

# Periodische Fahrpläne und Kreise in Graphen

Vorlesung Algorithmentechnik

WS 2008/09

Dorothea Wagner

Universität Karlsruhe

# Eisenbahnoptimierungsprozess

- Anforderungserhebung
- Netzwerkentwurf
- Linienplanung
- Fahrplanerstellung
  - periodische Fahrpläne
- Umlage des Verkehrs
- Wageneinsatzplanung, Personaleinsatzplanung
- Rangierprobleme
- Einsatzkontrolle, Fahrplanauskunft, Fahrpreisgestaltung

# Periodische Fahrpläne

## Voraussetzungen

- Transportnetzwerk
- Linienplan
- Fahrplanbedingungen

Fahrplan legt die genauen Abfahrts- und Ankunftszeiten der Züge fest.

Ein *periodischer* Fahrplan setzt zeitlich festgelegte Wiederholung der Zugverkehre fest. Periodische Fahrpläne sind besonders relevant für den Nahverkehr.

# Periodische Fahrpläne

**Datengrundlage:** Bahnnetz, Linienplan bestehend aus Linien und Nebenbedingungen in Form von Zeitfenstern

- Fahrzeiten von Abfahrtsbahnhof zu nächstem Ankunftsbahnhof,
- Mindestaufenthaltszeiten an Bahnhöfen
- Umstiegszeiten der Kunden
- gewünschte Frequenz/Periodizität
- Sicherheitsbedingungen: keine Überholung auf derselben Linie, Kollisionsvermeidung bei eingleisigem Verkehr, etc.

# Periodische Fahrpläne

typische Optimierungsziele betreffen

- Einhaltung der Bedingungen
- Fahrplanqualität aus Sicht der Kunden
- Robustheit des Fahrplans
- Betriebskosten

mathematische Modellierung mittels "Constraint Graphs"  
oder als Lineares System

# 1. Mathematische Modellierung periodischer Fahrpläne

**Definition 1** *Ein Ereignis  $i$  in einem periodischen Fahrplan besteht aus einem Tripel  $(z, v, a)$  bzw.  $(z, v, d)$ , wobei  $z$  ein Zug,  $v$  ein Knoten im Transportnetz und  $a$  bzw.  $d$  für Ankunft oder Abfahrt steht.*

*Eine periodische Zeitfensterbedingung gibt ein Zeitfenster an, innerhalb dessen zwei Ereignisse aufeinander folgen sollen.*

# 1. Mathematische Modellierung periodischer Fahrpläne

## Beispiele

1. Bedingung für Umstiegszeit:

Zug  $z_2$  soll frühestens 2 Minuten und spätestens 4 Minuten nach Ankunft von Zug  $z_1$  (am Bahnhof  $A$ ) abfahren.

$$d_{z_2,A} - a_{z_1,A} \in [2, 4]$$

# 1. Mathematische Modellierung periodischer Fahrpläne

2. Bedingung für Fahrzeit:

Ankunft von Zug  $z_1$  (am Bahnhof  $B$ ) soll frühestens 16 Minuten und spätestens 20 Minuten nach Abfahrt von Zug  $z_1$  (am Bahnhof  $A$ ) stattfinden.

$$a_{z_1,B} - d_{z_1,A} \in [16, 20]$$

# 1. Mathematische Modellierung periodischer Fahrpläne

3. Bedingung für Aufenthalt an Bahnhof:  
Abfahrt von Zug  $z_1$  (am Bahnhof  $A$ ) soll frühestens 1 Minute und spätestens 3 Minuten nach Ankunft von Zug  $z_1$  (am Bahnhof  $A$ ) stattfinden.

$$d_{z_1,A} - a_{z_1,A} \in [1, 3]$$

Zusätzlich muss Periodizität berücksichtigt werden.

# 1. Mathematische Modellierung periodischer Fahrpläne

Modellierung benutzt

- $e_i, e_j$  Ereignisvariablen zu  $i, j$ , die die Zeitpunkte angeben, zu denen  $i, j$  stattfinden,
- $T$  Periodizität,
- untere und obere Schranken  $l_{i,j}$  und  $u_{i,j}$  für Ereignispaare  $i, j$ , wobei
  - $0 \leq l_{i,j} < T$  und  $0 \leq u_{i,j} - l_{i,j} < T$

# 1. Mathematische Modellierung periodischer Fahrpläne

mathematische Formulierung einer *Zeitfensterbedingung*

$$e_j - e_i + Tp_{ij} \in [l_{i,j}, u_{i,j}]$$

bedeutet

- Ereignis  $j$  soll zwischen  $l_{i,j}$  und  $u_{i,j}$  Minuten später stattfinden als Ereignis  $i$ .
- $Tp_{ij}$  drückt periodische Wiederholung aus.

# 1. Mathematische Modellierung periodischer Fahrpläne

## Beispiel:

- Periodizität sei  $T = 60$  (Minuten) und  $[l_{i,j}, u_{i,j}] = [8, 10]$ .
  - Bei  $e_j = 5$  und  $e_i = 55$  ist Zeitfensterbedingung erfüllt, obwohl  $e_j - e_i = -50$ .
- Variable  $p_{ij}$  und Bedingung  $p_{ij} \in \mathbb{Z}$  für alle Ereignispaare  $i, j$ .

# 1. Mathematische Modellierung periodischer Fahrpläne

**PESP** (periodic event scheduling problem)

- Gegeben Menge von  $n$  Ereignissen und  $A$  Menge von  $m$  Ereignispaaren mit Zeitfensterbedingungen.
- Finde Lösung  $(e, p)$  für
  - $e_j - e_i + T p_{ij} \in [l_{i,j}, u_{i,j}]$  für alle  $(i, j) \in A$ ,
  - $e \in \mathbb{Z}^n$  und  $e \in [0, T)^n$ ,
  - $p \in \mathbb{Z}^m$

PESP ist  $\mathcal{NP}$ -schwer.

## 2. Modellierung mit Constraint Graphs

**Definition 2** *Der Constraint Graph  $G = (V, A, l, u)$  zu einer Instanz von PESP ist ein gerichteter Graph  $G = (V, A)$  bestehend aus*

- *einem Knoten  $i \in V$  für jedes Ereignis, und*
- *einer gerichteten Kante  $(i, j) \in A$  für jede Zeitfensterbedingung,*
- *zusammen mit Kantenintervallen  $[l_{i,j}, u_{i,j}]$  für die Kanten  $(i, j) \in A$ .*

## 2. PESP Modellierung mit Constraint Graphs

- Gegeben ein Constraint Graph  $G = (V, A, l, u)$  und Periode  $T$ .
- Finde für  $i \in V$  und  $(i, j) \in A$  ganze Zahlen  $e_i$  und  $p_{ij}$  so dass für jede Kante  $(i, j) \in A$

$$e_j - e_i + Tp_{ij} \in [l_{i,j}, u_{i,j}]$$

erfüllt ist,

- oder gib aus, dass keine solchen Zahlen existieren.

## 2. Modellierung mit Constraint Graphs

### Bemerkungen:

1. PESP ist polynomial lösbar, wenn fester Vektor  $p$  gegeben; Problem ist dann verwandt zur Berechnung kürzester Wege in einem Graphen.
2. Lösbarkeit ist hier nicht abhängig von der Ganzzahligkeitsbedingung an  $e$ .
3. Kann im allgemeinen Fall durch Ausnutzung der Beziehung zwischen PESP und Kreisbasen gelöst werden.

## 2. Modellierung mit Constraint Graphs

Zu constraint graph  $G = (V, A, l, u)$ , Periode  $T$  und festem Vektor  $p$  mit  $p_{ij} = p_{ji}$  für alle  $i, j \in V$  definiere Graph  $G_p = (V, A_p)$  wie folgt:

- für jede Zeitfensterbedingung  $(i, j) \in A$  gibt es zwei gerichteten Kanten  $(i, j)$  und  $(j, i)$  in  $A_p$ ,

## 2. Modellierung mit Constraint Graphs

für jede Kante  $(i, j) \in A_p$  definiere *Kantenlänge*  
 $\text{dist}_{ij}(p_{ij})$  abhängig von  $p$  als

•

$$\text{dist}_{ij}(p_{ij}) = u_{ij} - T p_{ij}$$

Länge von  $(i, j) \in A_p$  zu  $(i, j) \in A$ ,

•

$$\text{dist}_{ji}(p_{ij}) = -l_{ij} + T p_{ij}$$

Länge von  $(j, i) \in A_p$  zu  $(i, j) \in A$ .

## 2. Modellierung mit Constraint Graphs

**Satz 3** Gegeben sei ein gerichteter Graph  $G = (V, A)$  mit Kantenlängen  $\text{dist}_{ij}(p_{ij})$  für alle Kanten  $(i, j) \in A$  und ein ausgezeichneteter Knoten  $s \in V$ . Zu Knoten  $i \in N$  gibt  $\pi_i$  genau dann die Länge eines kürzesten Weges von  $s$  nach  $i$  bezüglich  $\text{dist}_{ij}(p_{ij})$  an, wenn für alle  $(i, j) \in A$  gilt

$$\pi_j \leq \pi_i + \text{dist}_{ij}(p_{ij}).$$

**Beweis** Teilwege eines kürzesten Weges sind kürzeste Wege.

## 2. Modellierung mit Constraint Graphs

**Satz 4** *PESP* mit  $G = (V, A, l, u)$ , Periode  $T$  und festem Vektor  $p$  ist äquivalent zur Berechnung kürzester Wege im zugehörigen Graphen  $G_p = (V, A_p)$  mit Kantenlängen  $\text{dist}_{ij}(p_{ij})$ .

**Beweis** Bedingungen

$$\pi_j \leq \pi_i + \text{dist}_{ij}(p_{ij})$$

auf  $A_p$  sind äquivalent zu Bedingungen

$$\pi_j \leq \pi_i + \text{dist}_{ij}(p_{ij}) \wedge \pi_i \leq \pi_j + \text{dist}_{ji}(p_{ji})$$

auf  $A$ .

## 2. Modellierung mit Constraint Graphs

Substitution von  $\text{dist}_{ij}(p_{ij})$  und  $p_{ij} = p_{ji}$  ergibt für alle  $(i, j) \in A$

$$\pi_j \leq \pi_i + u_{ij} - Tp_{ij}$$

und

$$\pi_i \leq \pi_j - l_{ij} - Tp_{ij}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\pi_j - \pi_i + Tp_{ij} \in [l_{i,j}, u_{i,j}]$$

für alle  $(i, j) \in A$ .

### 3. Constraint Graph und Kreise

Den Knoten eines Graphen mit Kantenlängen können genau dann zulässige Distanzmarkierungen  $(\pi_i)$  zugeordnet werden, wenn der Graph keine negativen Kreise enthält.

**Folgerung 5** *Eine Instanz von PESP mit  $G = (V, A, l, u)$  und Periode  $T$  ist genau dann lösbar wenn es einen ganzzahligen Vektor  $p$  gibt, sodass  $G_p$  keine negativen Kreise enthält bezüglich der Kantenlänge  $\text{dist}_{ij}(p_{ij})$ .*

### 3. Constraint Graph und Kreise

Betrachte PESP beschrieben durch  $G = (V, A, l, u)$  und Periode  $T$ .

- PESP ist in  $\mathcal{O}(n)$  lösbar, wenn  $G$  ein Baum ist.
- Sogar Optimierung einer linearen Zielfunktion in  $\mathcal{O}(n)$  lösbar, wenn  $G$  ein Baum ist.

Wende einfach Tiefensuche auf  $G$  an.

Schwierigkeit von PESP liegt in den Kreisen von  $G$ .

## 4. Constraint Graph und Kreise

Zu Instanz  $G = (V, A, l, u)$  mit Periode  $T$  sei  $C$  ein ungerichteter Kreis. Zu einer beliebigen Richtung in  $C$  bezeichne

- $C^+$  Menge der *Vorwärtskanten* und
- $C^-$  Menge der *Rückwärtskanten*

## 4. Constraint Graph und Kreise

**Satz 6** Instanz  $G = (V, A, l, u)$  mit Periode  $T$  von PESP ist genau dann lösbar, wenn es einen ganzzahligen Vektor  $p$  gibt, so dass für jeden Kreis  $C$  in  $G$  gilt

$$a_C \leq \sum_{(i,j) \in C^+} p_{ij} - \sum_{(i,j) \in C^-} p_{ij} \leq b_C.$$

## 4. Constraint Graph und Kreise

*Dabei sind  $a_C$  und  $b_C$  definiert als*

$$a_C = \left\lceil \frac{1}{T} \left( \sum_{(i,j) \in C^+} l_{ij} - \sum_{(i,j) \in C^-} u_{ij} \right) \right\rceil$$

$$b_C = \left\lfloor \frac{1}{T} \left( \sum_{(i,j) \in C^+} u_{ij} - \sum_{(i,j) \in C^-} l_{ij} \right) \right\rfloor$$

## 4. Formulierung durch Kreissperiodizität

Betrachte Instanz  $G = (V, A, l, u)$  mit Periode  $T$  von PESP. Dann kann  $p$  wie folgt ersetzt werden. Setze zu  $C$  Kreis in  $G$

$$q_C = \sum_{(i,j) \in C^+} p_{ij} - \sum_{(i,j) \in C^-} p_{ij}.$$

## 4. Formulierung durch Kreissperiodizität

Betrachte Instanz  $G = (V, A, l, u)$  mit Periode  $T$  von PESP. Setze für alle  $(i, j) \in A$

$$x_{ij} = e_j - e_i + T p_{ij}.$$

Dann kann eine Lösung  $(e, p)$  mit der zugehörigen Funktion  $x$  auf  $A$  identifiziert werden.

## 4. Formulierung durch Kreissperiodizität

**Definition 7** Für einen Kreis  $C$  in  $G = (V, A, l, u)$  mit Periode  $T$  erfüllt eine Menge von Kantenwerten  $x_a, a \in C$  die Kreisperiodizitätsbedingung falls es einen ganzzahligen Wert  $q_C$  gibt, für den gilt

$$\sum_{(i,j) \in C^+} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in C^-} x_{ij} = Tq_C.$$

## 4. Formulierung durch Kreissperiodizität

**Satz 8** *Gegeben Instanz  $G = (V, A, l, u)$  mit Periode  $T$  von PESP. Eine Funktion  $x : A \rightarrow \mathbb{R}$  korrespondiert zu einer Lösung von PESP genau dann, wenn für jeden Kreis  $C \in G$  die Kreisperiodizitätsbedingung erfüllt ist.*

**Beweis** Konstruiere zugehörige Lösung.

## 4. Formulierung durch Kreissperiodizität

PESP für Instanz  $G = (V, A, l, u)$  mit Periode  $T$  und Optimierungsfunktion  $F$  lässt sich dann formulieren als

**CPF** (Cycle Periodicity Formulation)

$$\min F(x)$$

wobei für alle  $C \in G$

$$\sum_{(i,j) \in C^+} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in C^-} x_{ij} = Tq_C$$

und

## 4. Formulierung durch Kreissperiodizität

- $l_a \leq x_a \leq u_a$  für alle  $a \in A$ ,
- $a_C \leq q_C \leq b_C$  für alle  $C \in G$ ,
- $x_a \in \mathbb{Z}$  für alle  $a \in A$ ,
- $q_C \in \mathbb{Z}$  für alle  $C \in G$ .

## 4. Formulierung durch Kreissperiodizität

Gegeben Lösung  $(x, q)$  von CPF. Daraus kann wie folgt Lösung  $(e, p)$  für PESP konstruiert werden.

1. Konstruiere aufspannenden Baum  $H$  in  $G$ .
2. Wähle beliebigen Knoten  $s \in V$  und setze  $e_s = 0$ .
3. Für jedes  $i \in V$  betrachte Weg  $P_{si} \in H$  und setze

$$e_i = \sum_{(i,j) \in P_{si}^+} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in P_{si}^-} x_{ij}.$$

4. Für  $i, j \in V$  setze  $p_{ij} = (x_{ij} - e_j + e_i) \frac{1}{T}$ .

## 5. CFP und Kreisbasen

In einem gerichteten Graph  $G = (V, A)$  lässt sich jeder ungerichtete Kreis  $C$  durch einen Vektor  $\gamma_C$  ausdrücken, der nur Einträge aus  $\{-1, 0, 1\}$  hat. Setze

$$\gamma_{C_a} = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \in C^+, \\ -1 & \text{falls } a \in C^- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

## 5. PESP und Kreisbasen

**Definition 9** *Der Kreisraum eines gerichteten Graphen  $G = (V, A)$  ist der lineare Vektorraum, der durch die  $\{-1, 0, 1\}$ -Kreisvektoren  $\gamma_C$  der Kreise  $C \in G$  aufgespannt wird.*

*Eine Basis  $B$  des Kreisraums von  $G$  heißt Kreisbasis von  $G$ .*

## 5. PESP und Kreisbasen

### Konstruktion einer Kreisbasis

Berechne einen (nicht notwendig gerichteten) aufspannenden Baum  $H$  in  $G$ . Füge iterativ Nichtbaumkanten  $a \in A$  zu  $H$  hinzu.

Dann sind folgende Eigenschaften leicht zu sehen.

## 5. PESP und Kreisbasen

- Jede Nichtbaumkante  $a$  zusammen mit dem eindeutigen Weg in  $H$  zwischen ihren Endknoten bildet einen Kreis.
- Die Menge aller durch Nichtbaumkanten induzierten Kreise bildet eine Kreisbasis von  $G$ .
- Die Dimension  $c$  des Kreisraums von  $G$  ist  $|A| - |V| + 1$ .

## 5. PESP und Kreisbasen

Was ist eine gute Kreisbasis für die Lösung einer Instanz von CPF?

Angenommen wir wollen Instanz von CPF durch Aufzählung aller möglichen Vektoren  $q$  lösen. Wie hoch ist der Aufwand?

Aufwand hängt von Anzahl möglicher Werte, die  $q$  annehmen kann, ab. Dies hängt von der "Weite" der zugrundeliegenden Kreisbasis ab.

Betrachte Kreisbasen mit kleiner Weite.

## 5. PESP und Kreisbasen

Sei  $W_C = b_C - a_C$  die *Weite* des Kreises  $C$ .

- Eine Variable  $q_C$  zu CPF kann dann  $W_C + 1$  verschiedene Werte annehmen.
- Für eine Kreisbasis  $B$  (der Dimension  $c$ ) kann der Vektor  $q = (q_1, \dots, q_c)$  dann

$$W(B) = \prod_{C \in B} (W_C + 1)$$

verschiedene Werte annehmen.

## 6. PESP als lineares System

- Gegeben Instanz von PESP mit  $G = (V, A, l, u)$  und Periode  $T$ .
- $M$  ist die  $n \times m$ -Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix zu  $G$ , d.h. für  $k \in V$  und  $(i, j) \in A$  sei

$$M_{k,(i,j)} := \begin{cases} -1 & \text{falls } i = k, \\ 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

## 6. PESP als lineares System

Äquivalente Formulierung von PESP ist dann:

- Finde Vektoren  $e \in \mathbb{Z}^n$  und  $p \in \mathbb{Z}^m$  mit

$$l \leq M^T e + T p \leq u.$$

**Satz 10** *Instanz  $G = (V, A, l, u)$  mit Periode  $T$  von PESP ist genau dann lösbar wenn es eine ganzzahlige Lösung gibt.*

**Beweis** folgt aus Theorie der Linearen Programmierung.