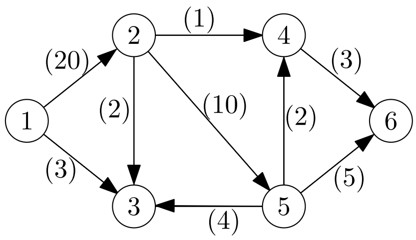
Universität Karlsruhe
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

4. Übungsblatt

Ausgabe: 12. Dezember 2006
Abgabe: 20. Dezember, 15:30 Uhr im ITI Wagner (Informatik-Hauptgebäude, 3. Stock)

Die Bearbeitung in Zweiergruppen ist ausdrücklich erwünscht.

Problem 1: Goldberg–Tarjan 1pt



Bestimmen Sie den maximalen Fluss in dem rechts angegebenen Netzwerk mit $s = 1$ und $t = 6$ (Kantenkapazitäten in Klammern). Benutzen Sie hierzu den Algorithmus von Goldberg–Tarjan. Bei jeder Push- oder Relabel-Operation muss gelten: Das 3. Argument des Operationsaufrufs ist der Knoten mit der niedrigsten ID, unter den aktiven Knoten; wird eine Push-Operation durchgeführt muss zusätzlich gelten: Das vierte Argument des Operationsaufrufs ist der Knoten mit der niedrigsten ID unter den möglichen Kandidaten. Geben Sie **sämtliche** Zwischenschritte an. Zeichnen Sie das aktuelle Netzwerk **vor** jeder (bis auf die erste) Relabel-Operation und nachdem der Algorithmus terminiert. Halten Sie sich an die Notation aus dem Skript.

Problem 2: Flüsse 2pt

Gegeben sei ein Flussproblem in einem Netzwerk $D = (V, E)$, in dem es zu einigen Kanten (u, v) auch Kanten (v, u) gibt. Zeigen Sie, dass man dieses Flussproblem auf ein Flussproblem auf dem Netzwerk $D' = (V, E')$ überführen kann, wobei gilt: E' ist maximale Teilmenge von E mit $(u, v) \in E' \Rightarrow (v, u) \notin E'$, so dass der Wert des Maximalflusses nicht verändert wird.

Problem 3: Das Escape Problem 3pt

Gegeben seien $n \times n$ Gitterpunkte.

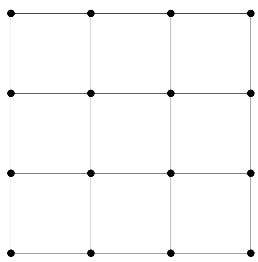


Abbildung 1: Gitternetzwerk für $n = 4$

Sei S eine Teilmenge der Gitterpunkte mit $|S| < n^2$. Das *Escape Problem* besteht darin zu entscheiden, ob es $|S|$ viele knotendisjunkte Wege gibt, so dass jeder Weg von einem Knoten aus S startet und an einem Randpunkt des Gitters endet.

(a) Geben Sie für $n = 4$ eine Ja-Instanz mit möglichst vielen Startknoten an, sowie eine Nein-Instanz mit möglichst wenig Startknoten.

Das maximale Flussproblem aus der Vorlesung kann folgendermaßen erweitert werden: Neben den Kantenkapazitäten c seien noch Knotenkapazitäten $\gamma : V \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben. In einem solchen Netzwerk $(D; s; t; c; \gamma)$ heißt eine Abbildung f *Fluss*, wenn sie neben den bekannten Eigenschaften (Flusserhaltungsbedingung und (Kanten)-Kapazitätsbedingung) auch die folgende erfüllt:

- Für alle $i \in V$ ist die *Knotenkapazitätsbedingung*

$$\sum_{\{j|(i,j)\in E\}} f(i,j) \leq \gamma(i) \quad \text{wenn} \quad i \in V \setminus \{t\}$$
$$\sum_{\{j|(j,i)\in E\}} f(j,i) \leq \gamma(i) \quad \text{wenn} \quad i = t$$

  erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass die Bestimmung eines maximalen Flusses in einem Netzwerk mit Kanten- **und** Knotenkapazitäten auf ein maximales Flussproblem in einem normalen (d.h. ohne Knotenkapazitäten) Netzwerk mit vergleichbarer Größe zurückgeführt werden kann.

(c) Wie würden Sie das Escape-Problem algorithmisch lösen? Geben Sie die Worst-case Laufzeit Ihres Ansatzes an. *Hinweis:* Pseudocode ist nicht gefordert!

Problem 4: Kreisbasen 2pt

(a) Konstruieren Sie eine Familie von Graphen (also eine Menge von Graphen, die sich gleich beschreiben lassen, und sich nur in der Anzahl der Kanten und/oder Knoten unterscheiden), in denen die Anzahl Kreise (Kreis wie in der Vorlesung definiert) exponentiell in der Anzahl Kanten ist. Beweisen sie dies.

(b) Konstruieren Sie eine Familie von Graphen, in denen die Anzahl Kreise linear in der Anzahl Kanten ist. Beweisen sie dies.

(c) Geben Sie für untenstehenden Graphen (Kantengewichte stehen in Klammern) die fundamentale Kreisbasis zu dem hellgrau gestrichelten Baum an.

(d) Drücken Sie den dunkelgrau gepunkteten Kreis als Linearkombination der Basiskreise aus.

(e) Zeigen oder widerlegen Sie: Diese Fundamentalbasis ist eine minimale Kreisbasis.