vektorraumes heißt linear unabhängig, wenn die einzige Linearkombination dieser Vektoren, die den Nullvektor darstellt, die trivale ist.
- **Basis eines (Unter-)Vektorraumes UVR**
  Linear unabhängige Teilmenge von UVR mit deren Hilfe sich jeder Vektor in UVR eindeutig als endliche Linearkombination darstellen lässt
- **Dimension eines UVR**
  Kardinalität einer Basis von *UVR*

(Allgemeine) Kreise

- **Kreis:** Ein Teilgraph $C = (V_C, E_C)$ von $G = (V, E)$ heißt Kreis in G, falls alle Knoten aus V_C in C geraden Grad haben.
- **Vorstellung:** Zusammenhangskomponenten von allgemeinen Kreisen können mit einem Stift ohne absetzen nachgefahren werden, so dass jede Kante nur einmal überschrieben wird
- **Einfacher Kreis:** Falls C zusammenhängend ist und alle Knoten aus V_C Grad zwei haben, so heißt C einfacher Kreis.

Was haben Graphen mit Vektoren / Vektorräumen zu tun?

- Eine Kantenmenge $E' \subseteq E$ eines Graphen $G = (V, E = \{e_1, e_2, \dots e_m\})$ kann über einen Inzidenzvektor $X^{E'}$ identifiziert werden:

$$X_i^{E'} := \begin{cases} 1, & \text{falls } e_i \in E' \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Im folgenden wird eine Kantenmenge häufig als Vektor in $\{0,1\}^m$ aufgefasst ohne dies explizit zu erwähnen.

Der Kreisraum

- Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Kreise in $G = (V, E)$.
- Dann ist $\mathcal{C}$ ein UVR des Vektorraumes $\mathbb{F}_2^m$ der m-dimensionalen Vektoren über dem Körper $\mathbb{F}_2$.
- Man nennt diesen UVR den *Kreisraum* von G.
- Die Addition im Kreisraum entspicht folgender Mengenoperation:

$$c_1 \oplus c_2 = (c_1 \cup c_2) \setminus (c_1 \cap c_2)$$

Der Kreisraum

- Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Kreise in $G = (V, E)$.
- Dann ist $\mathcal{C}$ ein UVR des Vektorraumes $\mathbb{F}_2^m$ der m-dimensionalen Vektoren über dem Körper $\mathbb{F}_2$.
- Man nennt diesen UVR den *Kreisraum* von G.
- Die Addition im Kreisraum entspicht folgender Mengenoperation:

$$c_1 \oplus c_2 = (c_1 \cup c_2) \setminus (c_1 \cap c_2)$$

Der Kreisraum

- Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Kreise in $G = (V, E)$.
- Dann ist $\mathcal{C}$ ein UVR des Vektorraumes $\mathbb{F}_2^m$ der m-dimensionalen Vektoren über dem Körper $\mathbb{F}_2$.
- Man nennt diesen UVR den *Kreisraum* von G.
- Die Addition im Kreisraum entspicht folgender Mengenoperation:

$$c_1 \oplus c_2 = (c_1 \cup c_2) \setminus (c_1 \cap c_2)$$

Der Kreisraum

- Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Kreise in $G = (V, E)$.
- Dann ist $\mathcal{C}$ ein UVR des Vektorraumes $\mathbb{F}_2^m$ der m-dimensionalen Vektoren über dem Körper $\mathbb{F}_2$.
- Man nennt diesen UVR den *Kreisraum* von G.
- Die Addition im Kreisraum entspicht folgender Mengenoperation:

$$c_1 \oplus c_2 = (c_1 \cup c_2) \setminus (c_1 \cap c_2)$$

Wie zeigt man, dass der Kreisraum ein Vektorraum ist?

Unterraumeigenschaft: Sei VR ein Vektorraum. Dann gilt:

$U \subseteq VR$ ist Untervektorraum von $VR \Leftrightarrow$

- $U \neq \emptyset$
- Abgeschlossenheit bezüglich der Skalarmultiplikation
- Abgeschlossenheit bezüglich der Vektoraddition

Wie zeigt man, dass der Kreisraum ein Vektorraum ist?

Unterraumeigenschaft: Sei VR ein Vektorraum. Dann gilt:

$U \subseteq VR$ ist Untervektorraum von $VR \Leftrightarrow$

- $U \neq \emptyset$
- Abgeschlossenheit bezüglich der Skalarmultiplikation
- Abgeschlossenheit bezüglich der Vektoraddition

Der Kreisraum ist UVR:

- $U \neq \emptyset$: Die leere Menge ist nach Definition ein Kreis
- Abgeschlossenheit bezüglich der Skalarmultiplikation:
  - Skalarmultiplikation mit 0 ergibt die leere Menge
    $\Rightarrow$ Ergebnis liegt im Kreisraum
  - Skalarmultiplikation mit 1 ergibt wieder das gleiche Element
    $\Rightarrow$ Ergebnis liegt im Kreisraum
- Abgeschlossenheit bezüglich der Vektoraddition
  $\Rightarrow$ Nächste Folie

Der Kreisraum ist UVR:

- $U \neq \emptyset$: Die leere Menge ist nach Definition ein Kreis
- Abgeschlossenheit bezüglich der Skalarmultiplikation:
  - Skalarmultiplikation mit 0 ergibt die leere Menge
    $\Rightarrow$ Ergebnis liegt im Kreisraum
  - Skalarmultiplikation mit 1 ergibt wieder das gleiche Element
    $\Rightarrow$ Ergebnis liegt im Kreisraum
- Abgeschlossenheit bezüglich der Vektoraddition
  $\Rightarrow$ Nächste Folie

Der Kreisraum ist UVR:

- $U \neq \emptyset$: Die leere Menge ist nach Definition ein Kreis
- Abgeschlossenheit bezüglich der Skalarmultiplikation:
  - Skalarmultiplikation mit 0 ergibt die leere Menge
    $\Rightarrow$ Ergebnis liegt im Kreisraum
  - Skalarmultiplikation mit 1 ergibt wieder das gleiche Element
    $\Rightarrow$ Ergebnis liegt im Kreisraum
- Abgeschlossenheit bezüglich der Vektoraddition
  $\Rightarrow$ Nächste Folie

Der Kreisraum ist UVR:

- $U \neq \emptyset$: Die leere Menge ist nach Definition ein Kreis
- Abgeschlossenheit bezüglich der Skalarmultiplikation:
  - Skalarmultiplikation mit 0 ergibt die leere Menge
    $\Rightarrow$ Ergebnis liegt im Kreisraum
  - Skalarmultiplikation mit 1 ergibt wieder das gleiche Element
    $\Rightarrow$ Ergebnis liegt im Kreisraum
- Abgeschlossenheit bezüglich der Vektoraddition
  $\Rightarrow$ Nächste Folie

Der Kreisraum ist UVR:

- $U \neq \emptyset$: Die leere Menge ist nach Definition ein Kreis
- Abgeschlossenheit bezüglich der Skalarmultiplikation:
  - Skalarmultiplikation mit 0 ergibt die leere Menge
    $\Rightarrow$ Ergebnis liegt im Kreisraum
  - Skalarmultiplikation mit 1 ergibt wieder das gleiche Element
    $\Rightarrow$ Ergebnis liegt im Kreisraum
- Abgeschlossenheit bezüglich der Vektoraddition
  $\Rightarrow$ Nächste Folie

Abgeschlossenheit bezüglich der Vektoraddition, Problem 1:

Zeigen oder widerlegen Sie:

Die Summe $c_1 \oplus c_2$ zweier Kreise ist wieder ein Kreis.

Erinnerung:

- Ein Kreis ist ein Graph, in dem jeder Knoten geraden Grad hat.
- Die Summe zweier Kreise ist durch

$$c_1 \oplus c_2 = (c_1 \cup c_2) \setminus (c_1 \cap c_2).$$

gegeben.

Abgeschlossenheit bezüglich der Vektoraddition, Problem 1:

Zeigen oder widerlegen Sie:

Die Summe $c_1 \oplus c_2$ zweier Kreise ist wieder ein Kreis.

Erinnerung:

- Ein Kreis ist ein Graph, in dem jeder Knoten geraden Grad hat.
- Die Summe zweier Kreise ist durch

$$c_1 \oplus c_2 = (c_1 \cup c_2) \setminus (c_1 \cap c_2).$$

gegeben.

Sei v ein beliebiger Knoten von $c_1 \oplus c_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\deg_{c_1 \oplus c_2} |v| &= |\{e \in E \mid e \text{ adjazent zu v}, \; e \in c_1 \setminus c_1 \cap c_2\}| + \\
&\quad |\{e \in E \mid e \text{ adjazent zu v}, \; e \in c_2 \setminus c_1 \cap c_2\}| \\
&= |\{e \in E \mid e \text{ adjazent zu v}, \; e \in c_1\}| + \\
&\quad |\{e \in E \mid e \text{ adjazent zu v}, \; e \in c_2\}| - \\
&\quad 2 \cdot |\{e \in E \mid e \text{ adjazent zu v}, \; e \in c_1 \cap c_2\}| \\
&= \deg_{c_1}(v) + \deg_{c_2}(v) - 2 \cdot \deg_{c_1 \cap c_2}(v) \equiv 0 \pmod 2.
\end{aligned}$$

Also hat jeder Knoten des Teilgraphen $c_1 \oplus c_2$ einen geraden Grad. und nach Definition ist $c_1 \oplus c_2$ ein Kreis.

Wie findet man eine Kreisbasis von $G = (V, E)$?

- O.B.d.A. betrachten wir G als zusammenhängend.
- Konstruiere einen aufspannenden Baum T von G
- Definiere $P(v, w)$ als den eindeutigen einfachen Weg vom Knoten v durch den Baum T zum Knoten w
- Definiere für jede Nichtbaumkante $e_i = \{v, w\} \in E$ den eindeutigen Kreis $C_i := P(v, w) \cup \{\{v, w\}\}$ (Benennung: Fundamentalkreis zu e_i).
- Die Menge all solcher Kreise C_i zu einem aufspannenden Baum T bildet eine Kreisbasis, die man *Fundamentalbasis* zu T nennt.

Wie findet man eine Kreisbasis von $G = (V, E)$?

- O.B.d.A. betrachten wir G als zusammenhängend.
- Konstruiere einen aufspannenden Baum T von G
- Definiere $P(v, w)$ als den eindeutigen einfachen Weg vom Knoten v durch den Baum T zum Knoten w
- Definiere für jede Nichtbaumkante $e_i = \{v, w\} \in E$ den eindeutigen Kreis $C_i := P(v, w) \cup \{\{v, w\}\}$ (Benennung: Fundamentalkreis zu e_i).
- Die Menge all solcher Kreise C_i zu einem aufspannenden Baum T bildet eine Kreisbasis, die man *Fundamentalbasis* zu T nennt.

Wie findet man eine Kreisbasis von $G = (V, E)$?

- O.B.d.A. betrachten wir G als zusammenhängend.
- Konstruiere einen aufspannenden Baum T von G
- Definiere $P(v, w)$ als den eindeutigen einfachen Weg vom Knoten v durch den Baum T zum Knoten w
- Definiere für jede Nichtbaumkante $e_i = \{v, w\} \in E$ den eindeutigen Kreis $C_i := P(v, w) \cup \{\{v, w\}\}$ (Benennung: Fundamentalkreis zu e_i).
- Die Menge all solcher Kreise C_i zu einem aufspannenden Baum T bildet eine Kreisbasis, die man *Fundamentalbasis* zu T nennt.

Wie findet man eine Kreisbasis von $G = (V, E)$?

- O.B.d.A. betrachten wir G als zusammenhängend.
- Konstruiere einen aufspannenden Baum T von G
- Definiere $P(v, w)$ als den eindeutigen einfachen Weg vom Knoten v durch den Baum T zum Knoten w
- Definiere für jede Nichtbaumkante $e_i = \{v, w\} \in E$ den eindeutigen Kreis $C_i := P(v, w) \cup \{\{v, w\}\}$ (Benennung: Fundamentalkreis zu e_i).
- Die Menge all solcher Kreise C_i zu einem aufspannenden Baum T bildet eine Kreisbasis, die man *Fundamentalbasis* zu T nennt.

Wie findet man eine Kreisbasis von $G = (V, E)$?

- O.B.d.A. betrachten wir G als zusammenhängend.
- Konstruiere einen aufspannenden Baum T von G
- Definiere $P(v, w)$ als den eindeutigen einfachen Weg vom Knoten v durch den Baum T zum Knoten w
- Definiere für jede Nichtbaumkante $e_i = \{v, w\} \in E$ den eindeutigen Kreis $C_i := P(v, w) \cup \{\{v, w\}\}$ (Benennung: Fundamentalkreis zu e_i).
- Die Menge all solcher Kreise C_i zu einem aufspannenden Baum T bildet eine Kreisbasis, die man *Fundamentalbasis* zu T nennt.

Wie findet man eine Kreisbasis von $G = (V, E)$?

- O.B.d.A. betrachten wir G als zusammenhängend.
- Konstruiere einen aufspannenden Baum T von G
- Definiere $P(v, w)$ als den eindeutigen einfachen Weg vom Knoten v durch den Baum T zum Knoten w
- Definiere für jede Nichtbaumkante $e_i = \{v, w\} \in E$ den eindeutigen Kreis $C_i := P(v, w) \cup \{\{v, w\}\}$ (Benennung: Fundamentalkreis zu e_i).
- Die Menge all solcher Kreise C_i zu einem aufspannenden Baum T bildet eine Kreisbasis, die man *Fundamentalbasis* zu T nennt.

Wieso funktioniert das?

Die Dimension des Kreisraumes von $G = (V, E)$ ist $m - n + \mathcal{K}(G)$, wobei $\mathcal{K}(G)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G ist.

Für zusammenhängende Graphen ergibt das

Problem 3: Kreisbasen

Wir betrachten einen konstruktiven Beweis der folgenden Aussage:

Die Dimension des Kreisraums eines zusammenhängenden, ungerichteten Graphen $G(V, E)$ mit $|E| = m$ und $|V| = n$ ist $m - n + 1$.

Die Dimension des Kreisraumes von $G = (V, E)$ ist $m - n + \mathcal{K}(G)$, wobei $\mathcal{K}(G)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G ist.

Für zusammenhängende Graphen ergibt das

Problem 3: Kreisbasen

Wir betrachten einen konstruktiven Beweis der folgenden Aussage:

Die Dimension des Kreisraums eines zusammenhängenden, ungerichteten Graphen $G(V, E)$ mit $|E| = m$ und $|V| = n$ ist $m - n + 1$.

- Betrachte einen aufspannenden Baum $T(V', E')$ von $G(V, E)$
- Jede nicht-Baumkante $e \in E \setminus E'$ induziert einen eindeutigen Kreis C_e.
- Die Menge aller solcher Kreise sei $B = \{C_e \mid e \in E \setminus E'\}$.

Zeigen Sie, dass gilt $|B| = m - n + 1$

- Ein aufspannender Baum T in G hat genau $n - 1$ Kanten.
- Die restlichen $m - n + 1$ Kanten sind Nichtbaumkanten, die jeweils einen Kreis aus B induzieren.
- Jeder induzierte Kreis C_e enthält genau eine Nichtbaumkante e, die ihn induziert.
- Somit ist $|B| = m - n + 1$.

- Betrachte einen aufspannenden Baum $T(V', E')$ von $G(V, E)$
- Jede nicht-Baumkante $e \in E \setminus E'$ induziert einen eindeutigen Kreis C_e.
- Die Menge aller solcher Kreise sei $B = \{C_e \mid e \in E \setminus E'\}$.

Zeigen Sie, dass gilt $|B| = m - n + 1$

- Ein aufspannender Baum T in G hat genau $n - 1$ Kanten.
- Die restlichen $m - n + 1$ Kanten sind Nichtbaumkanten, die jeweils einen Kreis aus B induzieren.
- Jeder induzierte Kreis C_e enthält genau eine Nichtbaumkante e, die ihn induziert.
- Somit ist $|B| = m - n + 1$.

- Betrachte einen aufspannenden Baum $T(V', E')$ von $G(V, E)$
- Jede nicht-Baumkante $e \in E \setminus E'$ induziert einen eindeutigen Kreis C_e.
- Die Menge aller solcher Kreise sei $B = \{C_e \mid e \in E \setminus E'\}$.

Zeigen Sie, dass gilt $|B| = m - n + 1$

- Ein aufspannender Baum T in G hat genau $n - 1$ Kanten.
- Die restlichen $m - n + 1$ Kanten sind Nichtbaumkanten, die jeweils einen Kreis aus B induzieren.
- Jeder induzierte Kreis C_e enthält genau eine Nichtbaumkante e, die ihn induziert.
- Somit ist $|B| = m - n + 1$.

Zeigen Sie, dass B linear unbhängig ist.

- Wir betrachten den Vektor X_e, der den Kreis C_e darstellt.
- X_e hat einen Eintrag 1 für alle $e' \in C_e$, sonst Nullen.
- Da jeder Kreis in B nur eine Nichtbaumkante e enthält, hat nur X_e den Eintrag 1 für e, alle anderen Kreise in B haben dort eine 0.
- Der Kreis C_e kann also nicht aus der Linearkombination der Kreise $B \setminus C_e$ gebildet werden.
- Da e beliebig gewählt war, ist B linear unabhängig.

Zeigen Sie dass B eine Kreisbasis ist.

- Wir zeigen, dass sich jeder Kreis als Linearkombination von Elementen aus B erzeugen lässt.
- Dafür betrachten wir einen beliebigen Kreis C und seinen Vektor X_C als Repräsentanten im Kreisraum.
- Wir wollen zeigen, dass die Linearkombination

$$C^* := \sum_{e \in C \setminus E'} C_e$$

aller Kreise zu Nichtbaumkanten von C den Kreis C erzeugt.

- Der zu C^* gehörende Koordinatenvektor sei X^*.

Wir wollen zeigen, dass die Linearkombination

$$C^* := \sum_{e \in C \setminus E'} C_e$$

aller Kreise zu Nichtbaumkanten von C den Kreis C erzeugt.

Vier Fälle müssen einzeln betrachtet werden:

- „Nicht-Baum-aber-Kreis-Kante“
- „Baum-aber-nicht-Kreis-Kante“
- „Baum-und-Kreis-Kante“
- „Nicht-Baum-und-nicht-Kreis-Kante“

Wir wollen zeigen, dass die Linearkombination

$$C^* := \sum_{e \in C \setminus E'} C_e$$

aller Kreise zu Nichtbaumkanten von C den Kreis C erzeugt.

- Sei $e \in C \setminus E'$ „Nicht-Baum-aber-Kreis-Kante"
- Der Kreis $C_e \in B$ kommt in der Linearkombination vor.
- C_e ist der einzige Basiskreis, der e enthält
- Also hat X^* an der Stelle e eine 1.

- Sei $a = (u, v) \in E' \setminus C$ „Baum-aber-nicht-Kreis-Kante“
- a induziert einen eindeutigen Schnitt A, der N_u und N_v trennt, wobei N_u, die von u in $T \setminus a$ über einen Weg erreichbaren Knoten seien.
- Der Kreis C kreuzt diesen Schnitt eine gerade Anzahl von Malen.
- Jede Kreiskante $e' \in C$, die diesen Schnitt kreuzt ist keine Baumkante und induziert somit einen Kreis in B, der in C^* vorkommt (da e' „Nicht-Baum-aber-Kreis-Kante“).
- Sei $B' \subseteq B$ die Menge der Kreise, die induziert werden durch die Kanten $e' \in C$, die A kreuzen.
- Jeder Kreis aus B' enthält a und es gilt $|B'| \equiv 0 \pmod 2$. Kein anderer Kreis, der in C^* vorkommt, enthält a. Damit hat X^* den Eintrag 0 für die Kante a.

Wir wollen zeigen, dass die Linearkombination

$$C^* := \sum_{e \in C \setminus E'} C_e$$

aller Kreise zu Nichtbaumkanten von C den Kreis C erzeugt.

- Sei $b \in E' \cap C$ eine „Baum-und-Kreis-Kante“
- b induziert auch einen Schnitt D, den nun aber nur noch eine ungerade Anzahl weiterer „Nicht-Baum-aber-Kreis-Kanten“ kreuzt (gleiches Argument wie eins vorher).
- Sei $B'' \subseteq B$ die Menge der Kreise, die induziert werden von den „Nicht-Baum-aber-Kreis-Kanten“, die D kreuzen.
- Es gilt $|B''| \equiv 1 \pmod 2$. Somit hat X^* den Eintrag 1 für die Kante b.

Wir wollen zeigen, dass die Linearkombination

$$C^* := \sum_{e \in C \setminus E'} C_e$$

aller Kreise zu Nichtbaumkanten von C den Kreis C erzeugt.

- Sei $d \in E \setminus C \setminus E'$ „Nicht-Baum-und-nicht-Kreis-Kante"
- d hat den Eintrag 0 in X^*, da kein Kreis in C^* die Kante d enthält.

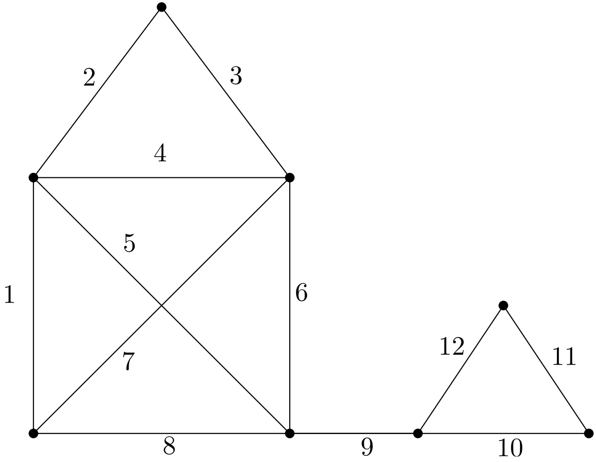
Wir wollen zeigen, dass die Linearkombination

$$C^* := \sum_{e \in C \setminus E'} C_e$$

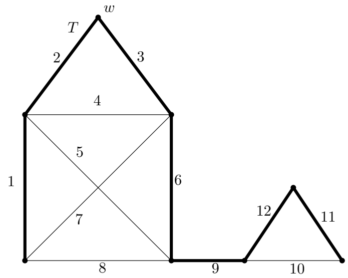
aller Kreise zu Nichtbaumkanten von C den Kreis C erzeugt.

- Insgesamt hat man in X^* für alle Kanten des Kreises C eine 1 und für alle anderen eine 0.
- Somit gilt $X_C = X^*$.
- Es wurde C beliebig gewählt und kann aus Kreisen aus B dargestellt werden.
- Also bildet B eine Basis des Kreisraums.

Anwendung: Problem 4



Finde die Kreisbasis!



Nichtbaumkanten	Induzierte Kreise	Inzidenzvektoren
4	$C_4 = (2, 3, 4)$	(011100000000)
5	$C_5 = (2, 3, 6, 5)$	(011011000000)
7	$C_7 = (1, 2, 3, 7)$	(111000100000)
8	$C_8 = (1, 2, 3, 6, 8)$	(111001010000)
10	$C_{10} = (10, 11, 12)$	(000000000111)

Kreisbasis: $\{C_4, C_5, C_7, C_8, C_{10}\}$.

Nichtbaumkanten	Induzierte Kreise	Inzidenzvektoren
4	$C_4 = (2, 3, 4)$	(011100000000)
5	$C_5 = (2, 3, 6, 5)$	(011011000000)
7	$C_7 = (1, 2, 3, 7)$	(111000100000)
8	$C_8 = (1, 2, 3, 6, 8)$	(111001010000)
10	$C_{10} = (10, 11, 12)$	(000000000111)

Bilden Sie die Linearkombination aller Basisvektoren.

Die Summe der Basisvektoren ist $\sum_{X_i \in B} X_i = (000110110111)$.

Dieser Vektor entspricht dem Kreis: $C = (4, 5, 7, 8) \cup (10, 11, 12)$.

Nichtbaumkanten	Induzierte Kreise	Inzidenzvektoren
4	$C_4 = (2,3,4)$	(011100000000)
5	$C_5 = (2,3,6,5)$	(011011000000)
7	$C_7 = (1,2,3,7)$	(111000100000)
8	$C_8 = (1,2,3,6,8)$	(111001010000)
10	$C_{10} = (10,11,12)$	(000000000111)

Bilden Sie die Linearkombination aller Basisvektoren.

Die Summe der Basisvektoren ist $\sum_{X_i \in B} X_i = (000110110111)$.

Dieser Vektor entspricht dem Kreis: $C = (4,5,7,8) \cup (10,11,12)$.

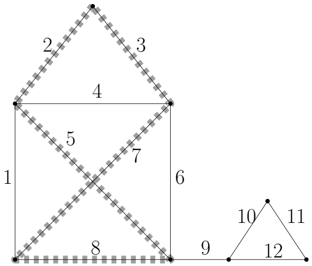
Nichtbaumkanten	Induzierte Kreise	Inzidenzvektoren
4	$C_4 = (2, 3, 4)$	(011100000000)
5	$C_5 = (2, 3, 6, 5)$	(011011000000)
7	$C_7 = (1, 2, 3, 7)$	(111000100000)
8	$C_8 = (1, 2, 3, 6, 8)$	(111001010000)
10	$C_{10} = (10, 11, 12)$	(000000000111)

Bilden Sie die Linearkombination aller Basisvektoren.

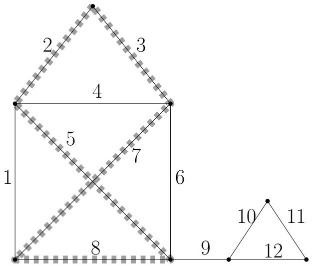
Die Summe der Basisvektoren ist $\sum_{X_i \in B} X_i = (000110110111)$.

Dieser Vektor entspricht dem Kreis: $C = (4, 5, 7, 8) \cup (10, 11, 12)$.

Erstellen Sie mit einer linearen Kombination der Basisvektoren den schraffierten Kreis.



Erstellen Sie mit einer linearen Kombination der Basisvektoren den schraffierten Kreis.



Der schraffierte Kreis $C' = (2, 3, 7, 8, 5)$ enthält die Nichtbaumkanten 5,7 und 8. Es folgt:

$$\begin{aligned} X_{C'} &= X_5 + X_7 + X_8 \\ &= (011011000000) + (111000100000) + (111001010000) \\ &= (011010110000) \end{aligned}$$

- Sei zu $G = (V, E)$ die Kantengewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ gegeben.
- Das Gewicht einer Kreisbasis $\mathcal{B}$ von G sei definiert als $w(\mathcal{B}) := \sum_{C \in \mathcal{B}} w(C) = \sum_{C \in \mathcal{B}} \sum_{e \in C} w(e)$.

Problem Minimum Cycle Basis (MCB)

- Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ und eine Gewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.
- Finde eine Kreisbasis $\mathcal{B}$ von G mit minimalem Gewicht.

- Sei zu $G = (V, E)$ die Kantengewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben.
- Das Gewicht einer Kreisbasis $\mathcal{B}$ von G sei definiert als $w(\mathcal{B}) := \sum_{C \in \mathcal{B}} w(C) = \sum_{C \in \mathcal{B}} \sum_{e \in C} w(e)$.

Problem Minimum Cycle Basis (MCB)

- Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ und eine Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}_0^+$.
- Finde eine Kreisbasis $\mathcal{B}$ von G mit minimalem Gewicht.

Zeige: Falls $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, so ist jeder Kreis einer MCB einfach.

Zeige: Falls $w : E \to \mathbb{R}^+$, so ist jeder Kreis einer MCB einfach.

Beweisskizze

- Sei $B = \{C_1, \ldots, C_k\}$ eine MCB. Annahme: C_1 nicht einfach.
- Dann gibt es eine Zerlegung $C_1 = C_1^- \cup C_1^+$
- Für

$$\begin{aligned} C_1^- &= \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_k C_k \\ C_1^+ &= \beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 + \ldots + \beta_k C_k \end{aligned}$$

  muss entweder $\alpha = 1$ oder $\beta = 1$, sonst wäre B kein minimales Erzeugendensystem. O.B.d.A sei $\alpha = 1$.
- Dann ist

$$C_1 = C_1^- + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_k C_k$$

  und $\{C_1^-, C_2, \ldots C_k\}$ eine Basis geringeren Gewichts

Kürzeste Kreise

- Zu jeder Kante e von G, die in einem Kreis enthalten ist, gilt: In einer Kreisbasis $\mathcal{B}$ von G gibt es mindestens einen Kreis, der e enthält.
- Insbesondere enthält jede MCB von G zu jedem e einen in G „kürzesten“ Kreis, der e enthält (Beweis in: Hubicka und Syslo, Minimal bases of cycles of a graph,).
- Im Folgenden nennen wir einen Kreis minimalen Gewichts einfach „kürzester“ Kreis.

Die Menge

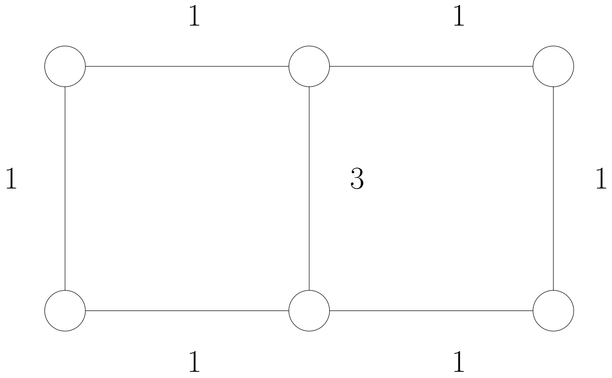
$$\mathcal{K} := \{C_{\min}(e_i) : C_{\min}(e_i) \text{ kürzester Kreis, der } e_i \text{ enthält, } e_i \in E\}$$

ist im Allgemeinen keine Basis.

Die Menge

$$\mathcal{K} := \{C_{\min}(e_i) : C_{\min}(e_i) \text{ kürzester Kreis, der } e_i \text{ enthält, } e_i \in E\}$$

ist im Allgemeinen keine Basis.



- Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Kreise in $G = (V, E)$ und $\mathcal{U}$ die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen von $\mathcal{C}$.
- Dann bildet $(\mathcal{C},\mathcal{U})$ offensichtlich ein Unabhängigkeitssystem.
- Das Unabhängigkeitssystem $(\mathcal{C},\mathcal{U})$ ist ein Matroid, genannt *Kreismatroid* von G.

- Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Kreise in $G = (V, E)$ und $\mathcal{U}$ die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen von $\mathcal{C}$.
- Dann bildet $(\mathcal{C},\mathcal{U})$ offensichtlich ein Unabhängigkeitssystem.
- Das Unabhängigkeitssystem $(\mathcal{C},\mathcal{U})$ ist ein Matroid, genannt *Kreismatroid* von G.

- Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Kreise in $G = (V, E)$ und $\mathcal{U}$ die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen von $\mathcal{C}$.
- Dann bildet $(\mathcal{C},\mathcal{U})$ offensichtlich ein Unabhängigkeitssystem.
- Das Unabhängigkeitssystem $(\mathcal{C},\mathcal{U})$ ist ein Matroid, genannt *Kreismatroid* von G.

Problem 2: LU Kreise sind Matroide

- Sei G ein Graph.
- Sei $\mathcal{C}$ der Vektorraum aller Kreise von G über GF(2).
- Zeigen Sie: Die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen von $\mathcal{C}$ ist ein Matroid.

Exkurs: Basisaustauschsatz von Steinitz

Es sei $B := \{b_1, \ldots b_n\} \subseteq V$ eine Basis des K-Vektorraumes V und die Vektoren $a_1, \ldots, a_k \in V$ seien linear unabhängig.

Dann gilt $k \leq n$ und für eine geeignete Permutation $\pi \in S_n$ ist auch $B' = \{a_1, \ldots, a_k, b_{\pi(k+1)}, \ldots, b_{\pi(n)}\}$ eine Basis.

Wiederholung Unabhängigkeitssystem

Ein Tupel $(M, \mathcal{U})$ wobei $\mathcal{U} \subset 2^M$ ein Mengensystem über einer endlichen Menge M ist, heißt Unabhängigkeitssystem, wenn

- $\emptyset \in \mathcal{U}$ und
- $I_1 \in \mathcal{U}, I_2 \subseteq I_1 \Rightarrow I_2 \in \mathcal{U}$.

Die Mengen $I \subseteq M$ mit $I \in \mathcal{U}$ werden unabhängig, alle anderen Mengen $I \subseteq M$ abhängig genannt.

Wiederholung Matroid:

- Ein Unabhängigkeitssystem $(M, \mathcal{U})$ heißt Matroid, wenn für alle $I, J \in \mathcal{U}$ mit $|I| < |J|$, ein $e \in J \setminus I$ existiert, so dass $I \cup \{e\} \in \mathcal{U}$.
- Bemerkung: Äquivalent kann anstatt $|I| < |J|$ auch $|I| + 1 = |J|$ gefordert werden.

$\mathcal{C}$ ist ein Vektorraum. Also gilt:

- $\emptyset \in \mathcal{U}$: Die leere Menge ist linear unabhängig.
- $I_1 \in \mathcal{U}, I_2 \subseteq I_1 \Rightarrow I_2 \in \mathcal{U}$: Teilmengen linear unabhängiger Mengen sind wieder linear unabhängig.
- Für alle $I, J \in \mathcal{U}$ mit $|I| < |J|$, existiert ein $e \in J \setminus I$, so dass $I \cup \{e\} \in \mathcal{U}$: Das folgt direkt aus dem Satz von Steinitz.

$\mathcal{C}$ ist ein Vektorraum. Also gilt:

- $\emptyset \in \mathcal{U}$: Die leere Menge ist linear unabhängig.
- $I_1 \in \mathcal{U}, I_2 \subseteq I_1 \Rightarrow I_2 \in \mathcal{U}$: Teilmengen linear unabhängiger Mengen sind wieder linear unabhängig.
- Für alle $I, J \in \mathcal{U}$ mit $|I| < |J|$, existiert ein $e \in J \setminus I$, so dass $I \cup \{e\} \in \mathcal{U}$: Das folgt direkt aus dem Satz von Steinitz.

$\mathcal{C}$ ist ein Vektorraum. Also gilt:

- $\emptyset \in \mathcal{U}$: Die leere Menge ist linear unabhängig.
- $I_1 \in \mathcal{U}, I_2 \subseteq I_1 \Rightarrow I_2 \in \mathcal{U}$: Teilmengen linear unabhängiger Mengen sind wieder linear unabhängig.
- Für alle $I, J \in \mathcal{U}$ mit $|I| < |J|$, existiert ein $e \in J \setminus I$, so dass $I \cup \{e\} \in \mathcal{U}$: Das folgt direkt aus dem Satz von Steinitz.

$\mathcal{C}$ ist ein Vektorraum. Also gilt:

- $\emptyset \in \mathcal{U}$: Die leere Menge ist linear unabhängig.
- $I_1 \in \mathcal{U}, I_2 \subseteq I_1 \Rightarrow I_2 \in \mathcal{U}$: Teilmengen linear unabhängiger Mengen sind wieder linear unabhängig.
- Für alle $I, J \in \mathcal{U}$ mit $|I| < |J|$, existiert ein $e \in J \setminus I$, so dass $I \cup \{e\} \in \mathcal{U}$: Das folgt direkt aus dem Satz von Steinitz.

$\mathcal{C}$ ist ein Vektorraum. Also gilt:

- $\emptyset \in \mathcal{U}$: Die leere Menge ist linear unabhängig.
- $I_1 \in \mathcal{U}, I_2 \subseteq I_1 \Rightarrow I_2 \in \mathcal{U}$: Teilmengen linear unabhängiger Mengen sind wieder linear unabhängig.
- Für alle $I, J \in \mathcal{U}$ mit $|I| < |J|$, existiert ein $e \in J \setminus I$, so dass $I \cup \{e\} \in \mathcal{U}$: Das folgt direkt aus dem Satz von Steinitz.

Dies sind genau die drei Eigenschaften, die ein Matroid definieren.

Algorithmus 1 : MCB-GREEDY-METHODE

Eingabe : Menge $\mathcal{C}$ aller Kreise in $G = (V, E)$.
Ausgabe : MCB von G
Sortiere $\mathcal{C}$ aufsteigend nach Gewicht zu $C_1, \ldots, C_k$
$\mathcal{B}^* \leftarrow \emptyset$
Für $i = 1$ *bis* k
    Wenn $\mathcal{B}^* \cup \{C_i\}$ *linear unabhängig*
        $\mathcal{B}^* \leftarrow \mathcal{B} * \cup \{C_i\}$

Welche Laufzeit hat dieser Algorithmus ?

Algorithmus 2 : MCB-GREEDY-METHODE

Eingabe : Menge $\mathcal{C}$ aller Kreise in $G = (V, E)$.
Ausgabe : MCB von G
Sortiere $\mathcal{C}$ aufsteigend nach Gewicht zu $C_1, \ldots, C_k$
$\mathcal{B}^* \leftarrow \emptyset$
Für $i = 1$ *bis* k
  Wenn $\mathcal{B}^* \cup \{C_i\}$ *linear unabhängig*
    $\mathcal{B}^* \leftarrow \mathcal{B} * \cup \{C_i\}$

- Überprüfen auf Unabhängigkeit entspricht Lösen von Gleichungssystem
- Gaussches Eliminationsverfahren hat Laufzeit in $O(n^3)$

Algorithmus 3 : MCB-GREEDY-METHODE

Eingabe : Menge $\mathcal{C}$ aller Kreise in $G = (V, E)$.
Ausgabe : MCB von G
Sortiere $\mathcal{C}$ aufsteigend nach Gewicht zu $C_1, \dots, C_k$
$\mathcal{B}^* \leftarrow \emptyset$
Für $i = 1$ *bis* k
  Wenn $\mathcal{B}^* \cup \{C_i\}$ *linear unabhängig*
    $\mathcal{B}^* \leftarrow \mathcal{B} * \cup \{C_i\}$

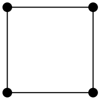
- ≫ Der Algorithmus ist also polynomial in der Anzahl der Kreise
- ≫ Er ist aber nicht polynomial in der Größe des Graphes

Problem 5a Kreisbasen

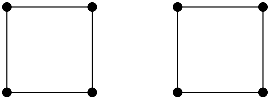
Konstruieren Sie eine unendliche Familie von Graphen, in denen die Anzahl Kreise (Kreis wie in Definition 5.1 der Vorlesung) exponentiell in der Anzahl Kanten ist. Beweisen Sie dies.

Anmerkung: Eine Familie $(G_i)_{i \in I}$ ist nichts anderes als eine Menge, bei der jedes Element G_i durch einen Index i identifiziert werden kann.

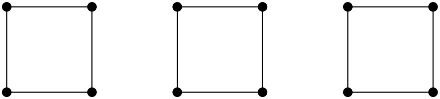
Wir konstruieren eine Familie von Graphen, parametrisiert über $\alpha \in \mathbb{N}$, wie in Abbildung 1 angedeutet.



(a) $\alpha = 1$



(b) $\alpha = 2$



(c) $\alpha = 3$

Abbildung: die ersten drei Mitglieder der Familie G_α^{exp}

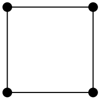
Jeder Graph G_α^{exp} der Familie enthält α disjunkte einfache Kreise zu je vier Kanten:

- G_1^{exp} hat somit $|E| = 4$ Kanten und $|C| = 2$ allgemeine Kreise (die leere Menge und den einfachen Kreis).
- G_2^{exp} hat $|E| = 8$ Kanten und $|C| = 4$ allgemeine Kreise (die leere Menge, die beiden einfachen Kreise und den allgemeinen Kreis, der die Kanten beider einfachen Kreise enthält).
- G_3^{exp} hat $|E| = 12$ Kanten und $|C| = 8$ allgemeine Kreise (die leere Menge, drei einfachen Kreise, drei 2er-Kombination und den Kreis, der alle einfachen Kreisenenthält).
- Für festes α beträgt damit die Anzahl Kanten $|E| = 4 * \alpha$, die Anzahl allgemeiner Kreise dagegen beträgt $|C| = 2^\alpha = 2^{\frac{|E|}{4}} \in O(2^{|E|})$.

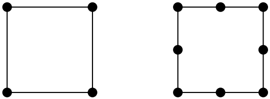
Problem 5b Kreisbasen

Konstruieren Sie eine Familie von Graphen, in denen die Anzahl Kreise linear in der Anzahl Kanten ist. Beweisen Sie dies.

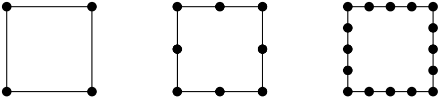
Wir konstruieren eine Familie von Graphen, parametrisiert ber $\alpha \in \mathbb{N}$, wie in Abbildung 2 angedeutet.



(a) $\alpha = 1$



(b) $\alpha = 2$



(c) $\alpha = 3$

Abbildung: die ersten drei Mitglieder der Familie G_{α}^{lin}

Jeder Graph G_α der Familie enthält α disjunkte einfache Kreise mit im Gegensatz zu *a)* exponentiell steigender Kantenzahl:

- G_1^{lin} hat somit $|E| = 4$ Kanten und $|C| = 2$ allgemeine Kreise (die leere Menge und den einfachen Kreis).
- G_2^{lin} hat $|E| = 12$ Kanten und $|C| = 4$ allgemeine Kreise (die leere Menge, die beiden einfachen Kreise und den allgemeinen Kreis, der die Kanten beider einfachen Kreise enthält).
- G_3^{lin} hat $|E| = 28$ Kanten und $|C| = 8$ allgemeine Kreise (die leere Menge, drei einfachen Kreise, drei 2er-Kombination und den Kreis, der alle einfachen Kreise enthält).
- Für festes $\alpha > 1$ beträgt damit die Anzahl Kanten $|E| = 2^{\alpha+2} - 4$, die Anzahl allgemeiner Kreise dagegen beträgt $|C| = 2^\alpha = 2^{\log(|E|+4)-2} \in O(|E|)$.

≫ Fazit: Einfaches Anwenden des Greedy-Verfahrens führt nicht zu einem schnellen Algorithmus.

Verbesserungsidee: Theorem von Horton

Für jeden Kreis C aus einer MCB von G existiert zu jedem beliebigen Knoten v aus C eine Kante $\{u, w\}$ auf C, so dass gilt:

$$C = \mathrm{SP}(u, v) + \mathrm{SP}(w, v) + \{u, w\},$$

wobei $\mathrm{SP}(u, v)$ bzw. $\mathrm{SP}(w, v)$ ein kürzester Weg von u bzw. w nach v in G ist.

≫ Fazit: Einfaches Anwenden des Greedy-Verfahrens führt nicht zu einem schnellen Algorithmus.

Verbesserungsidee: Theorem von Horton

Für jeden Kreis C aus einer MCB von G existiert zu jedem beliebigen Knoten v aus C eine Kante $\{u, w\}$ auf C, so dass gilt:

$$C = \mathrm{SP}(u, v) + \mathrm{SP}(w, v) + \{u, w\},$$

wobei $\mathrm{SP}(u, v)$ bzw. $\mathrm{SP}(w, v)$ ein kürzester Weg von u bzw. w nach v in G ist.

Algorithmus 4 : Algorithmus von Horton

Eingabe : $G = (V, E)$
Ausgabe : MCB von G
$\mathcal{H} \leftarrow \emptyset$
Für $v \in V$ *und* $\{u, w\} \in E$
  Berechne $C_v^{uw} = \mathrm{SP}(u, v) + \mathrm{SP}(w, v) + \{u, w\}$
  Wenn C_v^{uw} *einfach ist*
    $\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{H} \cup \{C_v^{uw}\}$
Sortiere Elemente aus $\mathcal{H}$ aufsteigend zu $C_1, \ldots, C_k$
Wende die MCB-Greedy-Methode an.

Wieso ist dieser Algorithus korrekt?

Algorithmus 5 : Algorithmus von Horton

Eingabe : $G = (V, E)$
Ausgabe : MCB von G
$\mathcal{H} \leftarrow \emptyset$
Für $v \in V$ *und* $\{u, w\} \in E$
  Berechne $C_v^{uw} = \mathrm{SP}(u, v) + \mathrm{SP}(w, v) + \{u, w\}$
  Wenn C_v^{uw} *einfach ist*
    $\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{H} \cup \{C_v^{uw}\}$
Sortiere Elemente aus $\mathcal{H}$ aufsteigend zu $C_1, \ldots, C_k$
Wende die MCB-Greedy-Methode an.

Für den Fall, dass kürzeste Wege eindeutig sind, ergibt sich die Korrektheit direkt aus dem Satz von Horton.

Algorithmus 6 : Algorithmus von Horton

Eingabe : $G = (V, E)$
Ausgabe : MCB von G
$\mathcal{H} \leftarrow \emptyset$
Für $v \in V$ *und* $\{u, w\} \in E$
  Berechne $C_v^{uw} = \mathrm{SP}(u, v) + \mathrm{SP}(w, v) + \{u, w\}$
  Wenn C_v^{uw} *einfach ist*
    $\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{H} \cup \{C_v^{uw}\}$
Sortiere Elemente aus $\mathcal{H}$ aufsteigend zu $C_1, \ldots, C_k$
Wende die MCB-GREEDY-METHODE an.

Falls kürzeste Wege nicht eindeutig sind, kann ein beliebiger kürzester Weg gewählt werden!
(Dies wird in 'J.D. Horton. A polynomial-time algorithm to find the shortest cycle basis of a graph' gezeigt).

Algorithmus 7 : Algorithmus von Horton

Eingabe : $G = (V, E)$
Ausgabe : MCB von G
$\mathcal{H} \leftarrow \emptyset$
Für $v \in V$ *und* $\{u, w\} \in E$
    Berechne $C_v^{uw} = \mathrm{SP}(u, v) + \mathrm{SP}(w, v) + \{u, w\}$
    Wenn C_v^{uw} *einfach ist*
        $\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{H} \cup \{C_v^{uw}\}$
Sortiere Elemente aus $\mathcal{H}$ aufsteigend zu $C_1, \ldots, C_k$
Wende die MCB-Greedy-Methode an.

Wie ergibt sich die Laufzeit von $O(m^3 \cdot n)$?

- Wir betrachten zuerst die Zusammenhangskomponenten einzeln
- m und n beziehen sich jetzt auf eine einzelne Zusammenhangskomponente

Vorberechnung

- Berechne für jeden Knoten s einen Kürzeste-Wege Baum mit Wurzel s.
- Speichere für jeden Knoten v
  - $D_s(v)$: Distanz von s nach v
  - $P_s(v)$: Vorgänger von v in Kürzeste-Wege Baum mit Wurzel s
- Laufzeit: $O(n(n \log n + m))$

Schleife in Zeile 2-5

- Maximal $n \cdot m$ Durchläufe
- Pro Durchlauf Aufwand für Überprüfung ob Kreis einfach in $O(n)$
- Laufzeit: $O(n^2 m)$

Sortieren

- Maximal $n \cdot m$ Kreise
- Laufzeit also maximal $mn + \log(mn)$

Greedy-Algorithmus

- Test auf lineare Unabhängigkeit mit r linear unabhängigen Vektoren in $\mathbb{F}_2^m$ geht mit Gauss in Zeit $O(mr)$
- Maximal $m \cdot n$ Kanten zu überprüfen
- Dimension des Kreisraums: $m - n + 1$
- Laufzeit in $O(m^3 n)$

Zusammenfassung pro Zusammenhangskomponente i mit n_i Knoten und m_i Kanten

Phase	Laufzeit
Vorberechnung	$O(n_i(n_i \log n_i + m_i))$
Schleife	$O(n_i^2 m_i)$
Sortieren	$m_i n_i + \log(m_i n_i)$
Greedy	$O(m_i^3 n_i)$
Insgesamt	$O(m_i^3 n_i)$

Es ergibt sich über alle Zusammenhangskomponenten eine Laufzeit von

$$O(\sum_i m_i^3 n_i) = O(m^3 n)$$

Wofür braucht man Kreisbasen?

Es gibt Anwendungen in

- Elektrotechnik ($\Rightarrow$ Chipdesign)
- Erstellung von periodischen Fahrplänen
- Oberflächenrekonstruktion

Wofür braucht man Kreisbasen?

Es gibt Anwendungen in

- Elektrotechnik ($\Rightarrow$ Chipdesign)
- Erstellung von periodischen Fahrplänen
- Oberflächenrekonstruktion

Geschichte

Jahr	Autoren	Ansatz	Laufzeit
1987	Horton	Horton	$O(m^3 n)$
1995	de Pina	de Pina	$O(m^3 + mn^2 \log n)$
2002	Golinsky/Hortn	Horton	$O(m^\omega n)$
2004	Berger/Gritzmann/de Vries	de Pina	$O(m^3 mn^2 \log n)$
2004	Mehlhorn et al	de Pina	$O(m^2 n + mn^2 \log n)$
2007	Mehlhorn/Michail	Hort-Pina	$O(m^2 n / \log n + mn^2)$