Lineares Programmieren

Algorithmentechnik WS 08/09

Dorothea Wagner

Universität Karlsruhe (TH)
Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Weizenmischbrot

- Zutaten für eine Kiste Weizenmischbrot:
  - 12kg Weizenmehl
  - 8kg Wasser
- Gewinn pro Kiste: 20 Euro

Mehrkornbrot

- Zutaten für eine Kiste Mehrkornbrot
  - 6kg Weizenmehl
  - 12kg Wasser
  - 10kg Mischkornschrot
- Gewinn pro Kiste: 60 Euro

Der Bäker möchte viel Geld verdienen !

Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Weizenmischbrot

- Zutaten für eine Kiste Weizenmischbrot:
  - 12kg Weizenmehl
  - 8kg Wasser
- Gewinn pro Kiste: 20 Euro

Mehrkornbrot

- Zutaten für eine Kiste Mehrkornbrot
  - 6kg Weizenmehl
  - 12kg Wasser
  - 10kg Mischkornschrot
- Gewinn pro Kiste: 60 Euro

Der Bäker möchte viel Geld verdienen !

Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Weizenmischbrot

- Zutaten für eine Kiste Weizenmischbrot:
  - 12kg Weizenmehl
  - 8kg Wasser
- Gewinn pro Kiste: 20 Euro

Mehrkornbrot

- Zutaten für eine Kiste Mehrkornbrot
  - 6kg Weizenmehl
  - 12kg Wasser
  - 10kg Mischkornschrot
- Gewinn pro Kiste: 60 Euro

Der Bäker möchte viel Geld verdienen !

Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Schematische Darstellung

	Weizenmehl	*Wasser*	*Mischkornschrot*
Weizenmischbrot	12 kg	8 kg	0 kg
Mehrkornbrot	6 kg	12 kg	10 kg
Kontingent	630 kg	620 kg	350 kg

10 Kisten Weizenmischbrote sind für Stammkunden reserviert!

Gewinn $=$ 20Euro $\cdot$ Kisten Weizenmischbrot

$+$60Euro $\cdot$ Kisten Mehrkornbrot

Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Schematische Darstellung

	Weizenmehl	*Wasser*	*Mischkornschrot*
Weizenmischbrot	12 kg	8 kg	0 kg
Mehrkornbrot	6 kg	12 kg	10 kg
Kontingent	630 kg	620 kg	350 kg

10 Kisten Weizenmischbrote sind für Stammkunden reserviert!

Gewinn $=$ 20Euro $\cdot$ Kisten Weizenmischbrot

$+$60Euro $\cdot$ Kisten Mehrkornbrot

Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Schematische Darstellung

	Weizenmehl	*Wasser*	*Mischkornschrot*
Weizenmischbrot	12 kg	8 kg	0 kg
Mehrkornbrot	6 kg	12 kg	10 kg
Kontingent	630 kg	620 kg	350 kg

10 Kisten Weizenmischbrote sind für Stammkunden reserviert!

$$\text{Gewinn} = 20\text{Euro} \cdot \text{Kisten Weizenmischbrot}$$
$$+60\text{Euro} \cdot \text{Kisten Mehrkornbrot}$$

Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Schematische Darstellung

	Weizenmehl	*Wasser*	*Mischkornschrot*
Weizenmischbrot	12 kg	8 kg	0 kg
Mehrkornbrot	6 kg	12 kg	10 kg
Kontingent	630 kg	620 kg	350 kg

10 Kisten Weizenmischbrote sind für Stammkunden reserviert!

$$\text{Gewinn} = 20\text{Euro} \cdot \text{Kisten Weizenmischbrot}$$
$$+60\text{Euro} \cdot \text{Kisten Mehrkornbrot}$$

Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Mathematische Formulierung

Seien $x_1 =$ Kisten Weizenmischbrot, $x_2 =$ Kisten Mehrkornbrot:

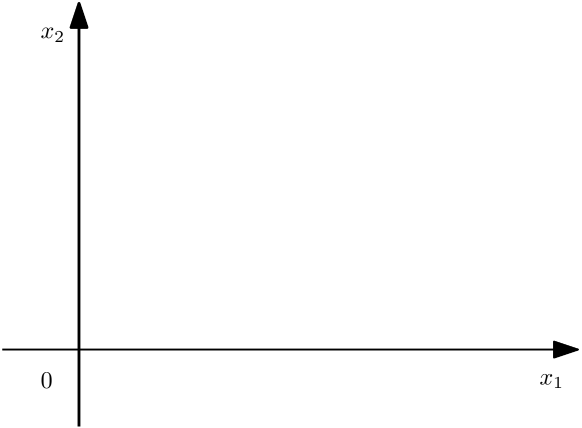
Zielfunktion **ZF:** $f(x_1, x_2) = 20x_1 + 60x_2 = \max!$

Nebenbedingungen **NB:**

$$
\begin{aligned}
12x_1 + 6\ x_2 &\leq 630 \\
8\ x_1 + 12x_2 &\leq 620 \\
10x_2 &\leq 350 \\
x_1 \qquad\quad &\geq 10 \\
x_1 \qquad\quad &\geq 0 \\
x_2 \qquad\quad &\geq 0
\end{aligned}
$$

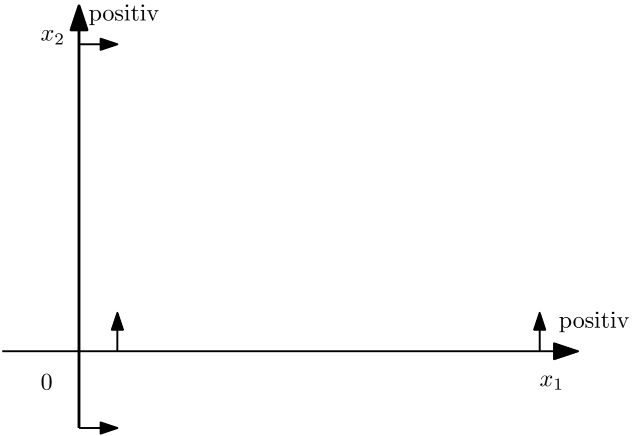
Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Graphischer Lösungsansatz



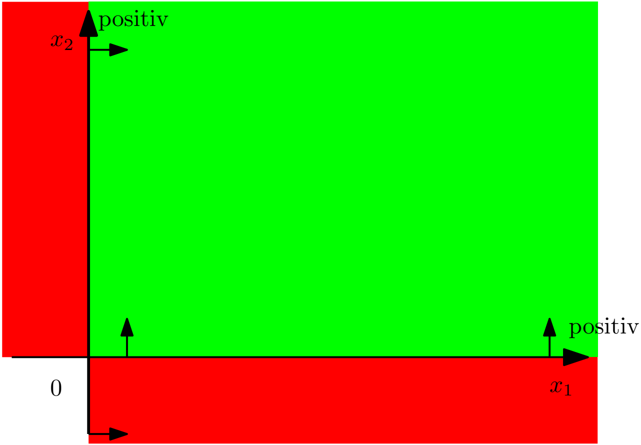
Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Graphischer Lösungsansatz



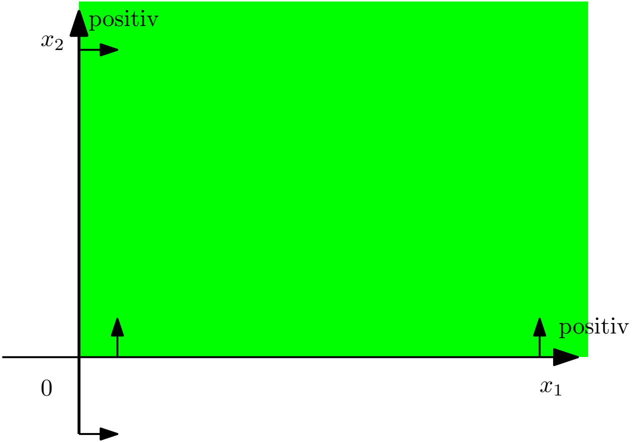
Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Graphischer Lösungsansatz



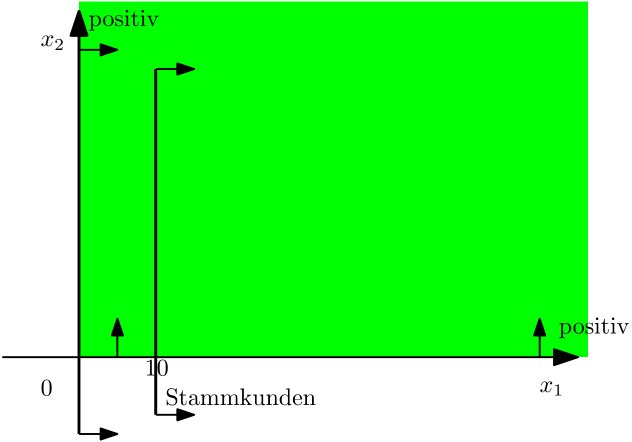
Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Graphischer Lösungsansatz



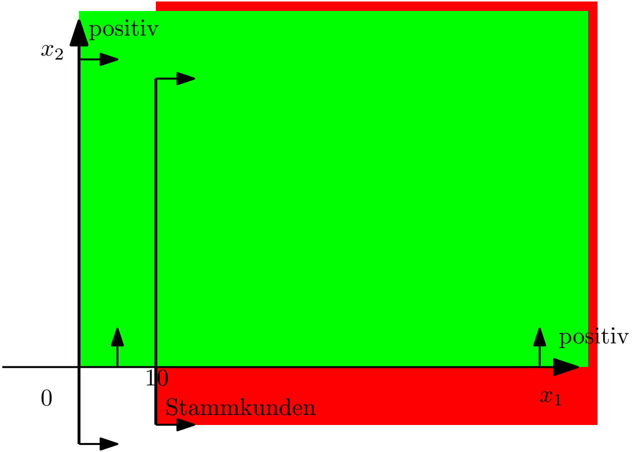
Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Graphischer Lösungsansatz



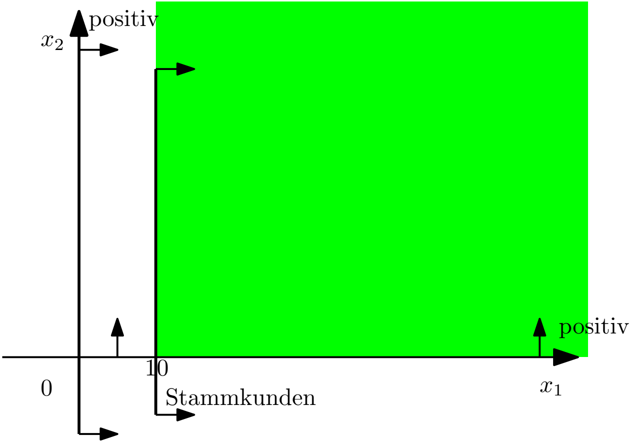
Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Graphischer Lösungsansatz



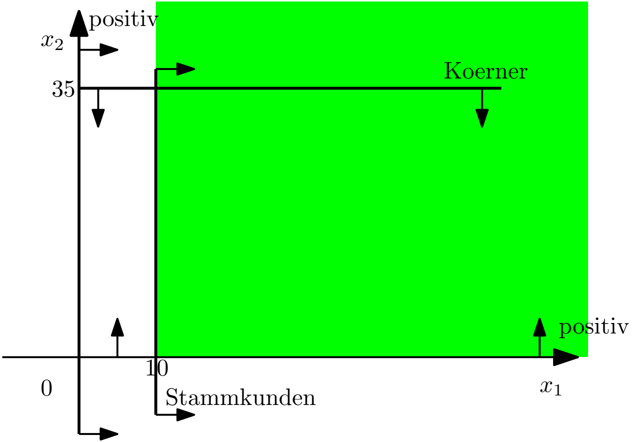
Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Graphischer Lösungsansatz



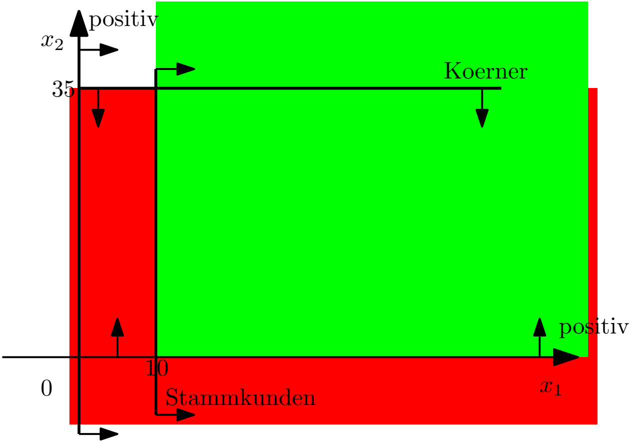
Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Graphischer Lösungsansatz



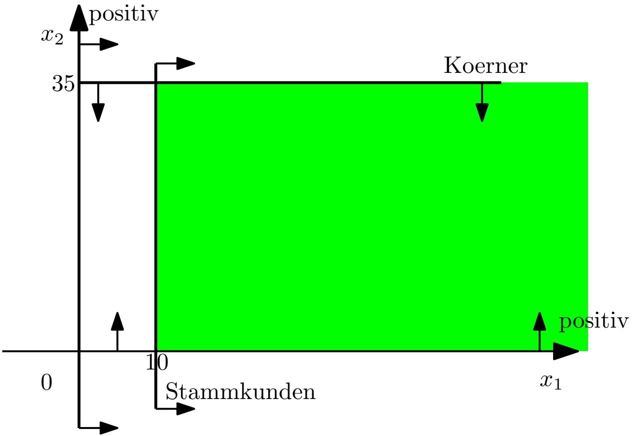
Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Graphischer Lösungsansatz



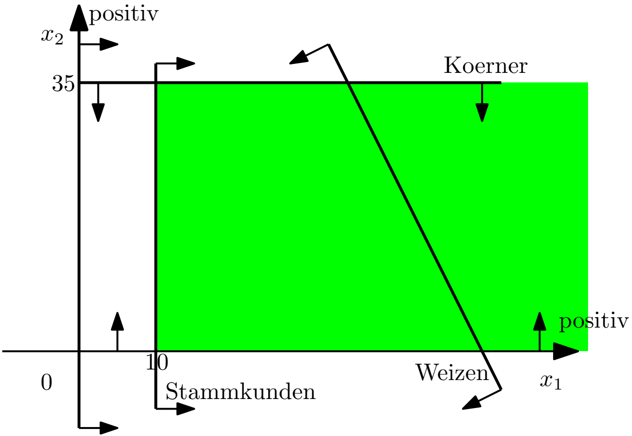
Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Graphischer Lösungsansatz



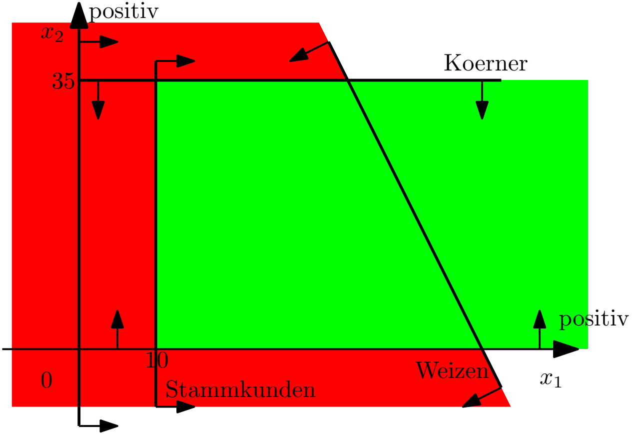
Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Graphischer Lösungsansatz



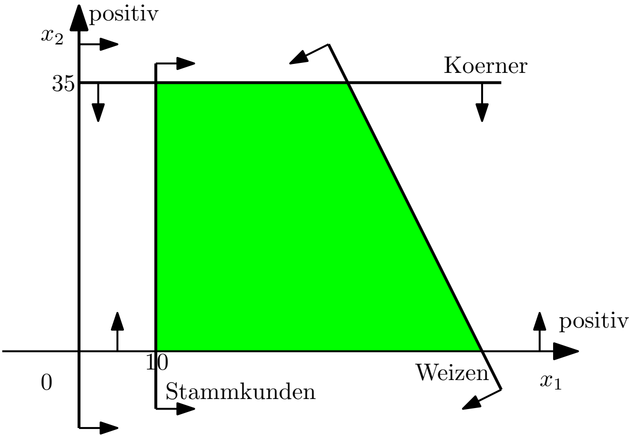
Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Graphischer Lösungsansatz



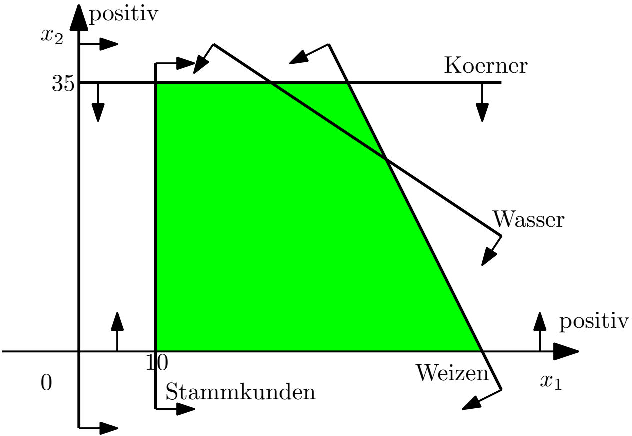
Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Graphischer Lösungsansatz



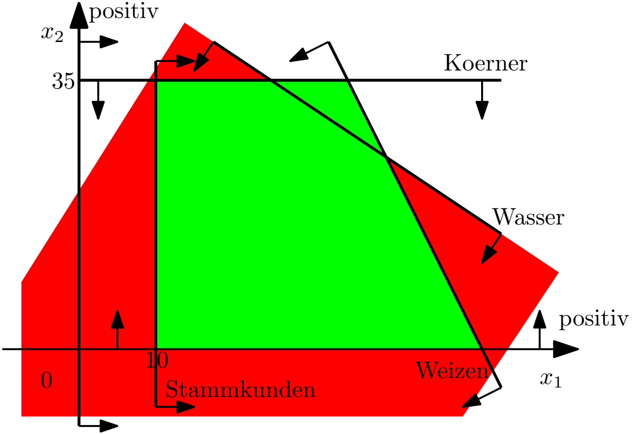
Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Graphischer Lösungsansatz



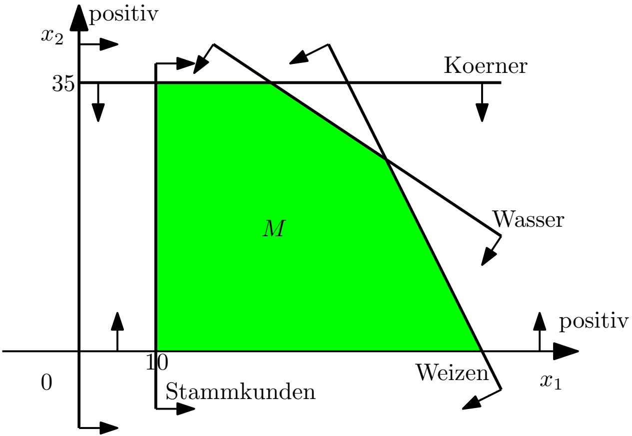
Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Graphischer Lösungsansatz



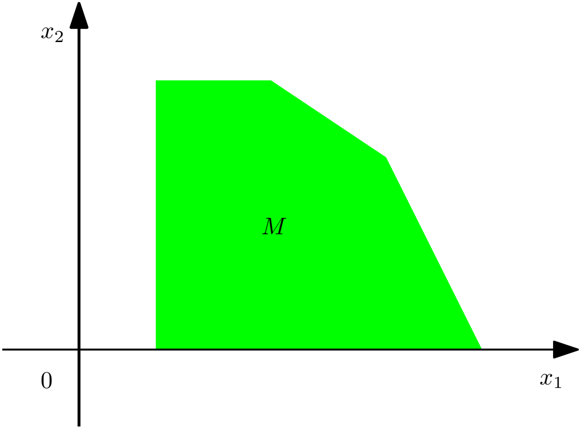
Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Graphischer Lösungsansatz



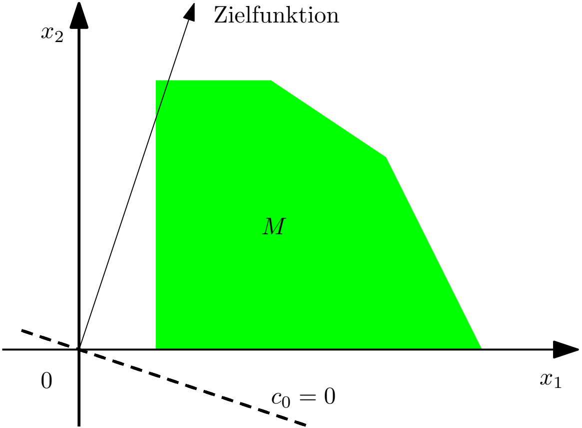
Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Graphischer Lösungsansatz



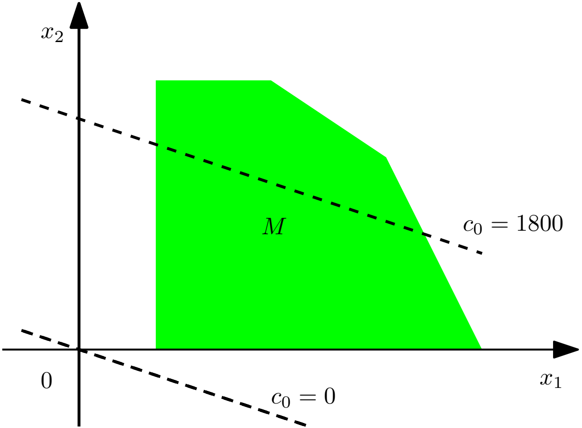
Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Graphischer Lösungsansatz



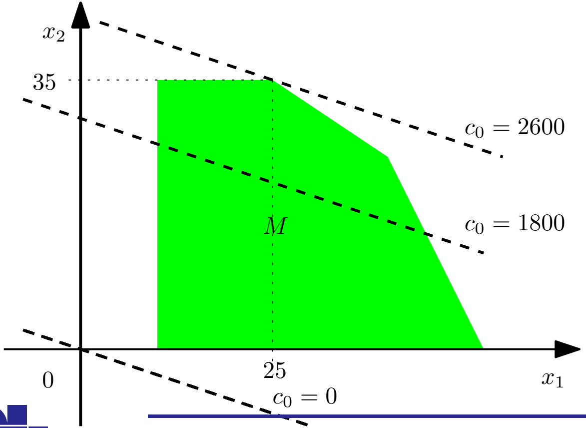
Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Graphischer Lösungsansatz



Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Graphischer Lösungsansatz



Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Systematisierung

- *Freie* Variablen $\Longrightarrow$ Differenz zweier nichtnegativer Variablen:

$$x_k = x_k^1 - x_k^2, \quad \text{mit } x_k^1 \geq 0, x_k^1 \geq 0$$

- Ungleichungsbedingungen $\Longrightarrow$ Addition (oder Subtraktion) nichtnegativer *Schlupfvariablen* $\Longrightarrow$ Gleichungsbedingungen:

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \quad & \leq b \\ \Leftrightarrow \quad & \\ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + x_{n+1} & = b, x_{n+1} \geq 0 \end{aligned}$$

Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Systematisierung

- *Freie* Variablen $\Longrightarrow$ Differenz zweier nichtnegativer Variablen:

$$x_k = x_k^1 - x_k^2, \quad \text{mit } x_k^1 \geq 0, x_k^1 \geq 0$$

- Ungleichungsbedingungen $\Longrightarrow$ Addition (oder Subtraktion) nichtnegativer *Schlupfvariablen* $\Longrightarrow$ Gleichungsbedingungen:

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \qquad &\leq b \\ \Leftrightarrow \qquad & \\ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + x_{n+1} &= b, x_{n+1} \geq 0 \end{aligned}$$

Beispiel: Einfache Bäckersrechnung

Systematische Mathematische Formulierung

Normalform der linearen Optimierungsaufgabe

$$
\begin{array}{llcl}
\textbf{ZF:} & f(\vec{x}) = 20x_1 + 60x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 & = & \text{max!} \\
\textbf{NB:} & 12x_1 + 6x_2 + x_3 & = & 630 \\
 & 8x_1 + 12x_2 + x_4 & = & 620 \\
 & 10x_2 + x_5 & = & 350 \\
 & x_1 - x_6 & = & 10
\end{array}
$$

$$x_i \geq 0$$

Normalform

…oder kanonische Form

$$\begin{array}{rlr}
\textbf{ZF:} & f(\vec{x}) = c_1 x_1 \dots c_{n-m} x_{n-m} + c_0 & = \max! \\
\textbf{NB:} & a_{1,1} x_1 + \dots + a_{1,n-m} x_{n-m} + x_{n-m+1} & = b_1 \\
 & \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots & \vdots \\
 & a_{m,1} x_m + \dots + a_{m,n-m} x_{n-m} \qquad + x_n & = b_m \\
 & x_i \geq 0 &
\end{array}$$

Begriffe

- *Zulässigkeitsbereich M*: alle Punkte, die **NB** erfüllen
- M ist *polyedrisch* i.e. endlicher Schnitt abg. Halbräume
- Ist M zusätzlich beschränkt: *Polytop*
- *Seite*: nichtleere, beschränkende Halbebene, + Schnitte
- *Extremalstrahl*: Halbgerade und 1-Seite von M
- *Ecke*: $\vec{x} \in M$ und keine Konvexkombination in M
  ($\forall \vec{x}_1 \neq \vec{x}_2 \in M : \vec{x} \neq \lambda \vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2, 0 < \lambda < 1$)
- *Basis einer Ecke*: Jeder Ecke k können m Spaltenvektoren von A zugeordnet werden
  diese korrespondieren zu den Einträgen $\neq 0$ von k
- $\vec{x}$ ist Ecke $\Leftrightarrow$ die entspr. Spalten von A sind l.u.

Begriffe

- *Zulässigkeitsbereich* M: alle Punkte, die **NB** erfüllen
- M ist *polyedrisch* i.e. endlicher Schnitt abg. Halbräume
- Ist M zusätzlich beschränkt: *Polytop*
- *Seite*: nichtleere, beschränkende Halbebene, + Schnitte
- *Extremalstrahl*: Halbgerade und 1-Seite von M
- *Ecke*: $\vec{x} \in M$ und keine Konvexkombination in M
  $(\forall \vec{x}_1 \neq \vec{x}_2 \in M : \vec{x} \neq \lambda \vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2, 0 < \lambda < 1)$
- *Basis einer Ecke*: Jeder Ecke k können m Spaltenvektoren von A zugeordnet werden
  diese korrespondieren zu den Einträgen $\neq 0$ von k
- $\vec{x}$ ist Ecke $\Leftrightarrow$ die entspr. Spalten von A sind l.u.

Begriffe

- *Zulässigkeitsbereich M*: alle Punkte, die **NB** erfüllen
- *M* ist *polyedrisch* i.e. endlicher Schnitt abg. Halbräume
- Ist *M* zusätzlich beschränkt: *Polytop*
- *Seite*: nichtleere, beschränkende Halbebene, + Schnitte
- *Extremalstrahl*: Halbgerade und 1-Seite von *M*
- *Ecke*: $\vec{x} \in M$ und keine Konvexkombination in *M*
  $(\forall \vec{x_1} \neq \vec{x_2} \in M : \vec{x} \neq \lambda \vec{x_1} + (1-\lambda)\vec{x_2}, 0 < \lambda < 1)$
- *Basis einer Ecke*: Jeder Ecke *k* können *m* Spaltenvektoren von *A* zugeordnet werden
  diese korrespondieren zu den Einträgen $\neq 0$ von *k*
- $\vec{x}$ ist Ecke $\Leftrightarrow$ die entspr. Spalten von *A* sind l.u.

Begriffe

- *Zulässigkeitsbereich M*: alle Punkte, die **NB** erfüllen
- M ist *polyedrisch* i.e. endlicher Schnitt abg. Halbräume
- Ist M zusätzlich beschränkt: *Polytop*
- *Seite*: nichtleere, beschränkende Halbebene, + Schnitte
- *Extremalstrahl*: Halbgerade und 1-Seite von M
- *Ecke*: $\vec{x} \in M$ und keine Konvexkombination in M
  $(\forall \vec{x_1} \neq \vec{x_2} \in M : \vec{x} \neq \lambda \vec{x_1} + (1 - \lambda)\vec{x_2}, 0 < \lambda < 1)$
- *Basis einer Ecke*: Jeder Ecke k können m Spaltenvektoren von A zugeordnet werden
  diese korrespondieren zu den Einträgen $\neq 0$ von k
- $\vec{x}$ ist Ecke $\Leftrightarrow$ die entspr. Spalten von A sind l.u.

Begriffe

- *Zulässigkeitsbereich M*: alle Punkte, die **NB** erfüllen
- M ist *polyedrisch* i.e. endlicher Schnitt abg. Halbräume
- Ist M zusätzlich beschränkt: *Polytop*
- *Seite*: nichtleere, beschränkende Halbebene, + Schnitte
- *Extremalstrahl*: Halbgerade und 1-Seite von M
- *Ecke*: $\vec{x} \in M$ und keine Konvexkombination in M
  $(\forall \vec{x_1} \neq \vec{x_2} \in M : \vec{x} \neq \lambda \vec{x_1} + (1-\lambda)\vec{x_2}, 0 < \lambda < 1)$
- *Basis einer Ecke*: Jeder Ecke k können m Spaltenvektoren von A zugeordnet werden
  diese korrespondieren zu den Einträgen $\neq 0$ von k
- $\vec{x}$ ist Ecke $\Leftrightarrow$ die entspr. Spalten von A sind l.u.

Begriffe

- *Zulässigkeitsbereich M*: alle Punkte, die **NB** erfüllen
- *M* ist *polyedrisch* i.e. endlicher Schnitt abg. Halbräume
- Ist *M* zusätzlich beschränkt: *Polytop*
- *Seite*: nichtleere, beschränkende Halbebene, + Schnitte
- *Extremalstrahl*: Halbgerade und 1-Seite von *M*
- *Ecke*: $\vec{x} \in M$ und keine Konvexkombination in *M*
  $(\forall \vec{x_1} \neq \vec{x_2} \in M : \vec{x} \neq \lambda \vec{x_1} + (1 - \lambda)\vec{x_2}, 0 < \lambda < 1)$
- *Basis einer Ecke*: Jeder Ecke *k* können *m* Spaltenvektoren von *A* zugeordnet werden
  diese korrespondieren zu den Einträgen $\neq 0$ von *k*
- $\vec{x}$ ist Ecke $\Leftrightarrow$ die entspr. Spalten von *A* sind l.u.

Begriffe

- *Zulässigkeitsbereich M*: alle Punkte, die **NB** erfüllen
- M ist *polyedrisch* i.e. endlicher Schnitt abg. Halbräume
- Ist M zusätzlich beschränkt: *Polytop*
- *Seite*: nichtleere, beschränkende Halbebene, + Schnitte
- *Extremalstrahl*: Halbgerade und 1-Seite von M
- *Ecke*: $\vec{x} \in M$ und keine Konvexkombination in M
  $(\forall \vec{x_1} \neq \vec{x_2} \in M : \vec{x} \neq \lambda \vec{x_1} + (1 - \lambda)\vec{x_2}, 0 < \lambda < 1)$
- *Basis einer Ecke*: Jeder Ecke k können m Spaltenvektoren von A zugeordnet werden
  diese korrespondieren zu den Einträgen $\neq 0$ von k
- $\vec{x}$ ist Ecke $\Leftrightarrow$ die entspr. Spalten von A sind l.u.

Begriffe

- *Zulässigkeitsbereich M*: alle Punkte, die **NB** erfüllen
- M ist *polyedrisch* i.e. endlicher Schnitt abg. Halbräume
- Ist M zusätzlich beschränkt: *Polytop*
- *Seite*: nichtleere, beschränkende Halbebene, + Schnitte
- *Extremalstrahl*: Halbgerade und 1-Seite von M
- *Ecke*: $\vec{x} \in M$ und keine Konvexkombination in M
  $(\forall \vec{x_1} \neq \vec{x_2} \in M : \vec{x} \neq \lambda \vec{x_1} + (1 - \lambda)\vec{x_2}, 0 < \lambda < 1)$
- *Basis einer Ecke*: Jeder Ecke k können m Spaltenvektoren von A zugeordnet werden
  diese korrespondieren zu den Einträgen $\neq 0$ von k
- $\vec{x}$ ist Ecke $\Leftrightarrow$ die entspr. Spalten von A sind l.u.

Lösbarkeit von Linearen Programmen

(LP)
$$\boxed{\begin{aligned} &f(x) =< x, p >= \text{max!} \\ &Ax \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}}$$

$$M = \{Ax \leq b, x \geq 0\}$$

Unlösbar falls:

- $M = \emptyset$
- $\sup_{x \in M} f(x) = \infty$

Sei $M \neq \emptyset$ und f auf M nach oben beschränkt $\Rightarrow$

- LP ist lösbar
- Menge der Lösungen ist eine ℓ-Seite
- mind. eine Ecke ist Lösung

Lösbarkeit von Linearen Programmen

(LP)
$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = \langle x, p \rangle = \max! \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}}$$

$$M = \{Ax \leq b, x \geq 0\}$$

Unlösbar falls:

- $M = \emptyset$
- $\sup_{x \in M} f(x) = \infty$

Sei $M \neq \emptyset$ und f auf M nach oben beschränkt $\Rightarrow$

- LP ist lösbar
- Menge der Lösungen ist eine ℓ-Seite
- mind. eine Ecke ist Lösung

Lösbarkeit von Linearen Programmen

(LP)
$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) =< x, p >= \max! \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}}$$

$$M = \{Ax \leq b, x \geq 0\}$$

Unlösbar falls:

- $M = \emptyset$
- $\sup_{x \in M} f(x) = \infty$

Sei $M \neq \emptyset$ und f auf M nach oben beschränkt $\Rightarrow$

- LP ist lösbar
- Menge der Lösungen ist eine ℓ-Seite
- mind. eine Ecke ist Lösung

Lösbarkeit von Linearen Programmen

(LP) $\boxed{\begin{array}{l} f(x) = < x, p > = \max! \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}}$

$$M = \{Ax \leq b, x \geq 0\}$$

Unlösbar falls:

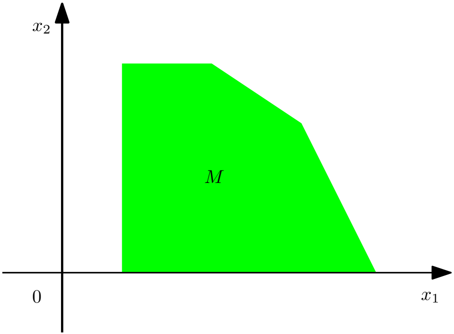
- $M = \emptyset$
- $\sup_{x \in M} f(x) = \infty$

Sei $M \neq \emptyset$ und f auf M nach oben beschränkt $\Rightarrow$

- LP ist lösbar
- Menge der Lösungen ist eine ℓ-Seite
- mind. eine Ecke ist Lösung

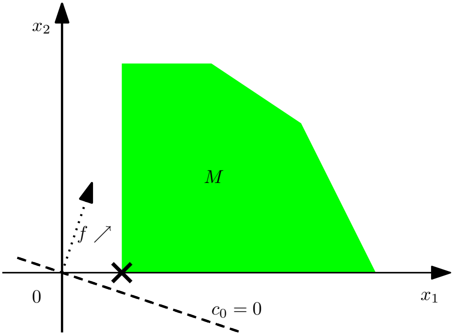
Anschauliche Idee

- Bekannt: Mindestens eine Ecke ist Lösung.
- Beliebige Startecke x.
- Suche Nachbarecke $\overline{x}$ mit $f(\overline{x}) > f(x)$.
- Bis man keine mehr findet ⇒ Optimum



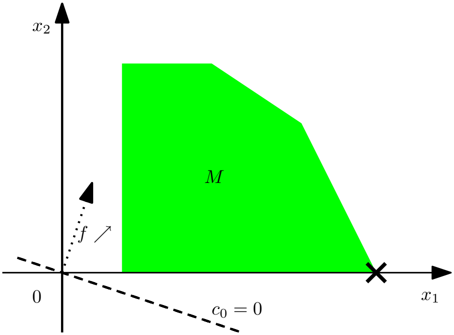
Anschauliche Idee

- Bekannt: Mindestens eine Ecke ist Lösung.
- Beliebige Startecke x.
- Suche Nachbarecke $\overline{x}$ mit $f(\overline{x}) > f(x)$.
- Bis man keine mehr findet $\Rightarrow$ Optimum



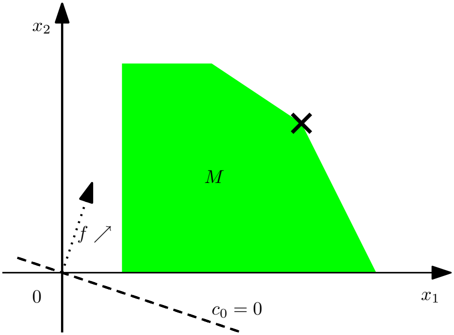
Anschauliche Idee

- Bekannt: Mindestens eine Ecke ist Lösung.
- Beliebige Startecke x.
- Suche Nachbarecke $\overline{x}$ mit $f(\overline{x}) > f(x)$.
- Bis man keine mehr findet $\Rightarrow$ Optimum



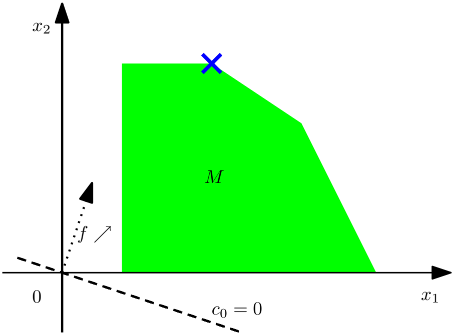
Anschauliche Idee

- Bekannt: Mindestens eine Ecke ist Lösung.
- Beliebige Startecke x.
- Suche Nachbarecke $\overline{x}$ mit $f(\overline{x}) > f(x)$.
- Bis man keine mehr findet $\Rightarrow$ Optimum



Anschauliche Idee

- Bekannt: Mindestens eine Ecke ist Lösung.
- Beliebige Startecke x.
- Suche Nachbarecke $\overline{x}$ mit $f(\overline{x}) > f(x)$.
- Bis man keine mehr findet $\Rightarrow$ Optimum



Praktische Berechnung

- Erstelle erstes *Simplextableau* mit Startecke $(\vec{0}, \vec{b})$
- Man liest am Tableau ab:
  1. Keine weitere Verbesserung ist möglich $\Rightarrow$ Optimum
  2. Es existiert eine Richtung, in der f unbeschränkt wächst $\Rightarrow$ keine Lösung
  3. Verbesserung möglich $\Rightarrow$ weiter
- Gauss-artige Umwandlung des Tableaus um gefundenes Pivotelement
- Nochmal!

Praktische Berechnung

- Erstelle erstes *Simplextableau* mit Startecke $(\vec{0}, \vec{b})$
- Man liest am Tableau ab:
  1. Keine weitere Verbesserung ist möglich $\Rightarrow$ Optimum
  2. Es existiert eine Richtung, in der f unbeschränkt wächst $\Rightarrow$ keine Lösung
  3. Verbesserung möglich $\Rightarrow$ weiter
- Gauss-artige Umwandlung des Tableaus um gefundenes Pivotelement
- Nochmal!

Praktische Berechnung

- Erstelle erstes *Simplextableau* mit Startecke $(\vec{0}, \vec{b})$
- Man liest am Tableau ab:
  1. Keine weitere Verbesserung ist möglich $\Rightarrow$ Optimum
  2. Es existiert eine Richtung, in der f unbeschränkt wächst $\Rightarrow$ keine Lösung
  3. Verbesserung möglich $\Rightarrow$ weiter
- Gauss-artige Umwandlung des Tableaus um gefundenes Pivotelement
- Nochmal!

Praktische Berechnung

- Erstelle erstes *Simplextableau* mit Startecke $(\vec{0}, \vec{b})$
- Man liest am Tableau ab:
  1. Keine weitere Verbesserung ist möglich $\Rightarrow$ Optimum
  2. Es existiert eine Richtung, in der f unbeschränkt wächst $\Rightarrow$ keine Lösung
  3. Verbesserung möglich $\Rightarrow$ weiter
- Gauss-artige Umwandlung des Tableaus um gefundenes Pivotelement
- Nochmal!

Praktische Berechnung

- Erstelle erstes *Simplextableau* mit Startecke $(\vec{0}, \vec{b})$
- Man liest am Tableau ab:
  1. Keine weitere Verbesserung ist möglich $\Rightarrow$ Optimum
  2. Es existiert eine Richtung, in der f unbeschränkt wächst $\Rightarrow$ keine Lösung
  3. Verbesserung möglich $\Rightarrow$ weiter
- Gauss-artige Umwandlung des Tableaus um gefundenes Pivotelement
- Nochmal!

Praktische Berechnung

- Erstelle erstes *Simplextableau* mit Startecke $(\vec{0}, \vec{b})$
- Man liest am Tableau ab:
  1. Keine weitere Verbesserung ist möglich $\Rightarrow$ Optimum
  2. Es existiert eine Richtung, in der f unbeschränkt wächst $\Rightarrow$ keine Lösung
  3. Verbesserung möglich $\Rightarrow$ weiter
- Gauss-artige Umwandlung des Tableaus um gefundenes Pivotelement
- Nochmal!

Praktische Berechnung

- Erstelle erstes *Simplextableau* mit Startecke $(\vec{0}, \vec{b})$
- Man liest am Tableau ab:
  1. Keine weitere Verbesserung ist möglich $\Rightarrow$ Optimum
  2. Es existiert eine Richtung, in der f unbeschränkt wächst $\Rightarrow$ keine Lösung
  3. Verbesserung möglich $\Rightarrow$ weiter
- Gauss-artige Umwandlung des Tableaus um gefundenes Pivotelement
- Nochmal!

Probleme bei praktischen Berechnung

- Keine Startecke bekannt. Einführung von (u.U. vielen) Hilfsvariablen, Herausarbeiten der Hilfsvariablen, $\Rightarrow$ Startecke; Nordwestecken-Regel; Vogelsche Approximationsmethode...
- Entartete Ecken.
- Langsam.

Probleme bei praktischen Berechnung

- Keine Startecke bekannt. Einführung von (u.U. vielen) Hilfsvariablen, Herausarbeiten der Hilfsvariablen, $\Rightarrow$ Startecke; Nordwestecken-Regel; Vogelsche Approximationsmethode...
- Entartete Ecken. Störung des Systems durch $\vec{b}^1 = \vec{b} + \vec{\varepsilon}$
- Langsam.

Probleme bei praktischen Berechnung

- Keine Startecke bekannt. Einführung von (u.U. vielen) Hilfsvariablen, Herausarbeiten der Hilfsvariablen, $\Rightarrow$ Startecke; Nordwestecken-Regel; Vogelsche Approximationsmethode...
- Entartete Ecken. Störung des Systems durch $\vec{b}^1 = \vec{b} + \vec{\varepsilon}$
- Langsam.

Probleme bei praktischen Berechnung

- Keine Startecke bekannt. Einführung von (u.U. vielen) Hilfsvariablen, Herausarbeiten der Hilfsvariablen, $\Rightarrow$ Startecke; Nordwestecken-Regel; Vogelsche Approximationsmethode...
- Entartete Ecken. Störung des Systems durch $\vec{b}^1 = \vec{b} + \vec{\varepsilon}$
- Langsam. Verschiedene Suchmethoden beim Eckenwechsel (Pivotsuche)

Probleme bei praktischen Berechnung

- Keine Startecke bekannt. Einführung von (u.U. vielen) Hilfsvariablen, Herausarbeiten der Hilfsvariablen, $\Rightarrow$ Startecke; Nordwestecken-Regel; Vogelsche Approximationsmethode...
- Entartete Ecken. Störung des Systems durch $\vec{b}^1 = \vec{b} + \vec{\varepsilon}$
- Langsam. Verschiedene Suchmethoden beim Eckenwechsel (Pivotsuche)

Probleme bei praktischen Berechnung

- ≫ Keine Startecke bekannt. Einführung von (u.U. vielen) Hilfsvariablen, Herausarbeiten der Hilfsvariablen, $\Rightarrow$ Startecke; Nordwestecken-Regel; Vogelsche Approximationsmethode...
- ≫ Entartete Ecken. Störung des Systems durch $\vec{b}^1 = \vec{b} + \vec{\varepsilon}$
- ≫ Langsam. Verschiedene Suchmethoden beim Eckenwechsel (Pivotsuche)

Anwendung von LPs

...und somit des Simplex Algorithmus

- Flussprobleme
- Zuordnungsprobleme
- Transportprobleme
- Rundreiseprobleme
- Optimale Strategien bei Spielen
- Layout-Probleme (Graphentheorie)
- ...
- Signifikanter Teil der weltweiten Rechenleistung für LPs! (ca. 1/3)
- Software: *CPLEX*, *XPRESS*, *LPSolve* (Java, frei)

Anwendung von LPs

...und somit des Simplex Algorithmus

- Flussprobleme
- Zuordnungsprobleme
- Transportprobleme
- Rundreiseprobleme
- Optimale Strategien bei Spielen
- Layout-Probleme (Graphentheorie)
- ...
- Signifikanter Teil der weltweiten Rechenleistung für LPs! (ca. 1/3)
- Software: *CPLEX*, *XPRESS*, *LPSolve* (Java, frei)

Anwendung von LPs

...und somit des Simplex Algorithmus

- Flussprobleme
- Zuordnungsprobleme
- Transportprobleme
- Rundreiseprobleme
- Optimale Strategien bei Spielen
- Layout-Probleme (Graphentheorie)
- ...
- Signifikanter Teil der weltweiten Rechenleistung für LPs! (ca. 1/3)
- Software: *CPLEX*, *XPRESS*, *LPSolve* (Java, frei)

Anwendung von LPs

...und somit des Simplex Algorithmus

- Flussprobleme
- Zuordnungsprobleme
- Transportprobleme
- Rundreiseprobleme
- Optimale Strategien bei Spielen
- Layout-Probleme (Graphentheorie)
- ...
- Signifikanter Teil der weltweiten Rechenleistung für LPs! (ca. $1/3$)
- Software: *CPLEX*, *XPRESS*, *LPSolve* (Java, frei)

Anwendung von LPs

...und somit des Simplex Algorithmus

- Flussprobleme
- Zuordnungsprobleme
- Transportprobleme
- Rundreiseprobleme
- Optimale Strategien bei Spielen
- Layout-Probleme (Graphentheorie)
- ...
- Signifikanter Teil der weltweiten Rechenleistung für LPs! (ca. $1/3$)
- Software: *CPLEX*, *XPRESS*, *LPSolve* (Java, frei)

Anwendung von LPs

...und somit des Simplex Algorithmus

- Flussprobleme
- Zuordnungsprobleme
- Transportprobleme
- Rundreiseprobleme
- Optimale Strategien bei Spielen
- Layout-Probleme (Graphentheorie)
- ...
- Signifikanter Teil der weltweiten Rechenleistung für LPs! (ca. $1/3$)
- Software: *CPLEX*, *XPRESS*, *LPSolve* (Java, frei)

Anwendung von LPs

...und somit des Simplex Algorithmus

- Flussprobleme
- Zuordnungsprobleme
- Transportprobleme
- Rundreiseprobleme
- Optimale Strategien bei Spielen
- Layout-Probleme (Graphentheorie)
- ...
- Signifikanter Teil der weltweiten Rechenleistung für LPs! (ca. $1/3$)
- Software: *CPLEX*, *XPRESS*, *LPSolve* (Java, frei)

Anwendung von LPs

...und somit des Simplex Algorithmus

- Flussprobleme
- Zuordnungsprobleme
- Transportprobleme
- Rundreiseprobleme
- Optimale Strategien bei Spielen
- Layout-Probleme (Graphentheorie)
- ...
- Signifikanter Teil der weltweiten Rechenleistung für LPs! (ca. $1/3$)
- Software: *CPLEX*, *XPRESS*, *LPSolve* (Java, frei)

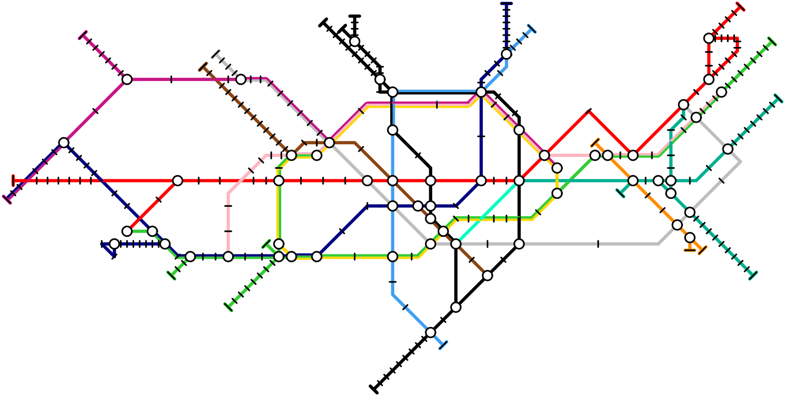
Automatisches Zeichnen von U-Bahn Plänen

Martin Nöllenburg, ITI Wagner

Das Londoner U-Bahn Netz geographisch

Automatisches Zeichnen von U-Bahn Plänen

Martin Nöllenburg, ITI Wagner



Londoner U-Bahn schematisch, oktilinear, lesbar, topologietreu
Zielffunktion (u.a.): 'Geradlinigkeit', 'Relative Positionen', und 'Kurze Gesamtkantenlänge'.

Automatisches Zeichnen von U-Bahn Plänen

Martin Nöllenburg, ITI Wagner

- $|V| = 298$ Knoten, $|E| = 340$ Kanten
- effektive Laufzeit (2.2 GHz Opteron 16GB Ram) 15 min.
- 20447 Variablen
- Ursprünglich ca. 1 Mio. Constraints
- Davon fast 1 Mio. Planarität; 11000 andere
- manuell/heuristische Reduktion auf 11000+66000
- Mit sukzessivem *Warmstart* 11089 Constraints

Automatisches Zeichnen von U-Bahn Plänen

Martin Nöllenburg, ITI Wagner

- $|V| = 298$ Knoten, $|E| = 340$ Kanten
- effektive Laufzeit (2.2 GHz Opteron 16GB Ram) 15 min.
- 20447 Variablen
- Ursprünglich ca. 1 Mio. Constraints
- Davon fast 1 Mio. Planarität; 11000 andere
- manuell/heuristische Reduktion auf 11000+66000
- Mit sukzessivem *Warmstart* 11089 Constraints

Automatisches Zeichnen von U-Bahn Plänen

Martin Nöllenburg, ITI Wagner

- $|V| = 298$ Knoten, $|E| = 340$ Kanten
- effektive Laufzeit (2.2 GHz Opteron 16GB Ram) 15 min.
- 20447 Variablen
- Ursprünglich ca. 1 Mio. Constraints
- Davon fast 1 Mio. Planarität; 11000 andere
- manuell/heuristische Reduktion auf 11000+66000
- Mit sukzessivem *Warmstart* 11089 Constraints

Automatisches Zeichnen von U-Bahn Plänen

Martin Nöllenburg, ITI Wagner

- $|V| = 298$ Knoten, $|E| = 340$ Kanten
- effektive Laufzeit (2.2 GHz Opteron 16GB Ram) 15 min.
- 20447 Variablen
- Ursprünglich ca. 1 Mio. Constraints
- Davon fast 1 Mio. Planarität; 11000 andere
- manuell/heuristische Reduktion auf 11000+66000
- Mit sukzessivem *Warmstart* 11089 Constraints

Automatisches Zeichnen von U-Bahn Plänen

Martin Nöllenburg, ITI Wagner

- $|V| = 298$ Knoten, $|E| = 340$ Kanten
- effektive Laufzeit (2.2 GHz Opteron 16GB Ram) 15 min.
- 20447 Variablen
- Ursprünglich ca. 1 Mio. Constraints
- Davon fast 1 Mio. Planarität; 11000 andere
- manuell/heuristische Reduktion auf 11000+66000
- Mit sukzessivem *Warmstart* 11089 Constraints

Automatisches Zeichnen von U-Bahn Plänen

Martin Nöllenburg, ITI Wagner

- $|V| = 298$ Knoten, $|E| = 340$ Kanten
- effektive Laufzeit (2.2 GHz Opteron 16GB Ram) 15 min.
- 20447 Variablen
- Ursprünglich ca. 1 Mio. Constraints
- Davon fast 1 Mio. Planarität; 11000 andere
- manuell/heuristische Reduktion auf 11000+66000
- Mit sukzessivem *Warmstart* 11089 Constraints

Automatisches Zeichnen von U-Bahn Plänen

Martin Nöllenburg, ITI Wagner

- $|V| = 298$ Knoten, $|E| = 340$ Kanten
- effektive Laufzeit (2.2 GHz Opteron 16GB Ram) 15 min.
- 20447 Variablen
- Ursprünglich ca. 1 Mio. Constraints
- Davon fast 1 Mio. Planarität; 11000 andere
- manuell/heuristische Reduktion auf 11000+66000
- Mit sukzessivem *Warmstart* 11089 Constraints

Laufzeiten des Simplex

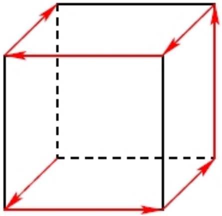
- Zunächst: exponentiell
- ∃ ähnliche Beispiele für die meisten Varianten
- ∃ Varianten: exponentielle Instanz unbekannt
- ⇒ Nicht bekannt ob Simplex polynomial ist
- Durchschnittlich: $2m$-$3m$ Schritte (m = #Gleichungen)

Laufzeiten des Simplex

- Zunächst: exponentiell
- ∃ ähnliche Beispiele für die meisten Varianten
- ∃ Varianten: exponentielle Instanz unbekannt
- ⇒ Nicht bekannt ob Simplex polynomial ist
- Durchschnittlich: $2m$-$3m$ Schritte ($m = \#$Gleichungen)

Laufzeiten des Simplex

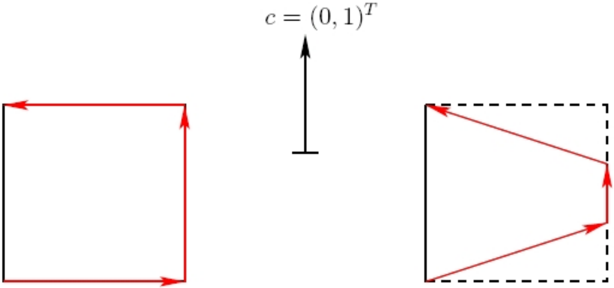
- Zunächst: exponentiell



- ∃ ähnliche Beispiele für die meisten Varianten
- ∃ Varianten: exponentielle Instanz unbekannt
- ⇒ Nicht bekannt ob Simplex polynomial ist
- Durchschnittlich: $2m$-$3m$ Schritte (m = #Gleichungen)

Laufzeiten des Simplex

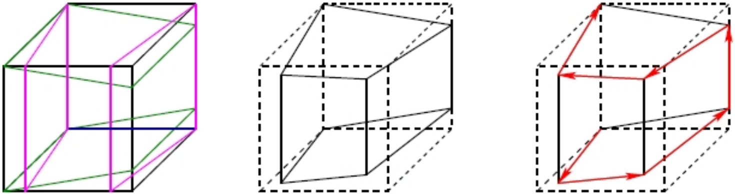
- Zunächst: exponentiell



- ∃ ähnliche Beispiele für die meisten Varianten
- ∃ Varianten: exponentielle Instanz unbekannt
- ⇒ Nicht bekannt ob Simplex polynomial ist
- Durchschnittlich: $2m$-$3m$ Schritte (m = #Gleichungen)

Laufzeiten des Simplex

- Zunächst: exponentiell



(Klee-Minty-Polyeder)

- ∃ ähnliche Beispiele für die meisten Varianten
- ∃ Varianten: exponentielle Instanz unbekannt
- ⇒ Nicht bekannt ob Simplex polynomial ist
- Durchschnittlich: $2m$-$3m$ Schritte (m = #Gleichungen)

Laufzeiten des Simplex

- Zunächst: exponentiell

- $\exists$ ähnliche Beispiele für die meisten Varianten
- $\exists$ Varianten: exponentielle Instanz unbekannt
- $\Rightarrow$ Nicht bekannt ob Simplex polynomial ist
- Durchschnittlich: $2m$-$3m$ Schritte (m = #Gleichungen)

Laufzeiten des Simplex

- Zunächst: exponentiell

- $\exists$ ähnliche Beispiele für die meisten Varianten
- $\exists$ Varianten: exponentielle Instanz unbekannt
- $\Rightarrow$ Nicht bekannt ob Simplex polynomial ist
- Durchschnittlich: $2m$-$3m$ Schritte (m = #Gleichungen)

Laufzeiten des Simplex

- Zunächst: exponentiell

- $\exists$ ähnliche Beispiele für die meisten Varianten
- $\exists$ Varianten: exponentielle Instanz unbekannt
- $\Rightarrow$ Nicht bekannt ob Simplex polynomial ist
- Durchschnittlich: $2m$-$3m$ Schritte (m = #Gleichungen)

Laufzeiten des Simplex

- Zunächst: exponentiell

- $\exists$ ähnliche Beispiele für die meisten Varianten
- $\exists$ Varianten: exponentielle Instanz unbekannt
- $\Rightarrow$ Nicht bekannt ob Simplex polynomial ist
- Durchschnittlich: $2m$-$3m$ Schritte ($m = $ #Gleichungen)

Alternativen zum Simplex

Theorem (Khachian 1979)

LP können in polynomialer Zeit gelöst werden.

- K. zeigte, dass der von Shor 1977 vorgestellte *Ellipsoid-Algorithmus* polynomiale Laufzeit hat.
- Realität: dramatisch langsamer.
- N. Karmakar (1984): Anderer (nicht SA-basierter) polynomialer Algorithmus für LP: *innere-Punkt-Methode*.
- Innerer-Punkt-Algorithmus praktisch konkurrenzfähig mit Simplex

Alternativen zum Simplex

Theorem (Khachian 1979)

LP können in polynomialer Zeit gelöst werden.

- K. zeigte, dass der von Shor 1977 vorgestellte *Ellipsoid-Algorithmus* polynomiale Laufzeit hat.
- Realität: dramatisch langsamer.
- N. Karmakar (1984): Anderer (nicht SA-basierter) polynomialer Algorithmus für LP: *innere-Punkt-Methode*.
- Innerer-Punkt-Algorithmus praktisch konkurrenzfähig mit Simplex

Alternativen zum Simplex

Theorem (Khachian 1979)

LP können in polynomialer Zeit gelöst werden.

- K. zeigte, dass der von Shor 1977 vorgestellte *Ellipsoid-Algorithmus* polynomiale Laufzeit hat.
- Realität: dramatisch langsamer.
- N. Karmakar (1984): Anderer (nicht SA-basierter) polynomialer Algorithmus für LP: *innere-Punkt-Methode*.
- Innerer-Punkt-Algorithmus praktisch konkurrenzfähig mit Simplex

Alternativen zum Simplex

Theorem (Khachian 1979)

LP können in polynomialer Zeit gelöst werden.

- K. zeigte, dass der von Shor 1977 vorgestellte *Ellipsoid-Algorithmus* polynomiale Laufzeit hat.
- Realität: dramatisch langsamer.
- N. Karmakar (1984): Anderer (nicht SA-basierter) polynomialer Algorithmus für LP: *innere-Punkt-Methode*.
- Innerer-Punkt-Algorithmus praktisch konkurrenzfähig mit Simplex

Alternativen zum Simplex

Theorem (Khachian 1979)

LP können in polynomialer Zeit gelöst werden.

- K. zeigte, dass der von Shor 1977 vorgestellte *Ellipsoid-Algorithmus* polynomiale Laufzeit hat.
- Realität: dramatisch langsamer.
- N. Karmakar (1984): Anderer (nicht SA-basierter) polynomialer Algorithmus für LP: *innere-Punkt-Methode*.
- Innerer-Punkt-Algorithmus praktisch konkurrenzfähig mit Simplex

Lemma von Farkas

Lemma (Farkas)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:

1. $Ax = b, x \geq 0$ *ist lösbar durch ein* $x \in \mathbb{R}^n$
2. $A^T y \leq 0, b^T y > 0$ *ist lösbar durch ein* $y \in \mathbb{R}^m$

Proof.

1. 1 und 2 $\Rightarrow 0 < y^T b = y^T Ax = (A^T y)^T x \leq 0$, W.!
2. $\neg 1 \Rightarrow b \notin K := \{Ax : x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0\}$.
   K ist ein Polyeder (Weyl) $\Rightarrow K$ abgeschlossen
   $\Rightarrow$ (Trennungssatz) $\exists y \in \mathbb{R}^m, y \neq 0$, so dass
   $y^T Ax \leq 0 < y^T b, \forall x \geq 0$.
   Setze $x = e_i \Rightarrow y^T A \leq 0 \Rightarrow 2$

Lemma von Farkas

Lemma (Farkas)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:

1. $Ax = b, x \geq 0$ *ist lösbar durch ein* $x \in \mathbb{R}^n$
2. $A^T y \leq 0, b^T y > 0$ *ist lösbar durch ein* $y \in \mathbb{R}^m$

Proof.

1. 1 und 2 $\Rightarrow 0 < y^T b = y^T Ax = (A^T y)^T x \leq 0$, W.!
2. $\neg 1 \Rightarrow b \notin K := \{Ax : x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0\}$.
   K ist ein Polyeder (Weyl) $\Rightarrow K$ abgeschlossen
   $\Rightarrow$ (Trennungssatz) $\exists y \in \mathbb{R}^m, y \neq 0$, so dass
   $y^T Ax \leq 0 < y^T b, \forall x \geq 0$.
   Setze $x = e_i \Rightarrow y^T A \leq 0 \Rightarrow 2$

Lemma von Farkas

Lemma (Farkas)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:

1. $Ax = b, x \geq 0$ *ist lösbar durch ein* $x \in \mathbb{R}^n$
2. $A^T y \leq 0, b^T y > 0$ *ist lösbar durch ein* $y \in \mathbb{R}^m$

Proof.

1. 1 und 2 $\Rightarrow 0 < y^T b = y^T Ax = (A^T y)^T x \leq 0$, W.!
2. $\neg 1 \Rightarrow b \notin K := \{Ax : x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0\}$.
   K ist ein Polyeder (Weyl) $\Rightarrow K$ abgeschlossen
   $\Rightarrow$ (Trennungssatz) $\exists y \in \mathbb{R}^m, y \neq 0$, so dass
   $y^T Ax \leq 0 < y^T b, \forall x \geq 0$.
   Setze $x = e_i \Rightarrow y^T A \leq 0 \Rightarrow 2$

Lemma von Farkas

Lemma (Farkas)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:

1. $Ax = b, x \geq 0$ *ist lösbar durch ein* $x \in \mathbb{R}^n$
2. $A^T y \leq 0, b^T y > 0$ *ist lösbar durch ein* $y \in \mathbb{R}^m$

Proof.

1. 1 und 2 $\Rightarrow 0 < y^T b = y^T Ax = (A^T y)^T x \leq 0$, W.!
2. $\neg 1 \Rightarrow b \notin K := \{Ax : x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0\}$.
   K ist ein Polyeder (Weyl) $\Rightarrow K$ abgeschlossen
   $\Rightarrow$ (Trennungssatz) $\exists y \in \mathbb{R}^m, y \neq 0$, so dass
   $y^T Ax \leq 0 < y^T b, \forall x \geq 0$.
   Setze $x = e_i \Rightarrow y^T A \leq 0 \Rightarrow 2$

Lemma von Farkas

Lemma (Farkas)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:

1. $Ax = b, x \geq 0$ *ist lösbar durch ein* $x \in \mathbb{R}^n$
2. $A^T y \leq 0, b^T y > 0$ *ist lösbar durch ein* $y \in \mathbb{R}^m$

Proof.

1. 1 und 2 $\Rightarrow 0 < y^T b = y^T Ax = (A^T y)^T x \leq 0$, W.!
2. $\neg 1 \Rightarrow b \notin K := \{Ax : x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0\}$.
   K ist ein Polyeder (Weyl) $\Rightarrow K$ abgeschlossen
   $\Rightarrow$ (Trennungssatz) $\exists y \in \mathbb{R}^m, y \neq 0$, so dass
   $y^T Ax \leq 0 < y^T b, \forall x \geq 0$.
   Setze $x = e_i \Rightarrow y^T A \leq 0 \Rightarrow 2$

Lemma von Farkas

Lemma (Farkas)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:

1. $Ax = b, x \geq 0$ *ist lösbar durch ein* $x \in \mathbb{R}^n$
2. $A^T y \leq 0, b^T y > 0$ *ist lösbar durch ein* $y \in \mathbb{R}^m$

Proof.

1. 1 und 2 $\Rightarrow 0 < y^T b = y^T Ax = (A^T y)^T x \leq 0$, W.!
2. $\neg 1 \Rightarrow b \notin K := \{Ax : x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0\}$.
   K ist ein Polyeder (Weyl) $\Rightarrow$ K abgeschlossen
   $\Rightarrow$ (Trennungssatz) $\exists y \in \mathbb{R}^m, y \neq 0$, so dass
   $y^T Ax \leq 0 < y^T b, \forall x \geq 0$.
   Setze $x = e_i \Rightarrow y^T A \leq 0 \Rightarrow 2$

Dualität

Primalprogramm PP vs. Dualprogramm DP

(PP)

$$\boxed{\begin{aligned} & f(x) = x^T c = \max! \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}}$$

$$M = \{Ax \leq b, x \geq 0\}$$

(DP)

$$\boxed{\begin{aligned} & g(y) = y^T b = \min! \\ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}}$$

$$N = \{A^T y \geq c, y \geq 0\}$$

Dualität

Dualprogramme für andere Formen von LP

(PP)

$$f(\vec{x}) = \vec{x}_1^T \vec{p}_1 + \vec{x}_2^T \vec{p}_2 = \max!$$
$$A_{1,1}\vec{x}_1 + A_{1,2}\vec{x}_2 \leq b_1$$
$$A_{2,1}\vec{x}_1 + A_{2,2}\vec{x}_2 = b_2$$
$$\vec{x}_1 \geq 0, \qquad \vec{x}_2 \text{ frei}$$

(DP)

$$f(\vec{u}) = \vec{u}_1^T \vec{b}_1 + \vec{u}_2^T \vec{b}_2 = \min!$$
$$A_{1,1}^T\vec{u}_1 + A_{1,2}^T\vec{u}_2 \leq p_1$$
$$A_{2,1}^T\vec{u}_1 + A_{2,2}^T\vec{u}_2 = p_2$$
$$\vec{u}_1 \geq 0, \qquad \vec{u}_2 \text{ frei}$$

Dualitätssätze

Theorem

Seien **(PP)** *und* **(DP)** *gegeben.*

1. *Schwacher Dualitätssatz:*
    1. $x \in M, u \in N \Rightarrow f(x) \leq g(u)$.
    2. $\exists x \in M, u \in N \Rightarrow$ **(PP)** *und* **(DP)** *lösbar.*
    3. $x_0 \in M, u_0 \in N, f(x) = g(u) \Rightarrow x_0, u_0$ *sind Lösungen.*
2. *Starker Dualitätssatz:*

Dualitätssätze

Theorem

Seien **(PP)** *und* **(DP)** *gegeben.*

1. *Schwacher Dualitätssatz:*
   1. $x \in M, u \in N \Rightarrow f(x) \leq g(u)$.
   2. $\exists x \in M, u \in N \Rightarrow$ **(PP)** *und* **(DP)** *lösbar.*
   3. $x_0 \in M, u_0 \in N, f(x) = g(u) \Rightarrow x_0, u_0$ *sind Lösungen.*
2. *Starker Dualitätssatz:*

Dualitätssätze

Theorem

Seien **(PP)** *und* **(DP)** *gegeben.*

1. *Schwacher Dualitätssatz:*
   1. $x \in M, u \in N \Rightarrow f(x) \leq g(u)$.
   2. $\exists x \in M, u \in N \Rightarrow$ **(PP)** *und* **(DP)** *lösbar.*
   3. $x_0 \in M, u_0 \in N, f(x) = g(u) \Rightarrow x_0, u_0$ *sind Lösungen.*
2. *Starker Dualitätssatz:*
   1. **(PP)** *lösbar* $\Rightarrow$ **(DP)** *lösbar* *und:* $\max_{x \in M} f(x) = \min_{u \in N} g(u)$

Dualitätssätze

Theorem

Seien **(PP)** *und* **(DP)** *gegeben.*

1. *Schwacher Dualitätssatz:*
   1. $x \in M, u \in N \Rightarrow f(x) \leq g(u)$.
   2. $\exists x \in M, u \in N \Rightarrow$ **(PP)** *und* **(DP)** *lösbar.*
   3. $x_0 \in M, u_0 \in N, f(x) = g(u) \Rightarrow x_0, u_0$ *sind Lösungen.*
2. *Starker Dualitätssatz:*
   1. **(PP)** *lösbar* $\Rightarrow$ **(DP)** *lösbar*
      und: $\max_{x \in M} f(x) = \min_{u \in N} g(u)$
   2. **(DP)** *lösbar* $\Rightarrow$ **(PP)** *lösbar*
      und: $\max_{x \in M} f(x) = \min_{u \in N} g(u)$

Dualitätssätze

Theorem

Seien **(PP)** *und* **(DP)** *gegeben.*

1. *Schwacher Dualitätssatz:*
   1. $x \in M, u \in N \Rightarrow f(x) \leq g(u)$.
   2. $\exists x \in M, u \in N \Rightarrow$ **(PP)** *und* **(DP)** *lösbar.*
   3. $x_0 \in M, u_0 \in N, f(x) = g(u) \Rightarrow x_0, u_0$ *sind Lösungen.*
2. *Starker Dualitätssatz:*
   1. **(PP)** *lösbar* $\Rightarrow$ **(DP)** *lösbar*
      und: $\max_{x \in M} f(x) = \min_{u \in N} g(u)$
   2. **(DP)** *lösbar* $\Rightarrow$ **(PP)** *lösbar*
      und: $\max_{x \in M} f(x) = \min_{u \in N} g(u)$

Dualitätssätze

Theorem

Seien **(PP)** *und* **(DP)** *gegeben.*

1. *Schwacher Dualitätssatz:*
   1. $x \in M, u \in N \Rightarrow f(x) \leq g(u)$.
   2. $\exists x \in M, u \in N \Rightarrow$ **(PP)** *und* **(DP)** *lösbar.*
   3. $x_0 \in M, u_0 \in N, f(x) = g(u) \Rightarrow x_0, u_0$ *sind Lösungen.*
2. *Starker Dualitätssatz:*
   1. **(PP)** *lösbar* $\Rightarrow$ **(DP)** *lösbar*
      und: $\max_{x \in M} f(x) = \min_{u \in N} g(u)$
   2. **(DP)** *lösbar* $\Rightarrow$ **(PP)** *lösbar*
      und: $\max_{x \in M} f(x) = \min_{u \in N} g(u)$

Dualitätssätze

Theorem

Seien **(PP)** *und* **(DP)** *gegeben.*

1. *Schwacher Dualitätssatz:*
   1. $x \in M, u \in N \Rightarrow f(x) \leq g(u)$.
   2. $\exists x \in M, u \in N \Rightarrow$ **(PP)** *und* **(DP)** *lösbar.*
   3. $x_0 \in M, u_0 \in N, f(x) = g(u) \Rightarrow x_0, u_0$ *sind Lösungen.*
2. *Starker Dualitätssatz:*
   1. **(PP)** *lösbar* $\Rightarrow$ **(DP)** *lösbar*
      und: $\max_{x \in M} f(x) = \min_{u \in N} g(u)$
   2. **(DP)** *lösbar* $\Rightarrow$ **(PP)** *lösbar*
      und: $\max_{x \in M} f(x) = \min_{u \in N} g(u)$

Anwendungen der Dualitätssätze

- Normalform für ein duales Problem leichter zu finden
- # Restriktionen >> # Variablen ⇒ Verringerung des Rechenaufwandes im Dualen

Anwendungen der Dualitätssätze

- Normalform für ein duales Problem leichter zu finden
- # Restriktionen >> # Variablen $\Rightarrow$ Verringerung des Rechenaufwandes im Dualen

Allgemeines

- Ganzzahlige Lineare Programme (*ILP*) sind NP-schwer (Bsp.: TSP)
- *Relaxierung* ILP → LP (ohne Ganzzahligkeitsbedingung)
  Dann: Durch Runden (suboptimale) ganzzahlige Lösung finden
- Diese kann u.U. nicht existieren ($\notin M$)
- Wann kann man ILP → LP reduzieren?

Allgemeines

- Ganzzahlige Lineare Programme (*ILP*) sind NP-schwer (Bsp.: TSP)
- *Relaxierung* ILP $\rightarrow$ LP (ohne Ganzzahligkeitsbedingung)
  Dann: Durch Runden (suboptimale) ganzzahlige Lösung finden
- Diese kann u.U. nicht existieren ($\notin M$)
- Wann kann man ILP $\rightarrow$ LP reduzieren?

Allgemeines

- Ganzzahlige Lineare Programme (*ILP*) sind NP-schwer (Bsp.: TSP)
- *Relaxierung* ILP $\rightarrow$ LP (ohne Ganzzahligkeitsbedingung)
  Dann: Durch Runden (suboptimale) ganzzahlige Lösung finden
- Diese kann u.U. nicht existieren ($\notin M$)
- Wann kann man ILP $\rightarrow$ LP reduzieren?

Allgemeines

- Ganzzahlige Lineare Programme (*ILP*) sind NP-schwer (Bsp.: TSP)
- *Relaxierung* ILP $\rightarrow$ LP (ohne Ganzzahligkeitsbedingung)
  Dann: Durch Runden (suboptimale) ganzzahlige Lösung finden
- Diese kann u.U. nicht existieren ($\notin M$)
- Wann kann man ILP $\rightarrow$ LP reduzieren?

Allgemeines

- Ganzzahlige Lineare Programme (*ILP*) sind NP-schwer (Bsp.: TSP)
- *Relaxierung* ILP $\rightarrow$ LP (ohne Ganzzahligkeitsbedingung)
  Dann: Durch Runden (suboptimale) ganzzahlige Lösung finden
- Diese kann u.U. nicht existieren ($\notin M$)
- Wann kann man ILP $\rightarrow$ LP reduzieren?

Total unimodulare Matrizen

Definition

Matrix A total unimodular falls jede quadratische Submatrix Determinante aus $\{-1, 0, 1\}$ hat.

NB: Die Elemente von A sind alle aus $\{-1, 0, 1\}$

Theorem

LP: $Ax \leq b, x \geq 0$, *b ganzz., A total unimodular:*
$\Rightarrow$ *Jede Basislösung ist ganzzahlig.*

Bedeutet: ein ILP mit TUM Restriktionsmatrix $\searrow$ LP!

Total unimodulare Matrizen

Definition

Matrix A total unimodular falls jede quadratische Submatrix Determinante aus $\{-1, 0, 1\}$ hat.

NB: Die Elemente von A sind alle aus $\{-1, 0, 1\}$

Theorem

LP: $Ax \leq b, x \geq 0$, *b ganzz., A total unimodular:*
$\Rightarrow$ *Jede Basislösung ist ganzzahlig.*

Bedeutet: ein ILP mit TUM Restriktionsmatrix $\searrow$ LP!

Total unimodulare Matrizen

Definition

Matrix A total unimodular falls jede quadratische Submatrix Determinante aus $\{-1, 0, 1\}$ hat.

NB: Die Elemente von A sind alle aus $\{-1, 0, 1\}$

Theorem

LP: *$Ax \leq b, x \geq 0$, b ganzz., A total unimodular:*
$\Rightarrow$ *Jede Basislösung ist ganzzahlig.*

Bedeutet: ein ILP mit TUM Restriktionsmatrix $\searrow$ LP!

Total unimodulare Matrizen

Definition

Matrix A total unimodular falls jede quadratische Submatrix Determinante aus $\{-1, 0, 1\}$ hat.

NB: Die Elemente von A sind alle aus $\{-1, 0, 1\}$

Theorem

LP: *$Ax \leq b, x \geq 0$, b ganzz., A total unimodular:*
$\Rightarrow$ *Jede Basislösung ist ganzzahlig.*

Bedeutet: ein ILP mit TUM Restriktionsmatrix $\searrow$ LP!

Beweis des Ganzzahligkeitssatzes

1. $Ax \leq b$, $x \geq 0$, b ganzz., A TUM
2. Schlupfvariablen: $b = [A \quad I]x^I$, $x^I \in \mathbb{R}^{n+m}$
3. Lemma: A TUM $\Rightarrow [A \quad I]$
4. SA: Jede Ecke $\overline{x}$ festgelegt durch $\overline{A}\overline{x} = \overline{b}$
   $\overline{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ Submatrix von $[A \quad I]$, $\overline{x}$ hat $n \times 0$
   mit $\overline{A}$ TUM, $\det \overline{A} \in \{1, -1\}$ (nichtsingulär)
5. Cramersche Regel:
   $$\overline{x}_j = \frac{\det B^{(j)}}{\det \overline{A}}$$
   (wobei $B^{(j)}$ $\overline{A}$ ist, mit $\overline{b}$ als j. Spalte)
6. $\Rightarrow \overline{x}_j$ ist ganzzahlig.

Beweis des Ganzzahligkeitssatzes

1. $Ax \leq b, x \geq 0$, b ganzz., A TUM
2. Schlupfvariablen: $b = [A \quad I]x^I, x^I \in \mathbb{R}^{n+m}$
3. Lemma: A TUM $\Rightarrow [A \quad I]$
4. SA: Jede Ecke $\overline{x}$ festgelegt durch $\overline{A}\overline{x} = \overline{b}$
   $\overline{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ Submatrix von $[A \quad I]$, $\overline{x}$ hat $n \times 0$
   mit $\overline{A}$ TUM, $\det \overline{A} \in \{1, -1\}$ (nichtsingulär)
5. Cramersche Regel:
   $$\overline{x}_j = \frac{\det B^{(j)}}{\det \overline{A}}$$
   (wobei $B^{(j)}$ $\overline{A}$ ist, mit $\overline{b}$ als j. Spalte)
6. $\Rightarrow \overline{x}_j$ ist ganzzahlig.

Beweis des Ganzzahligkeitssatzes

1. $Ax \leq b, x \geq 0$, b ganzz., A TUM
2. Schlupfvariablen: $b = [A \quad I]x^l, x^l \in \mathbb{R}^{n+m}$
3. Lemma: A TUM $\Rightarrow [A \quad I]$
4. SA: Jede Ecke $\overline{x}$ festgelegt durch $\overline{A}\overline{x} = \overline{b}$
   $\overline{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ Submatrix von $[A \quad I]$, $\overline{x}$ hat $n \times 0$
   mit $\overline{A}$ TUM, $\det \overline{A} \in \{1, -1\}$ (nichtsingulär)
5. Cramersche Regel:
   $$\overline{x}_j = \frac{\det B^{(j)}}{\det \overline{A}}$$
   (wobei $B^{(j)}$ $\overline{A}$ ist, mit $\overline{b}$ als j. Spalte)
6. $\Rightarrow \overline{x}_j$ ist ganzzahlig.

Beweis des Ganzzahligkeitssatzes

1. $Ax \leq b, x \geq 0$, b ganzz., A TUM
2. Schlupfvariablen: $b = [A \quad I]x^I, x^I \in \mathbb{R}^{n+m}$
3. Lemma: A TUM $\Rightarrow [A \quad I]$
4. SA: Jede Ecke $\overline{x}$ festgelegt durch $\overline{A}\overline{x} = \overline{b}$
   $\overline{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ Submatrix von $[A \quad I]$, $\overline{x}$ hat $n \times 0$
   mit $\overline{A}$ TUM, $\det \overline{A} \in \{1, -1\}$ (nichtsingulär)
5. Cramersche Regel:
   $$\overline{x}_j = \frac{\det B^{(j)}}{\det \overline{A}}$$
   (wobei $B^{(j)}$ $\overline{A}$ ist, mit $\overline{b}$ als j. Spalte)
6. $\Rightarrow \overline{x}_j$ ist ganzzahlig.

Beweis des Ganzzahligkeitssatzes

1. $Ax \leq b, x \geq 0$, b ganzz., A TUM
2. Schlupfvariablen: $b = [A \quad I]x^I, x^I \in \mathbb{R}^{n+m}$
3. Lemma: A TUM $\Rightarrow [A \quad I]$
4. SA: Jede Ecke $\overline{x}$ festgelegt durch $\overline{A}\overline{x} = \overline{b}$
   $\overline{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ Submatrix von $[A \quad I]$, $\overline{x}$ hat $n \times 0$
   mit $\overline{A}$ TUM, $\det \overline{A} \in \{1, -1\}$ (nichtsingulär)
5. Cramersche Regel:
   $$\overline{x}_j = \frac{\det B^{(j)}}{\det \overline{A}}$$
   (wobei $B^{(j)}$ $\overline{A}$ ist, mit $\overline{b}$ als j. Spalte)
6. $\Rightarrow \overline{x}_j$ ist ganzzahlig.

Beweis des Ganzzahligkeitssatzes

1. $Ax \leq b, x \geq 0$, b ganzz., A TUM
2. Schlupfvariablen: $b = [A \quad I]x^I, x^I \in \mathbb{R}^{n+m}$
3. Lemma: A TUM $\Rightarrow [A \quad I]$
4. SA: Jede Ecke $\overline{x}$ festgelegt durch $\overline{A}\overline{x} = \overline{b}$
   $\overline{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ Submatrix von $[A \quad I]$, $\overline{x}$ hat $n \times 0$
   mit $\overline{A}$ TUM, $\det \overline{A} \in \{1, -1\}$ (nichtsingulär)
5. Cramersche Regel:
   $$\overline{x}_j = \frac{\det B^{(j)}}{\det \overline{A}}$$
   (wobei $B^{(j)}$ $\overline{A}$ ist, mit $\overline{b}$ als j. Spalte)
6. $\Rightarrow \overline{x}_j$ ist ganzzahlig.

Anwendungen von totaler Unimodularität

Matching

Geg.: Matching Problem im bipartiten Graph $G = (VE)$:

$$S(G) = \max\{\vec{1}^T x \mid Ax \leq \vec{1}, x \geq 0, x \quad \text{integer}\}$$

Lösung durch ein ILP ?

Anwendungen von totaler Unimodularität

Matching

Geg.: Matching Problem im bipartiten Graph $G = (VE)$:

$$S(G) = \max\{\vec{1}^T x \mid Ax \leq \vec{1}, x \geq 0, x \quad \text{integer}\}$$

Lösung durch ein ILP ?

Anwendungen von totaler Unimodularität

Ein schöner Satz

Theorem

Inizidenzmatrix A TUM $\Longleftrightarrow$ Graph bipartit

Proof.

$\Leftarrow$: Ang.: G nicht bipartit $\Rightarrow$, $\exists$ ungerader Kreis K

$\Rightarrow$ Submatrix von A bzgl. K hat Det. 2

$\Rightarrow$ Widerspruch

$\Rightarrow$: Sei G bipartit

$\Rightarrow$ per Induktion über $t \times t$ Submatrix $\square$

Anwendungen von totaler Unimodularität

Ein schöner Satz

Theorem

Inizidenzmatrix A TUM $\Longleftrightarrow$ Graph bipartit

Proof.

$\Leftarrow$: Ang.: G nicht bipartit $\Rightarrow$, $\exists$ ungerader Kreis K

$\Rightarrow$ Submatrix von A bzgl. K hat Det. 2

$\Rightarrow$ Widerspruch

$\Rightarrow$: Sei G bipartit

$\Rightarrow$ per Induktion über $t \times t$ Submatrix $\square$

Anwendungen von totaler Unimodularität

Ein schöner Satz

Theorem

Inizidenzmatrix A TUM $\Longleftrightarrow$ Graph bipartit

Proof.

$\Leftarrow$: Ang.: G nicht bipartit $\Rightarrow$, $\exists$ ungerader Kreis K

$\Rightarrow$ Submatrix von A bzgl. K hat Det. 2

$\Rightarrow$ Widerspruch

$\Rightarrow$: Sei G bipartit

$\Rightarrow$ per Induktion über $t \times t$ Submatrix $\square$

Anwendungen von totaler Unimodularität

ILP Probleme die eigentlich LP sind

- Somit ist das matching Problem als LP lösbar
- Auch Inzidenzmatritzen von gerichteten Graphen sind TUM
- Intervall-Matritzen sind TUM
- ...

Anwendungen von totaler Unimodularität

ILP Probleme die eigentlich LP sind

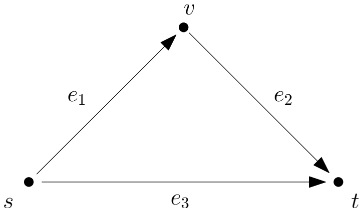
- Somit ist das matching Problem als LP lösbar
- Auch Inzidenzmatritzen von gerichteten Graphen sind TUM
- Intervall-Matritzen sind TUM
- ...

Anwendungen von totaler Unimodularität

ILP Probleme die eigentlich LP sind

- Somit ist das matching Problem als LP lösbar
- Auch Inzidenzmatritzen von gerichteten Graphen sind TUM
- Intervall-Matritzen sind TUM
- ...

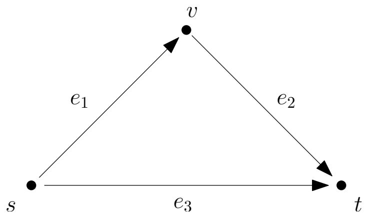
LP für den Spielzeugfluss



Kantenkapazitäten $c(e_1) := 1$, $c(e_2) := 2$ und $c(e_3) := 3$.

Stellen Sie das Lineare Programm des maximalen Flussproblems für dieses Netzwerk in der in der Vorlesung gegebenen Form auf und bringen Sie es dann in die ebenfalls in der Vorlesung definierte Standardform. Stellen Sie anschließend das zur Standardform duale lineare Programm auf.

LP für den Spielzeugfluss



Kantenkapazitäten $c(e_1) := 1$, $c(e_2) := 2$ und $c(e_3) := 3$.

Stellen Sie das Lineare Programm des maximalen Flussproblems für dieses Netzwerk in der in der Vorlesung gegebenen Form auf und bringen Sie es dann in die ebenfalls in der Vorlesung definierte Standardform. Stellen Sie anschließend das zur Standardform duale lineare Programm auf.

LP für den Spielzeugfluss

Erste Formulierung

Kantenkapzitätsbedingungen:

$$e_1 \leq 1$$
$$e_2 \leq 2$$
$$e_3 \leq 3$$

Flusserhaltungsbedingung für den Knoten v:

$$e_1 - e_2 = 0$$

Nichtnegativität der Kantenflüsse:

$$e_1 \geq 0$$
$$e_2 \geq 0$$
$$e_3 \geq 0$$

LP für den Spielzeugfluss

Erste Formulierung

Kantenkapzitätsbedingungen:

$$e_1 \leq 1$$
$$e_2 \leq 2$$
$$e_3 \leq 3$$

Flusserhaltungsbedingung für den Knoten v:

$$e_1 - e_2 = 0$$

Nichtnegativität der Kantenflüsse:

$$e_1 \geq 0$$
$$e_2 \geq 0$$
$$e_3 \geq 0$$

LP für den Spielzeugfluss

Erste Formulierung

Kantenkapzitätsbedingungen:

$$e_1 \leq 1$$
$$e_2 \leq 2$$
$$e_3 \leq 3$$

Flusserhaltungsbedingung für den Knoten v:

$$e_1 - e_2 = 0$$

Nichtnegativität der Kantenflüsse:

$$e_1 \geq 0$$
$$e_2 \geq 0$$
$$e_3 \geq 0$$

LP für den Spielzeugfluss

Erste Formulierung

Kantenkapzitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} e_1 &\leq 1 \\ e_2 &\leq 2 \\ e_3 &\leq 3 \end{aligned}$$

Flusserhaltungsbedingung für den Knoten v:

$$e_1 - e_2 = 0$$

Nichtnegativität der Kantenflüsse:

$$\begin{aligned} e_1 &\geq 0 \\ e_2 &\geq 0 \\ e_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

LP für den Spielzeugfluss

Standardform der Vorlesung

Die Bestimmung des maximalen Flusses entspricht in der Standardform aus der Vorlesung dem Minimierungsproblem

$$\min(-e_1 - e_3)$$

mit folgenden Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} e_1 - e_2 &\geq 0 & \qquad e_1 &\geq 0 \\ -e_1 + e_2 &\geq 0 & e_2 &\geq 0 \\ -\quad e_1 &\geq -1 & e_3 &\geq 0 \\ -\quad e_2 &\geq -2 & & \\ -\quad e_3 &\geq -3 & & \end{aligned}$$

LP für den Spielzeugfluss

Standardform der Vorlesung

Die Bestimmung des maximalen Flusses entspricht in der Standardform aus der Vorlesung dem Minimierungsproblem

$$\min(-e_1 - e_3)$$

mit folgenden Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} e_1 - e_2 &\geq 0 \qquad & e_1 &\geq 0 \\ -e_1 + e_2 &\geq 0 \qquad & e_2 &\geq 0 \\ -\quad e_1 &\geq -1 \qquad & e_3 &\geq 0 \\ -\quad e_2 &\geq -2 & & \\ -\quad e_3 &\geq -3 & & \end{aligned}$$

LP für den Spielzeugfluss

Primalprogramm PP vs. Dualprogramm DP

(PP)

$$f(x) = x^T p = \max!$$
$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

$$M = \{Ax \leq b, x \geq 0\}$$

(DP)

$$g(u) = u^T b = \min!$$
$$A^T u \leq p$$
$$u \geq 0$$

$$N = \{A^T u \leq p, u \geq 0\}$$

LP für den Spielzeugfluss

Primales Programm

Das primale Programm ist:

$$P: \quad \min c^T x \quad \text{unter}$$
$$Ax \geq b \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

wobei gilt:

$$x \in \mathbb{R}^3, c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 3}$$

LP für den Spielzeugfluss

Primales Programm

Das primale Programm ist:

$$P: \qquad \min c^T x \quad \text{unter}$$
$$Ax \geq b \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

wobei gilt:

$$x \in \mathbb{R}^3, c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 3}$$

LP für den Spielzeugfluss

Duales Programm

Das zugehörige duale Programm ist:

$$D: \qquad \max y^T b \quad \text{unter}$$
$$y^T A \leq c^T \quad \text{und} \quad y \geq 0$$

wobei gilt:

$$y \in \mathbb{R}^5, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5, c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 3}$$

LP für den Spielzeugfluss

Duales Programm

Das zugehörige duale Programm ist:

$$D: \quad \max y^T b \quad \text{unter}$$
$$y^T A \leq c^T \quad \text{und} \quad y \geq 0$$

wobei gilt:

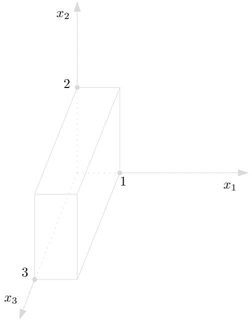
$$y \in \mathbb{R}^5, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5, c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 3}$$

LP für den Spielzeugfluss

Polytop?

Ist das Lösungspolyeder beschränkt?

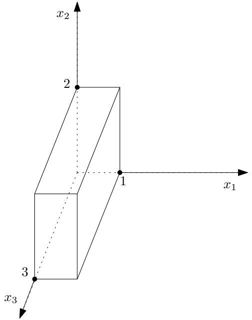
Ja, das Lösungspolyeder ist durch den Hyperquader beschränkt, der durch die Kapazitäts- und Positivitätsbedingungen bestimmt wird.



LP für den Spielzeugfluss

Polytop?

Ist das Lösungspolyeder beschränkt?
Ja, das Lösungspolyeder ist durch den Hyperquader beschränkt, der durch die Kapazitäts- und Positivitätsbedingungen bestimmt wird.



LP für den Spielzeugfluss

Graphische Darstellung

Stellen sie das durch die Kapazitätsbedingungen gegebene konvexe Polyeder graphisch dar, sowie die durch die Flusserhaltungsbedingungen gegebene Hyperebene.

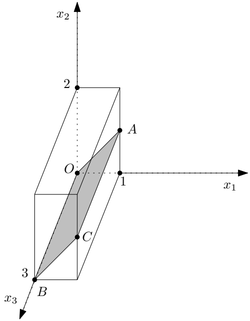


Abbildung: Graphische Darstellung des Lösungsraums in grau.

LP für den Spielzeugfluss

Simplexmethode

Führen Sie die Simplexmethode auf dem *Lösungs*-Polyeder durch!

- Verbessernden Kanten?
- $(0, A)$, $(0, B)$, wobei $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 0, 3)$
- Welchen Flusserhöhungen entsprechen diese?
- $(0, A) : f(1)+ = 1$, $f(2)+ = 1$, $f(3)+ = 0$, und
  $(0, B) : f(1)+ = 0$, $f(2)+ = 0$, $f(3)+ = 3$
- Wie heißt der Extrempunkt, der dem maximalen Fluss entspricht?
- $C = (1, 1, 3)$

LP für den Spielzeugfluss

Simplexmethode

Führen Sie die Simplexmethode auf dem *Lösungs*-Polyeder durch!

- Verbessernden Kanten?
- $(0, A)$, $(0, B)$, wobei $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 0, 3)$
- Welchen Flusserhöhungen entsprechen diese?
- $(0, A) : f(1)+ = 1$, $f(2)+ = 1$, $f(3)+ = 0$, und
  $(0, B) : f(1)+ = 0$, $f(2)+ = 0$, $f(3)+ = 3$
- Wie heißt der Extrempunkt, der dem maximalen Fluss entspricht?
- $C = (1, 1, 3)$

LP für den Spielzeugfluss

Simplexmethode

Führen Sie die Simplexmethode auf dem *Lösungs*-Polyeder durch!

- Verbessernden Kanten?
- $(0, A)$, $(0, B)$, wobei $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 0, 3)$
- Welchen Flusserhöhungen entsprechen diese?
- $(0, A) : f(1)+ = 1$, $f(2)+ = 1$, $f(3)+ = 0$, und
  $(0, B) : f(1)+ = 0$, $f(2)+ = 0$, $f(3)+ = 3$
- Wie heißt der Extrempunkt, der dem maximalen Fluss entspricht?
- $C = (1, 1, 3)$

LP für den Spielzeugfluss

Simplexmethode

Führen Sie die Simplexmethode auf dem *Lösungs*-Polyeder durch!

- Verbessernden Kanten?
- $(0, A)$, $(0, B)$, wobei $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 0, 3)$
- Welchen Flusserhöhungen entsprechen diese?
- $(0, A)$: $f(1)+ = 1$, $f(2)+ = 1$, $f(3)+ = 0$, und
  $(0, B)$: $f(1)+ = 0$, $f(2)+ = 0$, $f(3)+ = 3$
- Wie heißt der Extrempunkt, der dem maximalen Fluss entspricht?
- $C = (1, 1, 3)$

Allgemeines LP

Formulierung

Betrachten wir nun ein allgemeines Flussproblem.

$$\max \sum_{(s,i)\in E} x_{s,i} - \sum_{(i,s)\in E} x_{i,s}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\left.\begin{aligned} x_{i,j} &\le c_{i,j} \\ x_{i,j} &\ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad \forall (i,j) \in E$$

$$\sum_{i:(i,j)\in E} x_{i,j} - \sum_{i:(j,i)\in E} x_{j,i} = 0 \qquad \forall j \in V \setminus \{s,t\}$$

Allgemeines Fluss-LP

Matrix-Formulierung

In Matrixform laute dies

$$\max\ a^T x$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbb{I} \quad x &\le c \\ -\mathbb{I} \quad x &\le 0 \\ B \quad x &= 0 \ . \end{aligned}$$

Dabei sei $\mathbb{I}$ eine Einheitsmatrix und B die Matrix, die sich aus den Flusserhaltungsbedingungen ergibt.

Allgemeines Fluss-LP

Dimensionen der Bausteine

Welche Dimensionen haben a, $\mathbb{I}$ und B?

Sei $m = |E|$ und $n = |V|$. Dann gilt:

- $a \in \mathbb{R}^m$: Ein Fluss entspricht der Belegung aller Kanten $e \in E$ mit den jeweiligen Flusswerten $f(e)$.
- $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{m \times m}$: Für jede Kante gibt es eine Kapazitätsbedingung.
- $B \in \mathbb{R}^{n-2 \times m}$: Für jeden der $n-2$ Knoten aus $V \setminus \{s, t\}$ wird die Flusserhaltungsbedingung als Gleichung über die an ihm inzidenten Kanten ausgedrückt.

Allgemeines Fluss-LP

Dimensionen der Bausteine

Welche Dimensionen haben a, $\mathbb{I}$ und B?
Sei $m = |E|$ und $n = |V|$. Dann gilt:

- $a \in \mathbb{R}^m$: Ein Fluss entspricht der Belegung aller Kanten $e \in E$ mit den jeweiligen Flusswerten $f(e)$.
- $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{m \times m}$: Für jede Kante gibt es eine Kapazitätsbedingung.
- $B \in \mathbb{R}^{n-2 \times m}$: Für jeden der $n-2$ Knoten aus $V \setminus \{s, t\}$ wird die Flusserhaltungsbedingung als Gleichung über die an ihm inzidenten Kanten ausgedrückt.

Allgemeines Fluss-LP

Dimensionen der Bausteine

Welche Dimensionen haben a, $\mathbb{I}$ und B?
Sei $m = |E|$ und $n = |V|$. Dann gilt:

- $a \in \mathbb{R}^m$: Ein Fluss entspricht der Belegung aller Kanten $e \in E$ mit den jeweiligen Flusswerten $f(e)$.
- $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{m \times m}$: Für jede Kante gibt es eine Kapazitätsbedingung.
- $B \in \mathbb{R}^{n-2 \times m}$: Für jeden der $n-2$ Knoten aus $V \setminus \{s, t\}$ wird die Flusserhaltungsbedingung als Gleichung über die an ihm inzidenten Kanten ausgedrückt.

Allgemeines Fluss-LP

Dimensionen der Bausteine

Welche Dimensionen haben a, $\mathbb{I}$ und B?

Sei $m = |E|$ und $n = |V|$. Dann gilt:

- $a \in \mathbb{R}^m$: Ein Fluss entspricht der Belegung aller Kanten $e \in E$ mit den jeweiligen Flusswerten $f(e)$.
- $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{m \times m}$: Für jede Kante gibt es eine Kapazitätsbedingung.
- $B \in \mathbb{R}^{n-2 \times m}$: Für jeden der $n - 2$ Knoten aus $V \setminus \{s, t\}$ wird die Flusserhaltungsbedingung als Gleichung über die an ihm inzidenten Kanten ausgedrückt.

Allgemeines Fluss-LP

Dimensionen der Bausteine

Welche Dimensionen haben a, $\mathbb{I}$ und B?
Sei $m = |E|$ und $n = |V|$. Dann gilt:

- $a \in \mathbb{R}^m$: Ein Fluss entspricht der Belegung aller Kanten $e \in E$ mit den jeweiligen Flusswerten $f(e)$.
- $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{m \times m}$: Für jede Kante gibt es eine Kapazitätsbedingung.
- $B \in \mathbb{R}^{n-2 \times m}$: Für jeden der $n - 2$ Knoten aus $V \setminus \{s, t\}$ wird die Flusserhaltungsbedingung als Gleichung über die an ihm inzidenten Kanten ausgedrückt.

Allgemeines Fluss-LP

Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix B sind linear unabhängig.

- Unzusammenhägend? Sei Flussgraph zusammenhängend
- Sei $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ eine Linearkombination der Zeilen
- $\alpha_v \neq 0 \Rightarrow v \in S$, sonst $v \in V \setminus S$ $\qquad \Rightarrow$ Schnitt
- Zsh. $\Rightarrow \exists (u, v)$ oder $(v, u) \in E$ mit $u \in S, v \in V \setminus S$
- $u \in S \Rightarrow \alpha_u \neq 0$ und $v \in V \setminus S \Rightarrow \alpha_v = 0$.
- Betrachte im Ergebnis der LK diejenige Koordinate, die zur Kante (u, v) gehört: $LK_{(u,v)} \neq 0$
- $\Rightarrow \alpha_v = 0 \quad \forall v$
- Nur triviale Linearkombination $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ möglich
- $\Rightarrow$ **L.U.**

Allgemeines Fluss-LP

Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix B sind linear unabhängig.

- Unzusammenhägend? Sei Flussgraph zusammenhängend
- Sei $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ eine Linearkombination der Zeilen
- $\alpha_v \neq 0 \Rightarrow v \in S$, sonst $v \in V \setminus S$ $\qquad \Rightarrow$ Schnitt
- Zsh. $\Rightarrow \exists (u, v)$ oder $(v, u) \in E$ mit $u \in S, v \in V \setminus S$
- $u \in S \Rightarrow \alpha_u \neq 0$ und $v \in V \setminus S \Rightarrow \alpha_v = 0$.
- Betrachte im Ergebnis der LK diejenige Koordinate, die zur Kante (u, v) gehört: $LK_{(u,v)} \neq 0$
- $\Rightarrow \alpha_v = 0 \quad \forall v$
- Nur triviale Linearkombination $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ möglich
- $\Rightarrow$ **L.U.**

Allgemeines Fluss-LP

Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix B sind linear unabhängig.

- Unzusammenhägend? Sei Flussgraph zusammenhängend
- Sei $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ eine Linearkombination der Zeilen
- $\alpha_v \neq 0 \Rightarrow v \in S$, sonst $v \in V \setminus S$ $\quad \Rightarrow$ Schnitt
- Zsh. $\Rightarrow \exists (u, v)$ oder $(v, u) \in E$ mit $u \in S, v \in V \setminus S$
- $u \in S \Rightarrow \alpha_u \neq 0$ und $v \in V \setminus S \Rightarrow \alpha_v = 0$.
- Betrachte im Ergebnis der LK diejenige Koordinate, die zur Kante (u, v) gehört: $LK_{(u,v)} \neq 0$
- $\Rightarrow \alpha_v = 0 \quad \forall v$
- Nur triviale Linearkombination $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ möglich
- $\Rightarrow$ **L.U.**

Allgemeines Fluss-LP

Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix B sind linear unabhängig.

- Unzusammenhägend? Sei Flussgraph zusammenhängend
- Sei $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ eine Linearkombination der Zeilen
- $\alpha_v \neq 0 \Rightarrow v \in S$, sonst $v \in V \setminus S$ $\Rightarrow$ Schnitt
- Zsh. $\Rightarrow \exists (u, v)$ oder $(v, u) \in E$ mit $u \in S, v \in V \setminus S$
- $u \in S \Rightarrow \alpha_u \neq 0$ und $v \in V \setminus S \Rightarrow \alpha_v = 0$.
- Betrachte im Ergebnis der LK diejenige Koordinate, die zur Kante (u, v) gehört: $LK_{(u,v)} \neq 0$
- $\Rightarrow \alpha_v = 0 \quad \forall v$
- Nur triviale Linearkombination $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ möglich
- $\Rightarrow$ **L.U.**

Allgemeines Fluss-LP

Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix B sind linear unabhängig.

- Unzusammenhägend? Sei Flussgraph zusammenhängend
- Sei $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ eine Linearkombination der Zeilen
- $\alpha_v \neq 0 \Rightarrow v \in S$, sonst $v \in V \setminus S$ $\quad \Rightarrow$ Schnitt
- Zsh. $\Rightarrow \exists (u, v)$ oder $(v, u) \in E$ mit $u \in S, v \in V \setminus S$
- $u \in S \Rightarrow \alpha_u \neq 0$ und $v \in V \setminus S \Rightarrow \alpha_v = 0$.
- Betrachte im Ergebnis der LK diejenige Koordinate, die zur Kante (u, v) gehört: $LK_{(u,v)} \neq 0$
- $\Rightarrow \alpha_v = 0 \quad \forall v$
- Nur triviale Linearkombination $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ möglich
- $\Rightarrow$ **L.U.**

Allgemeines Fluss-LP

Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix B sind linear unabhängig.

- Unzusammenhägend? Sei Flussgraph zusammenhängend
- Sei $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ eine Linearkombination der Zeilen
- $\alpha_v \neq 0 \Rightarrow v \in S$, sonst $v \in V \setminus S$ $\quad\Rightarrow$ Schnitt
- Zsh. $\Rightarrow \exists (u, v)$ oder $(v, u) \in E$ mit $u \in S, v \in V \setminus S$
- $u \in S \Rightarrow \alpha_u \neq 0$ und $v \in V \setminus S \Rightarrow \alpha_v = 0$.
- Betrachte im Ergebnis der LK diejenige Koordinate, die zur Kante (u, v) gehört: $LK_{(u,v)} \neq 0$
- $\Rightarrow \alpha_v = 0 \quad \forall v$
- Nur triviale Linearkombination $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ möglich
- $\Rightarrow$ **L.U.**

Allgemeines Fluss-LP

Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix B sind linear unabhängig.

- Unzusammenhägend? Sei Flussgraph zusammenhängend
- Sei $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ eine Linearkombination der Zeilen
- $\alpha_v \neq 0 \Rightarrow v \in S$, sonst $v \in V \setminus S$ $\quad \Rightarrow$ Schnitt
- Zsh. $\Rightarrow \exists (u, v)$ oder $(v, u) \in E$ mit $u \in S, v \in V \setminus S$
- $u \in S \Rightarrow \alpha_u \neq 0$ und $v \in V \setminus S \Rightarrow \alpha_v = 0$.
- Betrachte im Ergebnis der LK diejenige Koordinate, die zur Kante (u, v) gehört: $LK_{(u,v)} \neq 0$
- $\Rightarrow \alpha_v = 0 \quad \forall v$
- Nur triviale Linearkombination $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ möglich
- $\Rightarrow$ **L.U.**

Allgemeines Fluss-LP

Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix B sind linear unabhängig.

- ≫ Unzusammenhägend? Sei Flussgraph zusammenhängend
- ≫ Sei $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ eine Linearkombination der Zeilen
- ≫ $\alpha_v \neq 0 \Rightarrow v \in S$, sonst $v \in V \setminus S$ $\Rightarrow$ Schnitt
- ≫ Zsh. $\Rightarrow \exists (u, v)$ oder $(v, u) \in E$ mit $u \in S, v \in V \setminus S$
- ≫ $u \in S \Rightarrow \alpha_u \neq 0$ und $v \in V \setminus S \Rightarrow \alpha_v = 0$.
- ≫ Betrachte im Ergebnis der LK diejenige Koordinate, die zur Kante (u, v) gehört: $LK_{(u,v)} \neq 0$
- ≫ $\Rightarrow \alpha_v = 0 \quad \forall v$
- ≫ Nur triviale Linearkombination $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ möglich
- ≫ $\Rightarrow$ **L.U.**

Allgemeines Fluss-LP

Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix B sind linear unabhängig.

- Unzusammenhägend? Sei Flussgraph zusammenhängend
- Sei $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ eine Linearkombination der Zeilen
- $\alpha_v \neq 0 \Rightarrow v \in S$, sonst $v \in V \setminus S$ $\Rightarrow$ Schnitt
- Zsh. $\Rightarrow \exists (u, v)$ oder $(v, u) \in E$ mit $u \in S, v \in V \setminus S$
- $u \in S \Rightarrow \alpha_u \neq 0$ und $v \in V \setminus S \Rightarrow \alpha_v = 0$.
- Betrachte im Ergebnis der LK diejenige Koordinate, die zur Kante (u, v) gehört: $LK_{(u,v)} \neq 0$
- $\Rightarrow \alpha_v = 0 \quad \forall v$
- Nur triviale Linearkombination $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ möglich
- $\Rightarrow$ **L.U.**

Allgemeines Fluss-LP

Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix B sind linear unabhängig.

- Unzusammenhägend? Sei Flussgraph zusammenhängend
- Sei $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ eine Linearkombination der Zeilen
- $\alpha_v \neq 0 \Rightarrow v \in S$, sonst $v \in V \setminus S$ $\Rightarrow$ Schnitt
- Zsh. $\Rightarrow \exists (u, v)$ oder $(v, u) \in E$ mit $u \in S, v \in V \setminus S$
- $u \in S \Rightarrow \alpha_u \neq 0$ und $v \in V \setminus S \Rightarrow \alpha_v = 0$.
- Betrachte im Ergebnis der LK diejenige Koordinate, die zur Kante (u, v) gehört: $LK_{(u,v)} \neq 0$
- $\Rightarrow \alpha_v = 0 \quad \forall v$
- Nur triviale Linearkombination $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ möglich
- $\Rightarrow$ L.U.

Allgemeines Fluss-LP

Die Inzidenzmatrix

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Zeilen der Matrix B sind linear unabhängig.

- Unzusammenhägend? Sei Flussgraph zusammenhängend
- Sei $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ eine Linearkombination der Zeilen
- $\alpha_v \neq 0 \Rightarrow v \in S$, sonst $v \in V \setminus S$ $\quad\Rightarrow$ Schnitt
- Zsh. $\Rightarrow \exists (u, v)$ oder $(v, u) \in E$ mit $u \in S, v \in V \setminus S$
- $u \in S \Rightarrow \alpha_u \neq 0$ und $v \in V \setminus S \Rightarrow \alpha_v = 0$.
- Betrachte im Ergebnis der LK diejenige Koordinate, die zur Kante (u, v) gehört: $LK_{(u,v)} \neq 0$
- $\Rightarrow \alpha_v = 0 \quad \forall v$
- Nur triviale Linearkombination $LK = \sum \alpha_i z_i = 0$ möglich
- $\Rightarrow$ **L.U.**

Allgemeines Fluss-LP

Der zulässige Bereich

Welche Dimension hat im Allgemeinen das durch die Nebenbedingungen definierte Lösungspolyeder?

- Zeile von $B \Longleftrightarrow$ Hyperebene der Dimension $m-1$ im $\mathbb{R}^m$.
- $c_i \geq 0 \Rightarrow$ Kapazitätsbedingungen-Hyperquader nichtleer (O);
- Hyperebene $\bigcap$ Hyperquader $\bigcap$ andere Hyperebenen $\neq \emptyset$ (O).
- $\exists n-2$ L.U. Hyperebenen.
- $\Rightarrow$ Dimension des Lösungspolyeder: $m-(n-2)$.

Allgemeines Fluss-LP

Der zulässige Bereich

Welche Dimension hat im Allgemeinen das durch die Nebenbedingungen definierte Lösungspolyeder?

- $\gg$ Zeile von $B \Longleftrightarrow$ Hyperebene der Dimension $m - 1$ im $\mathbb{R}^m$.
- $\gg$ $c_i \geq 0 \Rightarrow$ Kapazitätsbedingungen-Hyperquader nichtleer (O);
- $\gg$ Hyperebene $\bigcap$ Hyperquader $\bigcap$ andere Hyperebenen $\neq \emptyset$ (O).
- $\gg$ $\exists n - 2$ L.U. Hyperebenen.
- $\gg$ $\Rightarrow$ Dimension des Lösungspolyeder: $m - (n - 2)$.

Allgemeines Fluss-LP

Der zulässige Bereich

Welche Dimension hat im Allgemeinen das durch die Nebenbedingungen definierte Lösungspolyeder?

- Zeile von $B \Longleftrightarrow$ Hyperebene der Dimension $m - 1$ im $\mathbb{R}^m$.
- $c_i \geq 0 \Rightarrow$ Kapazitätsbedingungen-Hyperquader nichtleer (O);
- Hyperebene $\bigcap$ Hyperquader $\bigcap$ andere Hyperebenen $\neq \emptyset$ (O).
- $\exists n - 2$ L.U. Hyperebenen.
- $\Rightarrow$ Dimension des Lösungspolyeder: $m - (n - 2)$.

Allgemeines Fluss-LP

Der zulässige Bereich

Welche Dimension hat im Allgemeinen das durch die Nebenbedingungen definierte Lösungspolyeder?

- Zeile von $B \Longleftrightarrow$ Hyperebene der Dimension $m-1$ im $\mathbb{R}^m$.
- $c_i \geq 0 \Rightarrow$ Kapazitätsbedingungen-Hyperquader nichtleer (O);
- Hyperebene $\bigcap$ Hyperquader $\bigcap$ andere Hyperebenen $\neq \emptyset$ (O).
- $\exists n-2$ L.U. Hyperebenen.
- $\Rightarrow$ Dimension des Lösungspolyeder: $m-(n-2)$.

Allgemeines Fluss-LP

Der zulässige Bereich

Welche Dimension hat im Allgemeinen das durch die Nebenbedingungen definierte Lösungspolyeder?

- Zeile von $B \Longleftrightarrow$ Hyperebene der Dimension $m - 1$ im $\mathbb{R}^m$.
- $c_i \geq 0 \Rightarrow$ Kapazitätsbedingungen-Hyperquader nichtleer (O);
- Hyperebene $\bigcap$ Hyperquader $\bigcap$ andere Hyperebenen $\neq \emptyset$ (O).
- $\exists n - 2$ L.U. Hyperebenen.
- $\Rightarrow$ Dimension des Lösungspolyeder: $m - (n - 2)$.

Allgemeines Fluss-LP

Der zulässige Bereich

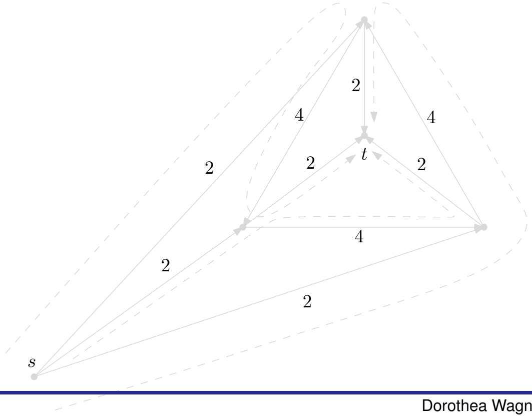
Welche Dimension hat im Allgemeinen das durch die Nebenbedingungen definierte Lösungspolyeder?

- $\gg$ Zeile von $B \Longleftrightarrow$ Hyperebene der Dimension $m-1$ im $\mathbb{R}^m$.
- $\gg$ $c_i \geq 0 \Rightarrow$ Kapazitätsbedingungen-Hyperquader nichtleer (O);
- $\gg$ Hyperebene $\bigcap$ Hyperquader $\bigcap$ andere Hyperebenen $\neq \emptyset$ (O).
- $\gg$ $\exists n-2$ L.U. Hyperebenen.
- $\gg$ $\Rightarrow$ Dimension des Lösungspolyeder: $m-(n-2)$.

Allgemeines Fluss-LP

Flusserhöhung auf s-t-Weg ⇒ Simplexschritt?

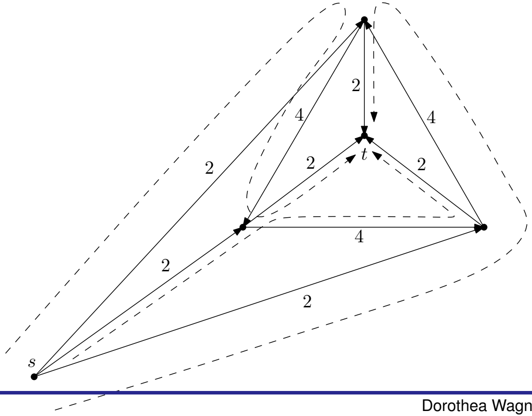
Zeigen oder widerlegen Sie: Die Erhöhung des Flusses entlang eines erhöhenden Weges entspricht einem Schritt im Simplexverfahren.



Allgemeines Fluss-LP

Flusserhöhung auf s-t-Weg ⇒ Simplexschritt?

Zeigen oder widerlegen Sie: Die Erhöhung des Flusses entlang eines erhöhenden Weges entspricht einem Schritt im Simplexverfahren.



Allgemeines Fluss-LP

Flusserhöhung auf s-t-Weg ⇒ Simplexschritt?

- Erhöhe Fluss folgendermaßen
- $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
- $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0)$
- $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- Aber: $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) =$
  $1/2 \cdot (2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2) + 1/2 \cdot (2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$
  wobei $(2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2)$, $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$ zulässig!
- ⇒ $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ keine Ecke
- ⇒ kein Simplexschritt

Allgemeines Fluss-LP

Flusserhöhung auf s-t-Weg $\Rightarrow$ Simplexschritt?

- Erhöhe Fluss folgendermaßen
- $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
- $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0)$
- $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- Aber: $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) =$
  $1/2 \cdot (2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2) + 1/2 \cdot (2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$
  wobei $(2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2)$, $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$ zulässig!
- $\Rightarrow (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ keine Ecke
- $\Rightarrow$ kein Simplexschritt

Allgemeines Fluss-LP

Flusserhöhung auf s-t-Weg $\Rightarrow$ Simplexschritt?

- Erhöhe Fluss folgendermaßen
- $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
- $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0)$
- $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- Aber: $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) =$
  $1/2 \cdot (2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2) + 1/2 \cdot (2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$
  wobei $(2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2)$, $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$ zulässig!
- $\Rightarrow$ $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ keine Ecke
- $\Rightarrow$ kein Simplexschritt

Allgemeines Fluss-LP

Flusserhöhung auf s-t-Weg ⇒ Simplexschritt?

- Erhöhe Fluss folgendermaßen
- $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
- $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0)$
- $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- Aber: $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) =$
  $1/2 \cdot (2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2) + 1/2 \cdot (2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$
  wobei $(2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2)$, $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$ zulässig!
- $\Rightarrow (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ keine Ecke
- $\Rightarrow$ kein Simplexschritt

Allgemeines Fluss-LP

Flusserhöhung auf s-t-Weg ⇒ Simplexschritt?

- Erhöhe Fluss folgendermaßen
- $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
- $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0)$
- $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- Aber: $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) = 1/2 \cdot (2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2) + 1/2 \cdot (2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$ wobei $(2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2)$, $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$ zulässig!
- $\Rightarrow (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ keine Ecke
- $\Rightarrow$ kein Simplexschritt

Allgemeines Fluss-LP

Flusserhöhung auf s-t-Weg $\Rightarrow$ Simplexschritt?

- Erhöhe Fluss folgendermaßen
- $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
- $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0)$
- $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- Aber: $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) =$
  $1/2 \cdot (2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2) + 1/2 \cdot (2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$
  wobei $(2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2)$, $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$ zulässig!
- $\Rightarrow (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ keine Ecke
- $\Rightarrow$ kein Simplexschritt

Allgemeines Fluss-LP

Flusserhöhung auf s-t-Weg $\Rightarrow$ Simplexschritt?

- Erhöhe Fluss folgendermaßen
- $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
- $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0)$
- $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- Aber: $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) =$
  $1/2 \cdot (2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2) + 1/2 \cdot (2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$
  wobei $(2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2)$, $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$ zulässig!
- $\Rightarrow (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ keine Ecke
- $\Rightarrow$ kein Simplexschritt

Allgemeines Fluss-LP

Flusserhöhung auf s-t-Weg $\Rightarrow$ Simplexschritt?

- Erhöhe Fluss folgendermaßen
- $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
- $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0)$
- $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$
- Aber: $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) =$
  $1/2 \cdot (2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2) + 1/2 \cdot (2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$
  wobei $(2, 2, 2, 4, 4, 4, 2, 2, 2)$, $(2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2)$ zulässig!
- $\Rightarrow (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ keine Ecke
- $\Rightarrow$ kein Simplexschritt

Allgemeines Fluss-LP

Simplexschritt ⇒ Flusserhöhung auf s-t-Weg?

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

- Simplexschritt: Wechsel von Ecke zu Ecke im Lösungspolyeder, in Richtung der Zielfunktion.
- Zielfunktion = Größe des s-t-Flusses.
- ⇒ Simplexschritt erhöht s-t-Fluss.
- ∃ eine Kante (s, v), wo Fluss erhöht wurde.
- Flusserhaltung bei $v \Rightarrow \exists$ Kante (v, w) wo Fluss erhöht wurde.
- ...
- Einziger Knoten an dem Kette enden kann ist t (dort gibt es keine Flusserhaltung).
- (s kommt als Ende nicht in Frage, sonst keine s-t-Flusserhöhung, sondern Kreis)
- ⇒ Erhöhender s-t-Weg (der nicht notwendigerweise einfach sein muss) gefunden.

Allgemeines Fluss-LP

Simplexschritt ⇒ Flusserhöhung auf s-t-Weg?

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

- Simplexschritt: Wechsel von Ecke zu Ecke im Lösungspolyeder, in Richtung der Zielfunktion.
- Zielfunktion = Größe des s-t-Flusses.
- ⇒ Simplexschritt erhöht s-t-Fluss.
- ∃ eine Kante (s, v), wo Fluss erhöht wurde.
- Flusserhaltung bei v ⇒ ∃ Kante (v, w) wo Fluss erhöht wurde.
- ...
- Einziger Knoten an dem Kette enden kann ist t (dort gibt es keine Flusserhaltung).
- (s kommt als Ende nicht in Frage, sonst keine s-t-Flusserhöhung, sondern Kreis)
- ⇒ Erhöhender s-t-Weg (der nicht notwendigerweise einfach sein muss) gefunden.

Allgemeines Fluss-LP

Simplexschritt ⇒ Flusserhöhung auf s-t-Weg?

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

- Simplexschritt: Wechsel von Ecke zu Ecke im Lösungspolyeder, in Richtung der Zielfunktion.
- Zielfunktion $=$ Größe des s-t-Flusses.
- $\Rightarrow$ Simplexschritt erhöht s-t-Fluss.
- $\exists$ eine Kante (s, v), wo Fluss erhöht wurde.
- Flusserhaltung bei $v \Rightarrow \exists$ Kante (v, w) wo Fluss erhöht wurde.
- ...
- Einziger Knoten an dem Kette enden kann ist t (dort gibt es keine Flusserhaltung).
- (s kommt als Ende nicht in Frage, sonst keine s-t-Flusserhöhung, sondern Kreis)
- $\Rightarrow$ Erhöhender s-t-Weg (der nicht notwendigerweise einfach sein muss) gefunden.

Allgemeines Fluss-LP

Simplexschritt $\Rightarrow$ Flusserhöhung auf s-t-Weg?

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

- Simplexschritt: Wechsel von Ecke zu Ecke im Lösungspolyeder, in Richtung der Zielfunktion.
- Zielfunktion $=$ Größe des s-t-Flusses.
- $\Rightarrow$ Simplexschritt erhöht s-t-Fluss.
- $\exists$ eine Kante (s, v), wo Fluss erhöht wurde.
- Flusserhaltung bei $v \Rightarrow \exists$ Kante (v, w) wo Fluss erhöht wurde.
- ...
- Einziger Knoten an dem Kette enden kann ist t (dort gibt es keine Flusserhaltung).
- (s kommt als Ende nicht in Frage, sonst keine s-t-Flusserhöhung, sondern Kreis)
- $\Rightarrow$ Erhöhender s-t-Weg (der nicht notwendigerweise einfach sein muss) gefunden.

Allgemeines Fluss-LP

Simplexschritt $\Rightarrow$ Flusserhöhung auf s-t-Weg?

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

- Simplexschritt: Wechsel von Ecke zu Ecke im Lösungspolyeder, in Richtung der Zielfunktion.
- Zielfunktion $=$ Größe des s-t-Flusses.
- $\Rightarrow$ Simplexschritt erhöht s-t-Fluss.
- $\exists$ eine Kante (s, v), wo Fluss erhöht wurde.
- Flusserhaltung bei $v \Rightarrow \exists$ Kante (v, w) wo Fluss erhöht wurde.
- ...
- Einziger Knoten an dem Kette enden kann ist t (dort gibt es keine Flusserhaltung).
- (s kommt als Ende nicht in Frage, sonst keine s-t-Flusserhöhung, sondern Kreis)
- $\Rightarrow$ Erhöhender s-t-Weg (der nicht notwendigerweise einfach sein muss) gefunden.

Allgemeines Fluss-LP

Simplexschritt $\Rightarrow$ Flusserhöhung auf s-t-Weg?

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

- Simplexschritt: Wechsel von Ecke zu Ecke im Lösungspolyeder, in Richtung der Zielfunktion.
- Zielfunktion $=$ Größe des s-t-Flusses.
- $\Rightarrow$ Simplexschritt erhöht s-t-Fluss.
- $\exists$ eine Kante (s, v), wo Fluss erhöht wurde.
- Flusserhaltung bei $v \Rightarrow \exists$ Kante (v, w) wo Fluss erhöht wurde.
- ...
- Einziger Knoten an dem Kette enden kann ist t (dort gibt es keine Flusserhaltung).
- (s kommt als Ende nicht in Frage, sonst keine s-t-Flusserhöhung, sondern Kreis)
- $\Rightarrow$ Erhöhender s-t-Weg (der nicht notwendigerweise einfach sein muss) gefunden.

Allgemeines Fluss-LP

Simplexschritt $\Rightarrow$ Flusserhöhung auf s-t-Weg?

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

- Simplexschritt: Wechsel von Ecke zu Ecke im Lösungspolyeder, in Richtung der Zielfunktion.
- Zielfunktion $=$ Größe des s-t-Flusses.
- $\Rightarrow$ Simplexschritt erhöht s-t-Fluss.
- $\exists$ eine Kante (s, v), wo Fluss erhöht wurde.
- Flusserhaltung bei $v \Rightarrow \exists$ Kante (v, w) wo Fluss erhöht wurde.
- ...
- Einziger Knoten an dem Kette enden kann ist t (dort gibt es keine Flusserhaltung).
- (s kommt als Ende nicht in Frage, sonst keine s-t-Flusserhöhung, sondern Kreis)
- $\Rightarrow$ Erhöhender s-t-Weg (der nicht notwendigerweise einfach sein muss) gefunden.

Allgemeines Fluss-LP

Simplexschritt $\Rightarrow$ Flusserhöhung auf s-t-Weg?

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

- Simplexschritt: Wechsel von Ecke zu Ecke im Lösungspolyeder, in Richtung der Zielfunktion.
- Zielfunktion $=$ Größe des s-t-Flusses.
- $\Rightarrow$ Simplexschritt erhöht s-t-Fluss.
- $\exists$ eine Kante (s, v), wo Fluss erhöht wurde.
- Flusserhaltung bei $v \Rightarrow \exists$ Kante (v, w) wo Fluss erhöht wurde.
- ...
- Einziger Knoten an dem Kette enden kann ist t (dort gibt es keine Flusserhaltung).
- (s kommt als Ende nicht in Frage, sonst keine s-t-Flusserhöhung, sondern Kreis)
- $\Rightarrow$ Erhöhender s-t-Weg (der nicht notwendigerweise einfach sein muss) gefunden.

Allgemeines Fluss-LP

Simplexschritt ⇒ Flusserhöhung auf s-t-Weg?

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

- Simplexschritt: Wechsel von Ecke zu Ecke im Lösungspolyeder, in Richtung der Zielfunktion.
- Zielfunktion = Größe des s-t-Flusses.
- ⇒ Simplexschritt erhöht s-t-Fluss.
- $\exists$ eine Kante (s, v), wo Fluss erhöht wurde.
- Flusserhaltung bei $v \Rightarrow \exists$ Kante (v, w) wo Fluss erhöht wurde.
- ...
- Einziger Knoten an dem Kette enden kann ist t (dort gibt es keine Flusserhaltung).
- (s kommt als Ende nicht in Frage, sonst keine s-t-Flusserhöhung, sondern Kreis)
- ⇒ Erhöhender s-t-Weg (der nicht notwendigerweise einfach sein muss) gefunden.

Allgemeines Fluss-LP

Simplexschritt ⇒ Flusserhöhung auf s-t-Weg?

Zeigen oder widerlegen Sie die Umkehrung des vorherigen Satzes.

- Simplexschritt: Wechsel von Ecke zu Ecke im Lösungspolyeder, in Richtung der Zielfunktion.
- Zielfunktion $=$ Größe des s-t-Flusses.
- $\Rightarrow$ Simplexschritt erhöht s-t-Fluss.
- $\exists$ eine Kante (s, v), wo Fluss erhöht wurde.
- Flusserhaltung bei $v \Rightarrow \exists$ Kante (v, w) wo Fluss erhöht wurde.
- ...
- Einziger Knoten an dem Kette enden kann ist t (dort gibt es keine Flusserhaltung).
- (s kommt als Ende nicht in Frage, sonst keine s-t-Flusserhöhung, sondern Kreis)
- $\Rightarrow$ Erhöhender s-t-Weg (der nicht notwendigerweise einfach sein muss) gefunden.

Ende

Danke für Eure Aufmerksamkeit!

Ende

Danke für Eure Aufmerksamkeit!

Fragen?