Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmentechnik
WS 06/07

5. Übungsblatt

Ausgabe: 16. Januar 2007
Abgabe: 24. Januar, 15:30 Uhr im ITI Wagner (Informatik-Hauptgebäude, 3. Stock)

Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Problem 1: De Pina 1pt

Abbildung 1 zeigt den so genannten *Peterson-Graph*. Grau und fett ist ein aufspannender Baum des Graphen eingezeichnet. Alle Kantengewichte sind 3.

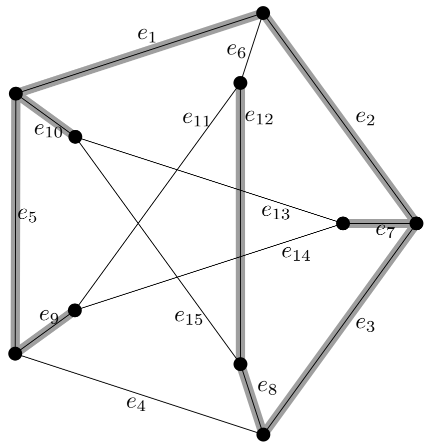

Abbildung 1: Der *Peterson-Graph*.

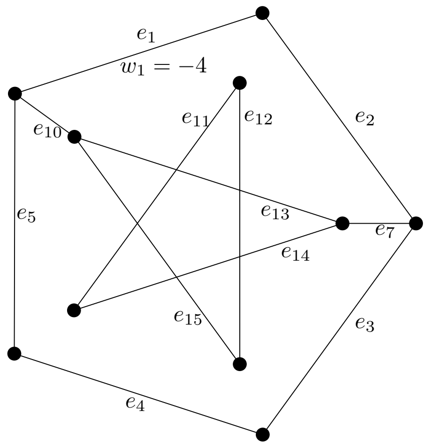

Abbildung 2: Variante von *Pete*.

(a) Führen Sie den Algorithmus von de Pina (algebraisch, Algorithmus 41 im Skript) auf dem Graphen in Abbildung 1 aus. Nutzen Sie den eingezeichneten Baum und halten sie sich an die Reihenfolge der Kanten entsprechend ihrer Nummerierung. Notieren Sie für jeden Schleifendurchlauf der Zeilen 3 bis 7 des Algorithmus Folgendes: k, C_k, S_k und alle S_i welche geändert werden, sowie die resultierende Basis.

(b) In Abbildung 2 ist $\text{Pete}_{6,8,9}$ zu sehen. Beachten Sie das negative Kantengewicht -4 von e_1. Alle anderen Gewichte seien hier 1. Raten Sie eine minimale Kreisbasis von $\text{Pete}_{6,8,9}$.

Problem 2: Kreisbasen und Schnittbasen 3pt

Der *Kantenraum* $\mathcal{E}$ eines Graphen $G = (V, E)$ sei der Vektorraum aller Teilmengen der Kantenmenge E von G über dem Körper $\mathbb{F}_2$. Somit entspricht Vektoraddition der symmetrischen Differenz und für $F \in \mathcal{E}$ gilt $-F = F$. Desweiteren sei ein Schnitt im Graphen G definiert durch die Menge $D \subseteq E$ der Kanten, welche diesen Schnitt kreuzen. Sei $\mathcal{C}$ der Kreisraum, und sei $\mathcal{C}^*$ die Menge aller Schnitte von G (inklusive dem leeren Schnitt).

(a) Zeigen Sie dass $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^*$ Untervektorräume von $\mathcal{E}$ sind.

(b) Für $v \in V$ sei $E(v)$ die Menge der mit v inzidenten Kanten. Zeigen oder widerlegen Sie: die Menge $\mathcal{B}_w = \{E(v) | v \in V \setminus \{w\}\}$ ist eine Basis von $\mathcal{C}^*$ für jedes $w \in V$.

(c) Sei Orthogonalität wie gewohnt definiert: $F, F' \in \mathcal{E}$ sind *orthogonal* wenn gilt $\langle F, F' \rangle = 0$; und für einen Unterraum $\mathcal{F}$ von $\mathcal{E}$ sei $\mathcal{F}^\perp = \{D \in \mathcal{E} : \langle F, D \rangle = 0, \forall F \in \mathcal{F}\}$ der *Orthogonalraum* von $\mathcal{F}$.
Zeigen Sie: $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^*)^\perp$ und $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}^\perp$

Problem 3: Das Escape Problem 2pt

Betrachten Sie erneut das Escape-Problem (Übungsblatt Nr. 4., Problem Nr. 3). Zur Erinnerung, dieses Problem ist folgendermaßen definiert:

Gegeben seien $n \times n$ Gitterpunkte.

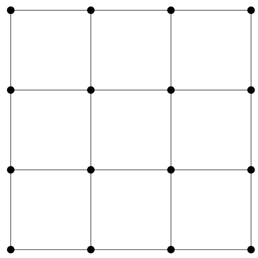

Abbildung 3: Gitternetzwerk für $n = 4$

Sei S eine Teilmenge der Gitterpunkte mit $|S| < n^2$. Das *Escape Problem* besteht darin zu entscheiden, ob es $|S|$ viele knotendisjunkte Wege gibt, so dass jeder Weg von einem Knoten aus S startet und an einem Randpunkt des Gitters endet.

(a) Modellieren Sie das Escape Problem als ILP. Erklären Sie hierbei Zielfunktion, alle Variablen und alle Nebenbedingungen.
Hinweis: Die Umwandlung von Knoten- in Kantenkapazitäten ist nicht erforderlich zur Modellierung.

(b) Ist das Escape-Problem in der Komplexitätsklasse $\mathcal{P}$ enthalten? Begründen Sie!

Problem 4: LP-Modellierung 2pt

Modellieren Sie folgende Probleme als (gegebenenfalls) ganzahlige LPs. Erklären Sie hierbei Zielfunktion, alle Variablen und alle Nebenbedingungen.

(a) **Euklidischer Handlungsreisender**
Das *Problem des euklidischen Handlungsreisenden* ist folgendermaßen definiert: Gegeben seien n Punkte $p_i \in P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ in der Ebene mit Koordinaten (x_i, y_i) für jeden Punkt $p_i \in P$. Gesucht ist die kürzeste Rundtour, die alle Knoten mindestens einmal besucht. Rundtour bedeutet, dass die Tour an dem gleichen (frei wählbaren) Knoten beginnen und enden muss. Der Abstand zweier Punkte ist definiert durch den euklidischen Abstand der beiden Punkte.

(b) **Längster Weg**
Gegeben sei ein gerichteter, zusammenhängender, kreisfreier Graph $G = (V, E)$. Ferner seien zwei Knoten $s, t \in V$ gegeben. Die Länge eines Weges ist die Anzahl der Kanten des Weges. Gesucht ist ein möglichst langer Weg von s nach t.