

5. Musterlösung

Problem 1: De-Pina

1pt

(a) Wir haben $N = m - n + K(G) = 15 - 10 + 1 = 6$.

- Initialisierung: $S_1 = \{e_4\}$, $S_2 = \{e_6\}$, $S_3 = \{e_{11}\}$, $S_4 = \{e_{13}\}$, $S_5 = \{e_{14}\}$, $S_6 = \{e_{15}\}$
- $k = 1$:
Ein kürzester Kreis C_1 mit $\langle C_1, S_1 \rangle = 1$ ist: $C_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ mit $w(C_1) = 15$
für $i = 2$ bis 6, es gibt kein S_i mit $\langle C_1, S_i \rangle = 1$
- $k = 2$:
Ein kürzester Kreis C_2 mit $\langle C_2, S_2 \rangle = 1$ ist: $C_2 = \{e_6, e_2, e_3, e_8, e_{12}\}$ mit $w(C_2) = 15$
für $i = 3$ bis 6, es gibt kein S_i mit $\langle C_2, S_i \rangle = 1$
- $k = 3$:
Ein kürzester Kreis C_3 mit $\langle C_3, S_3 \rangle = 1$ ist: $C_3 = \{e_{11}, e_6, e_1, e_5, e_9\}$ mit $w(C_3) = 15$
für $i = 4$ bis 6, es gibt kein S_i mit $\langle C_3, S_i \rangle = 1$
- $k = 4$:
Ein kürzester Kreis C_4 mit $\langle C_4, S_4 \rangle = 1$ ist: $C_4 = \{e_{13}, e_{14}, e_9, e_5, e_{10}\}$ mit $w(C_4) = 15$
 $\langle C_4, S_5 \rangle = 1$ (e_{14} von S_5 kommt in C_4 vor)
 $S_5 = S_5 \oplus S_4 = \{e_{13}, e_{14}\}$
- $k = 5$:
Ein kürzester Kreis C_5 mit $\langle C_5, S_5 \rangle = 1$ ist: $C_5 = \{e_{14}, e_9, e_4, e_3, e_7\}$ mit $w(C_5) = 15$
 $\langle C_5, S_6 \rangle = 0$
- $k = 2$:
Ein kürzester Kreis C_6 mit $\langle C_6, S_6 \rangle = 1$ ist: $C_6 = \{e_{15}, e_{10}, e_5, e_4, e_8\}$ mit $w(C_6) = 15$

Die MCB von PETERSON-GRAPH ist $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$ mit $w(\text{MCB}) = 90$

(b) Die minimale Kreisbasis ist: $\text{MCB} = \{C_1, C_2, C_3\}$, wobei:

$$C_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$C_2 = \{e_1, e_2, e_7, e_{13}, e_{10}\}$$

$$C_3 = \{e_1, e_2, e_7, e_{14}, e_{11}, e_{12}, e_{15}, e_{10}\}$$

$$w(\text{MCB}) = 3$$

Problem 2: Kreisbasen und Schnittbasen

3pt

(a) Laut Vorlesung ist \mathcal{C} ein Vektorraum. Wegen $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$, ist \mathcal{C} ein Untervektorraum von \mathcal{E} .

Offensichtlich ist ebenfalls $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{E}$.

Betrachte nun zwei beliebige Schnitte $D, D' \in \mathcal{C}^*$, die den Partitionen $\{V_1, V_2\}$ bzw. $\{V'_1, V'_2\}$ auf den Knoten des Graphen entsprechen. Ist $D = D'$, so ist $D \oplus D' = \emptyset \in \mathcal{C}^*$. Ist außerdem einer der beiden Schnitte der leere Schnitt, o.B.d.A. $D = \emptyset$, so gilt $D \oplus D' = D' \in \mathcal{C}^*$, wir können also annehmen, dass D und D' verschieden und nicht leer sind.

Wir betrachten die Kantenmenge $D \oplus D'$. Dies sind wegen $D \oplus D' = (D \cup D') \setminus (D \cap D')$ gerade die Kanten, die *genau einen* der beiden Schnitte kreuzen. Dies sind aber genau die Kanten zwischen $(V_1 \cap V_1') \cup (V_2 \cap V_2')$ und $(V_1 \cap V_2') \cup (V_2 \cap V_1')$ (siehe auch Abbildung (1)), und diese beiden Mengen bilden wegen $D \neq D'$ erneut eine Partition von V . Das heißt $D \oplus D' \in \mathcal{C}^*$.

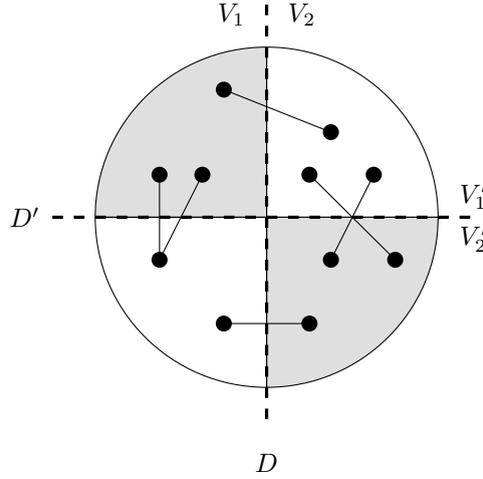


Abbildung 1: Kanten, die genau einen der Schnitte $\{V_1, V_2\}$ bzw. $\{V_1', V_2'\}$ kreuzen. Der neue Schnitt wird durch die Vereinigung der eingezeichneten Kanten induziert und partitioniert V in den hellen bzw. grauen Bereich.

Es bleibt noch zu Zeigen, dass für alle $D \in \mathcal{C}^*$ und $a \in \mathbb{F}_2$ auch $a \cdot D \in \mathcal{C}^*$ ist. Das ist aber trivialerweise erfüllt, da für $a = 0$ auch $a \cdot D = \emptyset \in \mathcal{C}^*$, und für $a = 1$ der Schnitt $a \cdot D = D \in \mathcal{C}^*$.

Somit ist \mathcal{C}^* ein Untervektorraum von \mathcal{E} . \square

- (b) Um zu zeigen dass für jedes $w \in V$ die Menge \mathcal{B}_w eine Basis von \mathcal{C}^* ist, zeigen wir, dass wir jeden beliebigen Schnitt $\{V_1, V_2\}$ durch Vektoren aus \mathcal{B}_w erzeugen können. Des Weiteren zeigen wir, dass \mathcal{B}_w linear unabhängig ist, genau dann wenn G zusammenhängend ist.

Sei $\{V_1, V_2\}$ ein beliebiger Schnitt in G , dem der Schnitt $D \in \mathcal{C}^*$ entspricht. Sei $\mathbb{E} w \in V_2$. Zu einer Kante $e \in E$ sei weiterhin D_e der Eintrag im Vektor D , dem die Kante e entspricht. Jede Kante $e := \{u, v\} \in E$ ist zu genau zwei Knoten u und v inzident. Damit folgt, dass e in genau zwei Schnitten aus \mathcal{B}_w liegt, nämlich in $E(u)$ und in $E(v)$. Wir zeigen nun, dass D erzeugt werden kann durch

$$D = \sum_{v \in V_1} E(v) \quad (1)$$

Betrachte für eine Kante $e = \{u, v\}$ den Eintrag D_e von D .

- e kreuzt den Schnitt nicht. Somit sind u und v beide in V_1 oder beide in V_2 . Ist $u, v \in V_1$, so ist $D_e = 0$, da sowohl $E(u)$ als auch $E(v)$ in (1) vorkommen. Für $u, v \in V_2$ ist trivialerweise $D_e = 0$.
- e kreuzt den Schnitt. Es ist also genau einer der inzidenten Knoten von e in V_1 . Sei o.B.d.A. $u \in V_1$ und $v \in V_2$. Somit ist $D_e = 1$, da die Kante e nur durch $E(v)$ in die Summe einfließt.

Es gilt also $D_e = 1$ genau dann wenn e den Schnitt kreuzt. Da der Schnitt beliebig war, können wir jeden Schnitt mit Vektoren aus \mathcal{B}_w erzeugen. Somit ist \mathcal{B}_w ein Erzeugendensystem von \mathcal{C}^* .

Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{B}_w eine linear unabhängige Menge von Vektoren ist. Wir nehmen an, dass G zusammenhängend ist und führen Beweis durch Widerspruch. Sei

$$\sum_{v \in V} \alpha_v E(v) = 0 =: D$$

eine Linearkombination. Die Koeffizienten $\alpha_i \neq 0$ entsprechen einer Menge von Knoten aus $S \subseteq V \setminus \{w\}$ und induzieren damit den Schnitt $(S, V \setminus S)$. Da $S \subsetneq V$, und G zusammenhängend ist, gibt es mindestens eine Kante $e = \{u, v\}$ mit o.B.d.A. $u \in S$ und $v \notin S$. Damit ist aber $D_e = 1$, und

somit $0 = D \neq 0$ was ein Widerspruch ist. Es kann also keine $\alpha_i \neq 0$ geben, und somit ist \mathcal{B}_w eine Basis von \mathcal{C}^* .

Ist G unzusammenhängend, so lässt sich der leere Schnitt auch durch eine nicht-triviale Linearkombination erzeugen. Siehe dazu Abbildung (2). Um das Erzeugendensystem \mathcal{B}_w linear unabhängig zu machen, muss für jede Zusammenhangskomponente ein Knoten w gewählt werden für den $E(w)$ ausgeschlossen wird. \square

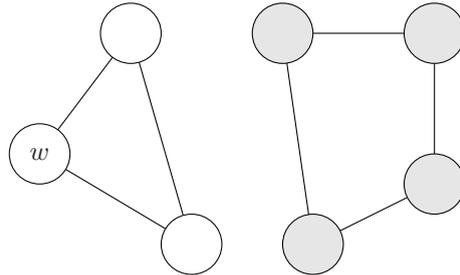


Abbildung 2: Unzusammenhängender Graph, bei dem die Menge \mathcal{B}_w keine Basis für \mathcal{C}^* ist. Die grauen Knoten S induzieren eine Linearkombination $\sum_{v \in S} E(v) = 0$.

- (c) Jeder Kreis in G enthält bezüglich jedem Schnitt eine gerade Anzahl Kanten, die den Schnitt kreuzen, also $\langle C, D \rangle = 0$ für beliebige $C \in \mathcal{C}$ und $D \in \mathcal{C}^*$. Damit folgt $\mathcal{C} \subseteq (\mathcal{C}^*)^\perp$.

Sei $F \notin \mathcal{C}$ kein Kreis, dann gibt es mindestens einen Knoten $v \in F$ mit ungeradem Grad. Für dieses v gilt $\langle E(v), F \rangle = 1$. Da aber $E(v) \in \mathcal{C}^*$ ist, gilt $F \notin (\mathcal{C}^*)^\perp$. Somit folgt $\mathcal{C} = (\mathcal{C}^*)^\perp$.

Wegen der ersten Behauptung müssen wir für die zweite nur noch zeigen, dass $\mathcal{C}^* = ((\mathcal{C}^*)^\perp)^\perp$, da wegen der ersten Behauptung $((\mathcal{C}^*)^\perp)^\perp = (\mathcal{C})^\perp$ gilt. Nach der Definition von Orthogonalität ist $\mathcal{C}^* \subseteq ((\mathcal{C}^*)^\perp)^\perp$. Da nun aber wegen $\dim \mathcal{E} = |E|$ gilt

$$\dim \mathcal{C}^* + \dim (\mathcal{C}^*)^\perp = |E|$$

ist auch

$$\dim (\mathcal{C}^*)^\perp + \dim ((\mathcal{C}^*)^\perp)^\perp = |E|$$

und somit $\dim \mathcal{C}^* = \dim ((\mathcal{C}^*)^\perp)^\perp$. Also folgt $\mathcal{C}^* = ((\mathcal{C}^*)^\perp)^\perp$, und die zweite Behauptung ist damit bewiesen. \square

Problem 3: Das Escape Problem

2pt

- (a) Wie in Aufgabe 3c Übungsblatt 4 wandeln wir das Gitternetzwerk in einen Flussgraphen um mit Hin-/Rückkanten und zusätzlicher Quelle s und Senke t . Das LP zum Escape Problem ergibt sich dann als: Sei $x_{i,j}$ der Fluss auf der Kante $(i,j) \in E$.

- Zielfunktion: maximiere Fluss

$$\max \sum_{(s,i) \in E} x_{s,i} - \sum_{(s,i) \in E} x_{i,s}$$

- Kantenkapazität

$$x_{i,j} \leq c_{i,j} = 1, x_{i,j} \geq 0 \forall (i,j) \in E$$

- Flusserhaltung

$$\sum_i x_{i,j} - \sum_i x_{j,i} = 0 \forall j \in V \setminus \{s, t\}$$

- Knotenkapazität

$$\sum_j x_{i,j} \leq \gamma_i = 1 \forall i \in V \setminus \{s, t\}$$

Wir wissen, dass es eine ganzzahlige Lösung für obiges Flussproblem gibt und fassen zusammen:

- Zielfunktion: maximiere Fluss

$$\max \sum_{(s,i) \in E} x_{s,i}$$

- Kantenkapazität

$$x_{i,j} \in [0, 1] \forall (i, j) \in E$$

- Flusserhaltung

$$\sum_i x_{i,j} - \sum_i x_{j,i} = 0 \forall j \in V \setminus \{s, t\}$$

- Knotenkapazität

$$\sum_j x_{i,j} \leq \gamma_i = 1 \forall i \in V \setminus \{s, t\}$$

Wenn die Zielfunktion den Wert $|S|$ annimmt, ist die gegebene Instanz lösbar.

- (b) Wie in Aufgabe 3c Übungsblatt 4 gesehen, lässt sich das Escape Problem in polyn. Zeit auf ein ganzzahliges Flussproblem reduzieren, welches in polyn. Zeit lösbar ist. Daher liegt das Escape Problem in **P**.

Problem 4: LP-Modellierung

2pt

- (a) **Euklidischer Handlungsreisender**

Sei $d_{ij} = \|p_j - p_i\| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ vorberechnet. Da für dieses Abstandsmaß die Dreiecksungleichung gilt, ist klar, dass die kürzeste Rundreise jede Stadt nur einmal besucht (es gibt also keine Hubs). Seien x_{ij} binäre Variablen, die angeben, ob die Strecke von p_i nach p_j Teil der Rundreise ist.

- Zielfunktion, minimiere Länge der Rundtour

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij}$$

- jeder Punkt hat genau einen Nachfolger

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

- jeder Punkt hat genau einen Vorgänger

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

- keine reflexiven Kanten, denn diese sind wegen $d_{ii} = 0$ kostenlos

$$x_{ii} = 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

- binäre Variable

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

- keine Subzyklen

$$\forall S \subsetneq \{1, \dots, n\}, S \neq \emptyset : \sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ij} \geq 1$$

Dieses ILP modelliert das Problem zwar korrekt, hat aber wegen der Subzyklenbedingung exponentiell viele Nebenbedingungen. Wir führen deshalb weitere Variablen $u_1, \dots, u_{n-1} \in \{1, \dots, n-1\}$ ein, die die Punkte p_i in der Reihenfolge ihres Besuchs durchnummerieren. Damit können wir die Subzyklenbedingungen in obigem ILP ersetzen durch folgende (in quadratischer Anzahl):

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1$$

(b) **Längster Weg**

Seien x_{ij} binäre Variablen, die angeben, ob die Kante zwischen i und j Teil des Weges von s nach t ist.

- Zielfunktion, maximiere Summe der Kantengewichte des Pfades

$$\max \sum_{(i,j) \in E} w_{ij} \cdot x_{ij}$$

- binäre Variable

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \forall i, j \in V$$

- Pfad beginnt in s

$$\sum_{(s,j) \in E} x_{sj} \leq 1$$

- Pfad endet in t

$$\sum_{(j,t) \in E} x_{jt} \leq 1$$

- alle anderen Knoten müssen die Pfadbedingung erfüllen

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} = \sum_{(j,i) \in E} x_{ji} \forall j \in V \setminus \{s, t\}$$

Hinweis: Nimmt die Zielfunktion den Wert 0 an, so existiert kein Pfad zwischen s und t (was durchaus möglich ist, da der Graph gerichtet und nicht notwendigerweise total-zusammenhängend ist).