

# Praktikum *Planare Graphen*

Michael Baur, Martin Holzer, Steffen Mecke

10. November 2006

- ▶ Grundlagenwissen zu planaren Graphen
- ▶ Themenvorstellung
- ▶ Gruppeneinteilung

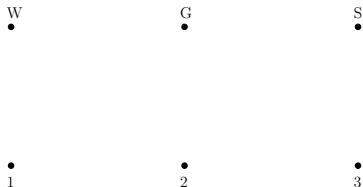
## Inventur

Was wissen Sie über planare Graphen?

## Wasser-Gas-Strom-Problem

## Aufgabe:

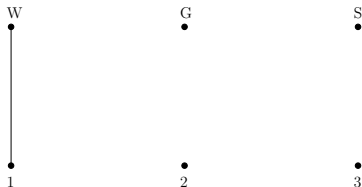
- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen



## Wasser-Gas-Strom-Problem

## Aufgabe:

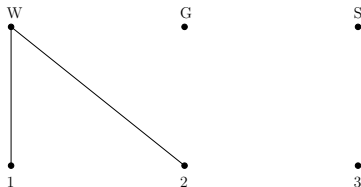
- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen



## Wasser-Gas-Strom-Problem

## Aufgabe:

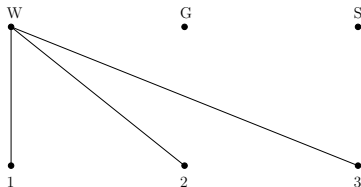
- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen



## Wasser-Gas-Strom-Problem

## Aufgabe:

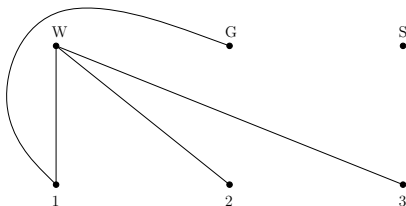
- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen



## Wasser-Gas-Strom-Problem

## Aufgabe:

- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen

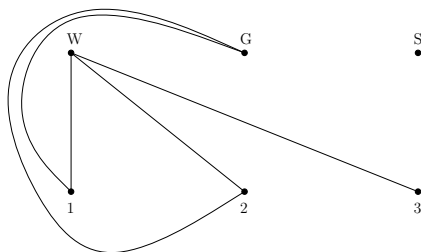




## Wasser-Gas-Strom-Problem

## Aufgabe:

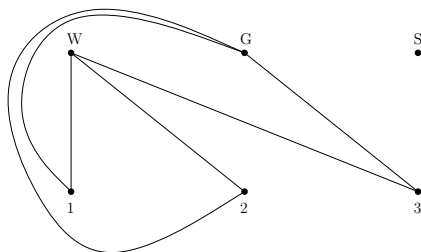
- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen



## Wasser-Gas-Strom-Problem

## Aufgabe:

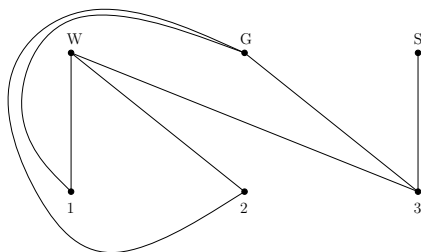
- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen



## Wasser-Gas-Strom-Problem

## Aufgabe:

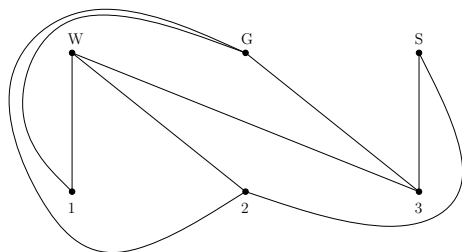
- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen



## Wasser-Gas-Strom-Problem

## Aufgabe:

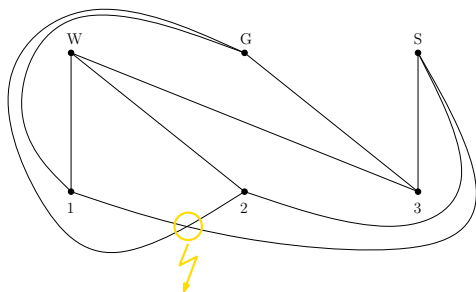
- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen



## Wasser-Gas-Strom-Problem

## Aufgabe:

- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen



## Wasser-Gas-Strom-Problem

## Aufgabe:

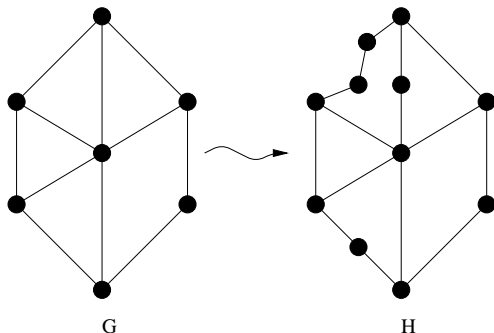
- ▶ 3 Häuser, 3 Versorger
- ▶ vollständige Versorgung, ‚direkte Leitungen‘
- ▶ keine Kreuzung von Leitungen

Geht nicht!

## Planarität

Ein Graph ist planar gdw. er keine Unterteilung des  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  als Subgraph enthält.

Unterteilung:



## Forschungsgegenstand

- ▶ Manche Probleme sind  $\mathcal{NP}$ -schwer auf allgemeinen Graphen, aber in  $\mathcal{P}$  auf planaren Graphen
- ▶ Beispiel: maximaler Schnitt (MAX CUT)
- ▶ Zerlegung von PGen mittels Planar Separator oft hilfreich ( $\rightsquigarrow$  Divide-and-Conquer-Verfahren)



## Grundbegriffe

- ▶ ungerichtet  $\leftrightarrow$  gerichtet/bigerichtet

## Grundbegriffe

- ▶ ungerichtet  $\leftrightarrow$  gerichtet/bigerichtet
- ▶ Schleife (Schlinge), Multikanten

## Grundbegriffe

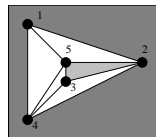
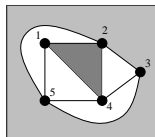
- ▶ ungerichtet  $\leftrightarrow$  gerichtet/bigerichtet
- ▶ Schleife (Schlinge), Multikanten
- ▶ Pfad, Kreis (Zykel), ...

## Grundbegriffe

- ▶ ungerichtet  $\leftrightarrow$  gerichtet/bigerichtet
- ▶ Schleife (Schlinge), Multikanten
- ▶ Pfad, Kreis (Zykel), ...
- ▶ Einbettung:  
kombinatorisch  $\leftrightarrow$  geometrisch

## Grundbegriffe

- ▶ ungerichtet  $\leftrightarrow$  gerichtet/bigerichtet
- ▶ Schleife (Schlinge), Multikanten
- ▶ Pfad, Kreis (Zykel), ...
- ▶ Einbettung:  
kombinatorisch  $\leftrightarrow$  geometrisch
- ▶ Facette/äußere Facette



## Eulerformel

In welcher Beziehung stehen Knoten-, Kanten- und Facettenanzahl eines planaren Graphen zueinander?

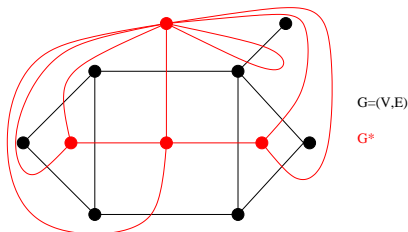
## Eulerformel

In welcher Beziehung stehen Knoten-, Kanten- und Facettenanzahl eines planaren Graphen zueinander?

$$n - m + f = 2$$

## Dualgraph

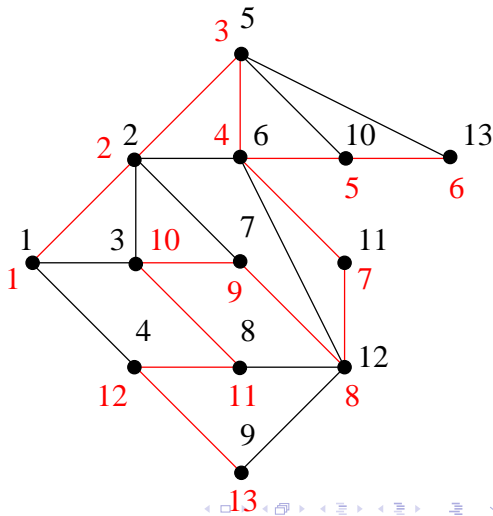
- ▶ Facette  $\rightsquigarrow$  Knoten
- ▶ adjazente Facetten  $\rightsquigarrow$  Kante
- ▶ ‚Antenne‘  $\rightsquigarrow$  Schleife
- ▶ Schnitt  $\leftrightarrow$  Kreis





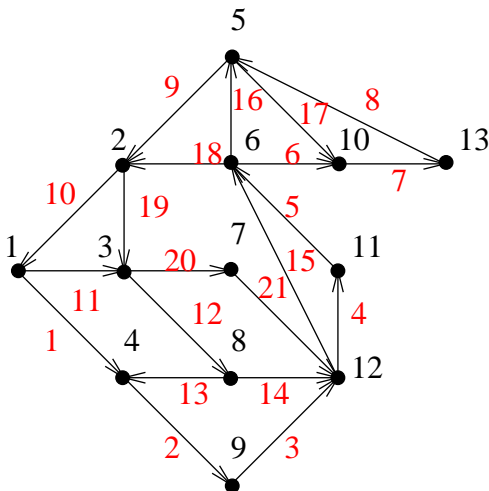
## Graphsuche

- ▶ Breitensuche (BFS)
- ▶ Tiefensuche (DFS)



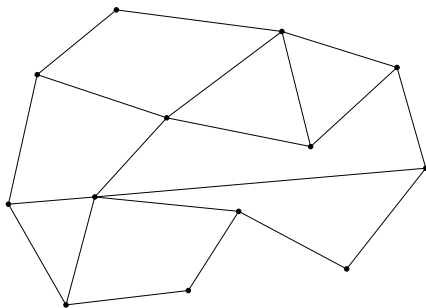
## Graphsuche

- ▶ Breitensuche (BFS)
- ▶ Tiefensuche (DFS)
- ▶ Auswahlstrategie:  
z. B. Right-First-DFS



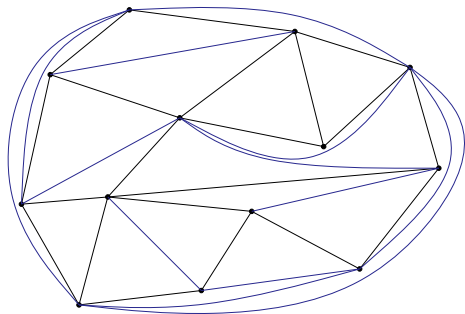
## Triangulierung

- ▶ Mache Facetten zu Dreiecken...
- ▶ ...durch Einziehen neuer Kanten
- ▶ Gilt auch für äußere Facette



## Triangulierung

- ▶ Mache Facetten zu Dreiecken...
- ▶ ...durch Einziehen neuer Kanten
- ▶ Gilt auch für äußere Facette



## Inventur

Was wissen Sie *nun* über planare Graphen?

## Gruppeneinteilung

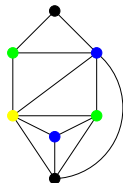
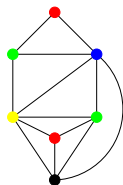
- ▶ 11 Teilnehmer, 4 Themen
- ▶  $\rightsquigarrow$  3 Gruppen à 3 Personen, 1 Gruppe à 2 Personen
- ▶ Wichtig: Organisation, Definition von Schnittstellen

# Übersicht

- ▶ Graphenfärben
- ▶ Konvexes Layout
- ▶ Menger-Problem
- ▶ Planar-Separator-Theorem

## Problemstellung

- ▶ Färben der Knoten mit min. Anzahl Farben
- ▶ Adjazente Knoten sollen verschiedene Farbe haben
- ▶ PGen sind 4-färbbar (schwierig)





## Verfahren

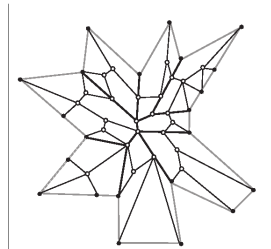
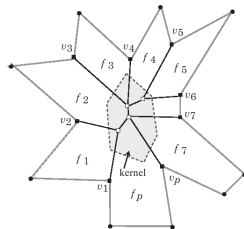
- ▶ Fünffärbungsalgorithmus (Linearzeit)
- ▶ Iterative Hinzunahme von Knoten

## Aspekte

- ▶ Heuristiken zur Umfärbung/Optimierung

## Problemstellung

- ▶ Gegeben: innen dreifach zusammenhängender Graph, Polygon (sternförmig)
- ▶ Zeichne äußere Facette auf Polygon...
- ▶ ...und innere Facetten konvex



## Verfahren

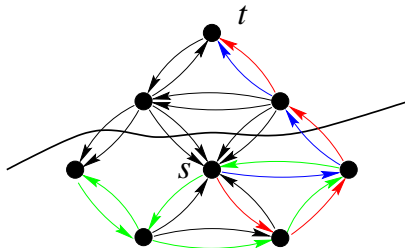
- ▶ Algorithmus von Hong/Nagamochi (Linearzeit)
- ▶ Berechne Grundgerüst aus geeigneten Pfaden
- ▶ Füge restliche Knoten in Teilflächen ein

## Aspekte

- ▶ Festlegung der genauen Positionen: Symmetrien, Winkelauflösung
- ▶ Visualisierung der iterativen Konstruktion der Pfade

## Problemstellung

- ▶ Gegeben: ungerichteter PG, Start- und Endknoten
- ▶ Finde max. Anzahl knoten-/kantendisjunkter Wege
- ▶ Hier: kantendisjunkte Variante



## Verfahren

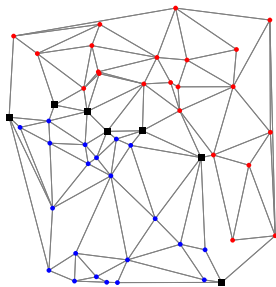
- ▶ Algorithmus von Weihe/Coupry (Linearzeit)
- ▶ Umweg über gerichteten Graphen
- ▶ Right-First-DFS

## Aspekte

- ▶ Evaluation auf unterschiedlichen Graphen
- ▶ Herausforderung: schöne Visualisierung der Doppelkanten
- ▶ Relaxierung: max.  $k$  mehrfach benutzte Kanten
- ▶ Zusatz: Implementation der knotendisjunkten Version (?)
- ▶ ‚Direktes‘ Verfahren???

## Problemstellung

- ▶ Zerlegung eines PG in (mind.) zwei Komponenten
- ▶ Separator möglichst klein (Garantie:  $|S| \leq 4\sqrt{n}$ )
- ▶ Komponenten möglichst balanciert (Garantie:  $|K_1|, |K_2| \leq 2n/3$ )



## Verfahren

- ▶ Einfache Zerlegung: BFS, Level(s) als Separator
- ▶ Komplexe Zerlegung: Verschmelzung, Triangulierung, Fundamentalkreis
- ▶ Verschiedene Freiheitsgrade

## Aspekte

- ▶ Evaluation verschiedener Graphen
- ▶ Berücksichtigung verschiedener Optimierungskriterien
- ▶ Einstellen von Parametern