Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Prof. Dr. D. Wagner

Flussnetzwerk bei Goldberg-Tarjan

Vorlesung Algorithmentechnik im WS 08/09

Problem 1: Flussnetzwerk bei Goldberg-Tarjan

Zeigen Sie, dass die für den Algorithmus von Goldberg-Tarjan verwendete Definition eines Flussnetzwerkes äquivalent zu der ursprünglich in der Vorlesung vorgestellten Definition ist.

Die ursprüngliche Definition eines Flussnetzwerkes benutzt einen einfachen gerichteten Graphen $D = (V, E)$ mit *Kantenkapazitäten* $c : E \to \mathbb{R}_0^+$ und ausgezeichneten Knoten $s, t \in V$, s *Quelle (source)* und t *Senke (target)*.

Man bezeichnet das Tupel $(D; s; t; c)$ dann als *Netzwerk*. Eine Abbildung $f : E \to \mathbb{R}_0^+$ heißt *Fluss*, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften hat:

(a) Für alle $(i, j) \in E$ ist die *Kapazitätsbedingung*

$$0 \leq f(i,j) \leq c(i,j) \tag{1}$$

erfüllt.

(b) Für alle $i \in V \setminus \{s, t\}$ ist die *Flusserhaltungsbedingung*

$$\sum_{\{j|(i,j)\in E\}} f(i,j) - \sum_{\{j|(j,i)\in E\}} f(j,i) = 0 \tag{2}$$

erfüllt.

Der Ausdruck

$$w(f) := \sum_{(s,i)\in E} f(s,i) - \sum_{(i,s)\in E} f(i,s)$$

heißt *Wert* des Flusses f.

Zur Vereinfachung der Darstellung wird das Netzwerk $D = (V, E)$ zu $D' = (V, E')$ erweitert, wobei $E' := E \cup \{(v, w) \mid (w, v) \in E \wedge (v, w) \notin E\}$. Außerdem wird $c \colon E \to \mathbb{R}_0^+$ fortgesetzt zu $c' \colon V \times V \to \mathbb{R}_0^+$ durch $c'(v, w) = 0$ für $(v, w) \notin E$. Aus Gründen der Übersicht bezeichnen wir im Folgenden allerdings auch c' mit c. Ein *Fluss* f ist dann eine Abbildung $f : V \times V \to \mathbb{R}$ mit *Kapazitätsbedingung*

$$\forall (v,w) \in V \times V \quad f(v,w) \leq c(v,w) \ , \tag{3}$$

Antisymmetrie-Forderung

$$\forall (v,w) \in V \times V \quad f(v,w) = -f(w,v) \tag{4}$$

und *Flusserhaltungsbedingung*

$$\forall v \in V \setminus \{s,t\} \quad \sum_{u\in V} f(u,v) = 0 \ . \tag{5}$$

Der *Wert* eines Flusses f ist dann

$$w(f) = \sum_{v\in V} f(s,v) = \sum_{v\in V} f(v,t) \ .$$

Proof. Für den Beweis sei $D = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $D' = (V, E')$ sei der gerichtete Graph, der für den Algorithmus von Goldberg-Tarjan betrachtet wird, d.h.

$$E' := E \cup \{(v, w) \mid (w, v) \in E \wedge (v, w) \notin E\} \ . \tag{6}$$

Das ursprüngliche Flussnetzwerk sei $\mathcal{N} = (D, s, t, c)$. Für den Algorithmus von Goldberg-Tarjan wird ein Flussnetzwerk $\mathcal{N}' = (D', s, t, c')$ konstruiert, wobei $c'_{|E} \equiv c$ und $c'_{|E' \setminus E} \equiv 0$ gelten. Im folgenden sei c' ebenfalls mit c bezeichnet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit enthalte D keine Kante (u, v), so dass (v, u) ebenfalls eine Kante von D ist (vgl. Übungsblatt 3).

Wir zeigen die Äquivalenz in zwei Schritten:

(i) Sei f ein Fluss in $\mathcal{N}'$. Dann ist $f_{|D}$ ein Fluss in $\mathcal{N}$.

(ii) Sei f ein Fluss in $\mathcal{N}$. Dann läßt sich f in kanonischer Weise zu einem Fluss in $\mathcal{N}'$ fortsetzen.

Schritt (i)*:* Sei f ein Fluss in $\mathcal{N}'$. Dann gelten

Kapazitätsbedingung

$$\forall (v, w) \in V \times V \quad f(v, w) \leq c(v, w) \ , \tag{7}$$

Antisymmetrie-Forderung

$$\forall (v, w) \in V \times V \quad f(v, w) = -f(w, v) \tag{8}$$

und *Flusserhaltungsbedingung*

$$\forall v \in V \setminus \{s, t\} \quad \sum_{u \in V} f(u, v) = 0 \ . \tag{9}$$

Zu $e = (u, v) \in E$ bezeichne e^{-1} die Kante (v, u). Sei $e \in E$ mit $f(e) < 0$. Dann gilt $e^{-1} \in E' \setminus E$ und damit $c(e^{-1}) = 0$. Wegen der Antisymmetriebedingung gilt aber $f(e^{-1}) > 0$ im Widerspruch zu $f(e^{-1}) \leq c(e^{-1}) = 0$. Also gilt $f(e) \geq 0$ für alle $e \in E$. Außerdem gilt $f(e) \leq c(e)$ aufgrund der Kapazitätsbedingung (7). Somit erfüllt $f_{|D}$ die Kapazitätsbedingung für $\mathcal{N}$, d.h.

$$0 \leq f_{|D}(e) \leq c(e) \quad (e \in E) \ .$$

Weiter gilt für alle $v \in V \setminus \{s, t\}$

$$\begin{aligned}
0 = w(v) : &= \sum_{u \in V} f(u, v) \\
&= \sum_{(u,v) \in E} f(u, v) + \sum_{(u,v) \in E' \setminus E} f(u, v) \\
&= \sum_{(u,v) \in E} f(u, v) - \sum_{(u,v) \in E' \setminus E} f(v, u) && \text{Antisymmetrie} \\
&= \sum_{(u,v) \in E} f(u, v) - \sum_{(v,u) \in E} f(v, u) \ .
\end{aligned}$$

Damit ist die Flusserhaltungsbedingung für $f_{|D}$ in $\mathcal{N}$ erfüllt. Außerdem gilt

$$w(f) = -w(s) = w(f_{|D}) \ .$$

Also ist auch der Wert des Flusses in beiden Flussnetzwerken gleich.

Schritt (ii)*:* Sei f ein Fluss in $\mathcal{N}$. Wir erweitern f in kanonischer Weise auf E'. Dabei müssen wir sicherstellen, dass die Antisymmetriebedingung erfüllt bleibt, d.h. wir setzen

$$f(e^{-1}) = -f(e) \tag{10}$$

für alle $e \in E$. Aufrund der Kapazitätsbedingung in $\mathcal{N}$ ist die Kapazitätsbedingung in $\mathcal{N}'$ trivialerweise erfüllt. Die Antisymmetribedingung ist nach Definition ebenfalls erfüllt. Analog zur Argumentation in Schritt (i) lässt sich damit auch zeigen, dass die Flusserhaltung sowie der Wert des Flusses erhalten bleiben.

□