

Praktikum Graphgeneratoren: Planare Graphen

Marcus Krug & Jochen Speck

15. Februar 2006

Zusammenfassung

In der vorliegenden Ausarbeitung stellen wir einen Generator für planare Graphen mit linearem Aufwand bezüglich der Anzahl der Knoten vor. Wir zeigen wie der gewählte Ansatz auf planare Graphen höherer Ordnung ausgeweitet werden kann – hierunter verstehen wir Graphen, welche auf Oberflächen höheren Geschlechts so gezeichnet werden können, dass sich ihre Kanten nicht überschneiden.

1 Einführung

Ein Graph ist ein Tupel $G = (V, E)$, bestehend aus einer Knotenmenge V und einer Kantenmenge $E \subseteq \binom{V}{2}$. Im Folgenden seien die Kardinalitäten $|V|$ mit n bzw. $|E|$ mit m bezeichnet. Häufig wird die Kantenmenge in naheliegender Weise als eine Relation auf der Menge der Knoten betrachtet. Die Repräsentation eines Graphen als ein Tupel von Mengen ist allerdings nur eine von vielen Repräsentationsformen eines Graphen. Eine für den Menschen – zumindest im Falle von Graphen übersichtlicher Größe – besonders einfach zu lesende Repräsentationsform ist die Zeichnung. Hierbei werden Knoten im Allgemeinen als Punkte in der Ebene und Kanten als ebene Kurven, meist sogar nur Strecken, gezeichnet. Besonders leicht lassen sich Zeichnungen lesen, bei denen die Kanten des Graphen keine Schnittpunkte gemeinsam haben. Die Relationen zwischen den Knoten des Graphen, welche meist Objekte repräsentieren, lassen sich dann schnell erfassen und interpretieren. Leider lassen sich nur wenige Graphen in dieser Weise zeichnen. Bereits ein vollständig verbundener Graph mit fünf Knoten besitzt keine ebene Zeichnung ohne sich schneidende Kanten. Die Klasse der Graphen, für die es eine solche überschneidungsfreie ebene Zeichnung gibt, nennt man planare Graphen.

Ein planarer Graph ist also ein Graph, der in der Ebene so dargestellt werden kann, dass seine Kanten überschneidungsfrei sind.

Viele “Konstrukte” der Alltagswelt lassen sich als planare Graphen auffassen. Ein brücken- und tunnelloses Straßennetz etwa lässt sich als planarer Graph modellieren, indem man in naheliegender Weise Kreuzungen als Knoten und Straßen als Kanten auffasst. Von graphentheoretischem Interesse sind die Eigenschaften solcher Graphen, etwa die Frage nach maximaler Kantenzahl oder nach der Existenz von Teilgraphen mit bestimmten Eigenschaften.

Die vorliegende Arbeit ist ein begleitendes Dokument zum Praktikum Graphgeneratoren. Ziel des Dokumentes ist es Algorithmus zur zufälligen Erzeugung

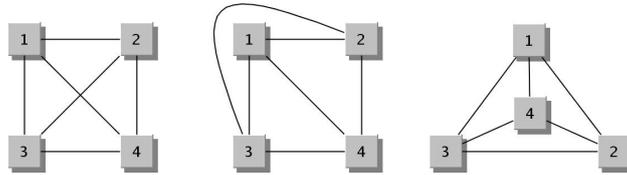


Abbildung 1: K_4 mit einer nicht ebenen und zwei ebenen Zeichnungen

von planaren Graphen vorzustellen und zu diskutieren. Als Parameter für die Erzeugung der Graphen sollen die Anzahl der Knoten und Kanten dienen. Der Generator soll jeden planaren Graphen mit den gegebenen Parameterwerten mit einer echt positiven Wahrscheinlichkeit erzeugen. In Kapitel 2 werden planare Graphen definiert und einige Eigenschaften planarer Graphen erläutert. Anschließend wird ein Algorithmus zur Generierung von zufälligen planaren Graphen vorgestellt. In Kapitel 3 soll ein erweitertes Konzept von planaren Graphen vorgestellt und ein Algorithmus zur Generierung zufälliger planarer Graphen höherer Ordnung diskutiert werden.

2 Planare Graphen

Im vorangegangenen Kapitel wurde bereits in groben Worten erläutert, was sich hinter dem Begriff des planaren Graphen verbirgt. Im folgenden soll dieser ein wenig präzisiert werden. Wie bereits erwähnt, sind genau solche Graphen planar, zu denen es eine ebene überschneidungsfreie Zeichnung gibt. Die folgende Definition soll Aufschluß darüber geben, was unter einer solchen Zeichnung zu verstehen ist.

Defintion 2.0.1. Eine ebene Zeichnung eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $\zeta : G \rightarrow \mathbb{R}^2$, so dass

$$\begin{aligned} \zeta|_V \quad V &\longrightarrow P \\ v &\longmapsto p = (x, y) \in P \end{aligned} \quad (1)$$

eine bijektive Abbildung zwischen den Knoten von G und einer Menge von Punkten $P \subseteq \mathbb{R}^2$ in der Ebene ist. Die Bilder von Kanten sind Jordankurven, deren Anfangs- und Endpunkte in den Bildern der entsprechenden Knoten des Graphen liegen.

Nun lässt sich auch der Begriff des planaren Graphen etwas präziser fassen.

Defintion 2.0.2. Ein planarer Graph $G = (V, E)$ ist ein Graph, zu welchem eine ebene Zeichnung ζ gemäß Definition 2.0.1 existiert, so dass für $\{u, v\} \neq \{x, y\} \in E : \zeta(\{u, v\}) \cap \zeta(\{x, y\}) \subseteq \{\zeta(u), \zeta(v), \zeta(x), \zeta(y)\}$ gilt, dass sich also je zwei Bilder von Kanten in G nur in den Bildern ihrer Endpunkte schneiden.

Abbildung 1 zeigt einen K_4 mit verschiedenen Zeichnungen als Beispiel eines planaren Graphen.

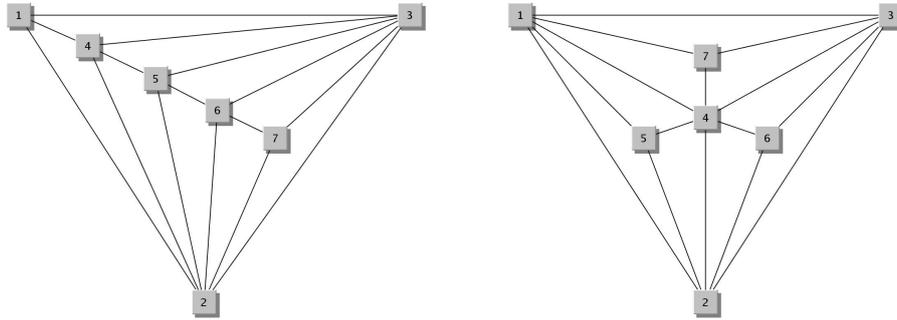


Abbildung 2: Zwei nicht isomorphe maximale planare Graphen mit 7 Knoten und 15 Kanten.

2.1 Eigenschaften planarer Graphen

Im folgenden sollen einige Eigenschaften planarer Graphen Erwähnung finden, die der weiteren Diskussion dienen, aber aus Gründen der Überschaubarkeit der vorliegenden Arbeit nicht weiter erläutert werden können. Insbesondere verzichten wir darauf die Beweise explizit zu erwähnen und überlassen das Studium selbiger dem interessierten Leser.

Lemma 2.1.1. *Ein planarer Graph mit n Knoten hat maximal $3n - 6$ Kanten [1].*

Lemma 2.1.2. *Zu jedem planaren Graphen existiert eine Zeichnung deren Kanten Strecken sind. (vgl. Steinitz (1934), W. Wagner (1936), I. Fary (1948) und de Fraysseix et al. (1990))*

Definition 2.1.1. *Ein maximaler planarer Graph $G = (V, E)$ ist ein planarer Graph mit $3n - 6$ Kanten.*

Anders als im Falle von vollständig verbundenen Graphen gibt es nicht isomorphe maximale planare Graphen. Abbildung 2 zeigt ein solches Paar von nicht isomorphen maximalen planaren Graphen. Die rechte Zeichnung enthält einen Knoten mit Grad sechs, die linke hingegen nicht: die Graphen können somit nicht isomorph sein.

Man kann einen Graphen mit einem Aufwand, welcher im Wesentlichen linear in der Anzahl n seiner Knoten ist, auf Planarität hin untersuchen [2]. Mit einem solchen Verfahren ließe sich bereits ein naiver Graphgenerator für planare Graphen aufschreiben:

Der Aufwand von Algorithmus 1 hängt im Wesentlichen von der in Zeile 4 beginnenden Schleife ab. Diese wird $\Omega(k)$ mal durchlaufen. In jedem Durchlauf wird eine Planaritätstest durchgeführt, welcher jeweils einen Aufwand von $\Theta(n)$ verursacht. Es ergibt sich also ein Gesamtaufwand von $\Omega(kn)$.

Prinzipiell kann man die Anzahl der Planaritätstests etwas einschränken und den Algorithmus auf diese Weise etwas effizienter machen. Störend ist aber auch die Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man in Zeile 5 des Algorithmus ein ungünstiges Knotenpaar auswählt, beständig zunimmt. Möchte man etwa einen maximalen planaren Graphen erzeugen, so gibt es für die letzte Kante

Algorithm 1 Zufälliger planarer Graph

Gegeben: n Anzahl der Knoten, k Anzahl der Kanten

```
1:  $V \leftarrow \{u_1, \dots, u_n\}$  {Knotenmenge}
2:  $E \leftarrow \emptyset$  {Kantenmenge}
3:  $G \leftarrow (V, E)$ 
4: while  $|E| < k$  do
5:    $\{u, v\} \leftarrow_R \{\{x, y\} \mid x, y \in V, \{x, y\} \notin E\}$ 
6:   if  $\text{planar}(E \cup \{u, v\})$  then
7:      $E \leftarrow E \cup \{u, v\}$ 
8:   end if
9: end while
```

nur $O(1)$ zulässige verbleibende Knotenpaare. Zu diesem Zeitpunkt gibt es aber $\binom{n}{2} - 3n + 7$ mögliche Knotenpaare. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man die richtige auswählt, ist entsprechend gering in der Größenordnung $O(\frac{1}{n^2})$ und macht die Erzeugung von maximalen oder fast maximalen planaren Graphen mit diesem Algorithmus noch ineffizienter.

Im folgenden soll nun ein anderer Ansatz dargestellt werden, welcher diese Probleme löst.

2.2 Algorithmus

In einem ersten Schritt wird ein zufälliger maximaler planarer Graph erzeugt. Anschließend werden in diesem Graphen sukzessive so lange zufällige Kanten gelöscht, bis der entstehende Graph die gewünschte Anzahl von Kanten besitzt.

Algorithm 2 Zufälliger maximaler planarer Graph

Gegeben: $n > 3$ Anzahl der Knoten

```
1:  $V \leftarrow \emptyset$ 
2:  $E \leftarrow \emptyset$ 
3:  $G \leftarrow (V, E)$ 
4:  $G \leftarrow$  (erzeuge ein Dreieck und zeichne die Knoten in allgemeiner Lage)
5: (erzeuge die entstehenden zwei Facetten  $F_1$  bzw.  $F_2$ )
6:  $\Phi \leftarrow \{F_1\}$  {innere Facette}
7: for  $i = 4 \dots n$  do
8:    $F \leftarrow_R \Phi$ 
9:    $v \leftarrow$  (füge einen neuen Knoten und zeichne diesem im Schwerpunkt der Knoten von  $F$ )
10:   $V \leftarrow V \cup \{v\}$ 
11:   $E \leftarrow E \cup \{(u, v), (v, u) \mid v \in V(F)\}$  {verbinde  $v$  mit allen Knoten aus  $F$ }
12:   $(F_1, F_2, F_3) \leftarrow$  (berechne die drei neu entstehenden Facetten)
13:   $\Phi \leftarrow \Phi - \{F\}$  {entferne  $F$  aus der Liste der Facetten}
14:   $\Phi \leftarrow \Phi \cup \{F_1, F_2, F_3\}$ 
15: end for
```

Algorithmus 2 stellt einen ersten Ansatz zur Erzeugung eines maximalen planaren Graphen dar. Wir betrachteten die ungerichteten Kanten als Paare von gerichteten Kanten. Jede gerichtete Kante kann dann in eindeutiger Weise ei-

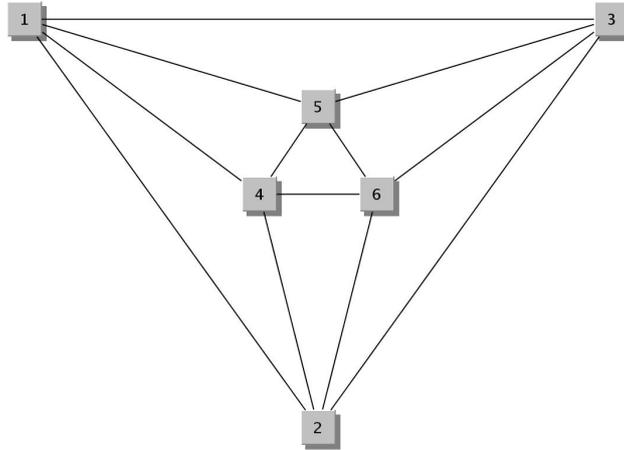


Abbildung 3: Ein 4-regulärer maximaler planarer Graph.

ner Facette zugeordnet werden. Die Erzeugung wird wie folgt durchgeführt: Zunächst wird der Graph als Dreieck (maximaler planarer Graph mit drei Knoten) initialisiert. Die Facetteninformation besteht zu diesem Zeitpunkt aus der einelementigen Menge der inneren Facette sowie der äußeren Facette. Nun wird rekursiv eine zufällige innere Facette F ausgewählt. Der Graph wird durch einen neuen Knoten n erweitert, welcher mit allen Knoten $V(F)$ der Facette F verbunden wird. Der in Schritt i des Algorithmus 2 erzeugte Graph ist gerade ein maximaler planarer Graph mit i Knoten.

Leider gibt es maximale planare Graphen, die sich auf diese Weise nicht erzeugen lassen. Abbildung 3 zeigt hierfür exemplarisch einen 4-regulären planaren Graphen mit 6 Knoten. Die mit dem Algorithmus erzeugten Graphen haben jedoch sämtlich die Eigenschaft, dass es mindestens einen Knoten mit Grad drei gibt – nämlich der letzte im Algorithmus erzeugte Knoten. Welche Klasse von Graphen erzeugt der Algorithmus also? Einerseits sind die Graphen sicherlich eine echte Untermenge der Klasse $MAXPLANAR$ der maximalen planaren Graphen. Andererseits handelt es sich bei den erzeugten Graphen um Instanzen der Klasse $3-CORE$, welche gerade solche Graphen enthält, deren Knoten sämtlich im 3-Core aber nicht in einem k -Core für $k > 3$ liegen, d.h. man kann rekursiv alle Knoten des Graphen entfernen, indem man jeweils nur Knoten mit Grad ≤ 3 entfernt. Betrachtet man nämlich die Knoten in der umgekehrten Reihenfolge ihres Einfügens, so erhält man eine Sequenz von Knoten, die als Zeuge für diese Eigenschaft interpretiert werden kann. Also liegen die erzeugten Graphen in der Klasse $3-CORE \cap MAXPLANAR$. Die umgekehrte Frage, ob sich alle Graphen dieser Schnittmenge durch den Algorithmus erzeugen lassen, ist jedoch nicht trivial und bleibt zunächst ein offenes Problem.

Die folgenden Ergebnisse sollen auf einen modifizierten Ansatz hinführen.

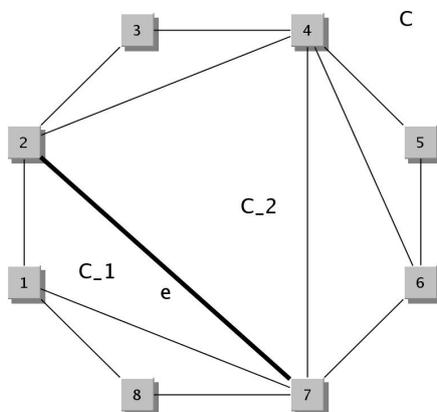
Defintion 2.2.1. Sei G ein Graph und C ein Kreis in G . Eine Kante von G , die zwei Ecken von C verbindet, aber nicht selbst eine Kante des Kreises ist, ist eine Sehne [1].

Lemma 2.2.1. Sei G ein ebener Graph mit Zeichnung Z , der einen Kreis C_n

mit $n \geq 4$ Knoten als Teilgraph enthalte. Dann lassen sich maximal $n-3$ Sehnen im Inneren des Kreises zeichnen und es existieren immer zwei nicht benachbarte Knoten u, v , die nicht an einer Sehne liegen.

Beweis:

Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n . Für $n = 4$ ist die Aussage sicherlich richtig. Sei also $n > 4$ und sei der Kreis C gegeben durch die Knoten u_1, \dots, u_n mit $E(C) = \{\{u_i, u_j\} \mid j \equiv i + 1 \pmod n, i = 1, \dots, n\}$. Eine Sehne ist dann eine Kante der Form $\{u_i, u_k\}$ mit oBdA $i < k \leq n$ und $k \neq i + 1$. Sei $e = \{u_i, u_k\}$ eine solche Sehne. Dann haben die beiden entstehenden Kreise $C_1 = u_1, \dots, u_i, u_k, \dots, u_n$ und $C_2 = u_k, u_i, \dots, u_{k-1}$ weniger als n und mindestens 3 Knoten. Haben beide Kreise mehr als drei Knoten, so können wir nach Induktionsannahme davon ausgehen, dass beide Kreise die gewünschte Eigenschaften haben. Seien r und s die Kardinalitäten der beiden Kreise C_1 bzw. C_2 und es gilt $r + s = n + 2$, da die Knoten u_i und u_k in beiden Kreisen vorkommen. In C_1 gibt es maximal $r - 3$ und in C_2 maximal $s - 3$ Sehnen. Da e ebenfalls eine Sehne ist, gibt es in C somit $(r - 3) + (s - 3) + 1 = (r + s) - 5 = (n + 2) - 5 = n - 3$ Sehnen. Seien darüber hinaus v_1, w_1 und v_2, w_2 die Knoten von C_1 bzw. C_2 , die nicht an einer Sehne von C_1 bzw. C_2 liegen. Da weder v_1 und w_1 noch v_2 und w_2 benachbart sein können, kann jeweils maximal ein Knoten von $\{v_1, w_1, v_2, w_2\}$ in der Menge $\{u_i, u_k\}$ enthalten sein. Somit gibt es in C wieder mindestens zwei Knoten mit der gewünschten Eigenschaft. Hat hingegen einer der beiden Kreise lediglich drei Knoten, so kann dieser Kreis keine Sehne enthalten und liefert genau einen Knoten, der in C_n nicht an einer Sehne liegt.



□

Lemma 2.2.2. Ein planarer Graph G ist genau dann maximal planar, wenn bezüglich einer beliebigen planaren Zeichnung von G jede Facette ein Dreieck ist.

Beweis:

“ \Rightarrow ” Sei G ein maximaler planarer Graph. Dann hat G $3n - 6$ Kanten. Es sei

Z eine Zeichnung von G und r die Anzahl der Facetten in Z , mit mehr als drei Knoten. Nach der Euler-Formel gilt $n - m + f = 2 \Leftrightarrow f = 2 - n + m$, wobei f die Anzahl der Facetten bezeichne. Wir zählen die Kanten die an einer Facette liegen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 2m &= \sum_F |V(F)| \\
 &\geq 3(f - r) + 4r \\
 &\geq 3(2 - n + m - r) + 4r, \text{ also} \\
 m &\leq 3n - 6 + 3r - 4r \\
 &= 3n - 6 - r.
 \end{aligned}$$

Für $r > 0$ ist dieser Term echt kleiner als $3n - 6$ und es folgt also, dass die Anzahl der Facetten mit mehr als drei Knoten $r = 0$ sein muss.

“ \Leftarrow ” Gilt hingegen, dass jede Facette ein Dreieck ist, so gilt nach Zählen der Kanten an jeder Facette wie im obigen Teil

$$\begin{aligned}
 2m &= \sum_F |V(F)| \\
 &= 3f \\
 &= 3(2 - n + m) \text{ und somit} \\
 m &= 3n - 6.
 \end{aligned}$$

Folglich ist G also maximal planar.

□

Definition 2.2.2. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $u \in V$ ein Knoten. Dann bezeichnet $N(u) := \{v \in V \mid \{u, v\} \in E\}$ die Menge der Nachbarknoten von u .

Definition 2.2.3. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $e = \{u, v\} \in E$ eine Kante von G . Dann bezeichnet G/e den Graphen, der durch Kontraktion der Kante $e = \{u, v\}$ entsteht und es gilt $G/e = (V_e, E_e)$ mit $V_e = V - \{u, v\} \cup \{V_e\}$ und $E_e = \{\{x, y\} \in E \mid x, y \notin \{u, v\}\} \cup \{\{v_e, x\} \mid x \in V_e, \{v, x\} \in E \vee \{u, x\} \in E\}$.

Lemma 2.2.3. Sei G ein maximaler planarer Graph mit $n \geq 4$ Knoten. Dann existiert eine Kante $e = \{u, v\}$ mit $|N(u) \cap N(v)| = 2$.

Beweis:

Sei G ein maximaler planarer Graph, also nach Lemma 2.2.2 ein Graph, dessen Facetten sämtlich Dreiecke bezüglich einer ebenen rektilinearen Zeichnung Z von G sind, sowie $e = \{u, v\} \in E$ eine beliebige Kante. Die Knoten seien mit ihren Punkten in der Zeichnung Z identifiziert. Falls e bereits die gewünschte Eigenschaft erfüllt, so ist man fertig. Da jede Kante an mindestens einer Facette liegt, können wir annehmen, dass e an einer Facette F liege. Aus der Maximalität von G und der Forderung $n \geq 4$ folgt, dass F ein Dreieck ist. Hieraus folgt, dass

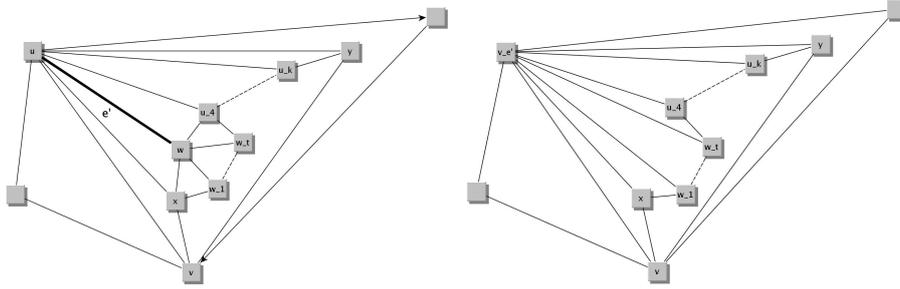


Abbildung 4: Kontraktion einer Kante mit zwei gemeinsamen Nachbarn.

e an einer weiteren Facette $F' \neq F$ liegt, die ebenfalls wegen der Maximalität von G ein Dreieck sein muß. Falls $N(u) \cap N(v) = \{w\}$, d.h. $|N(u) \cap N(v)| = 1$ gilt, so ist G ein Dreieck, was im Widerspruch zur Annahme steht. Nehmen wir also an, dass $|N(u) \cap N(v)| > 2$ gilt. Es bezeichne $U = N(u) \cap N(v)$ die Menge der gemeinsamen Nachbarn von u und v . Dann gibt es eine Halbebene bezüglich der Geraden durch u und v , in der mindestens zwei Knoten $x, y \in U$ liegen. Speziell seien x und y so gewählt, dass in der durch die Knoten $\{u, v, x\}$ in der Zeichnung definierten Region kein weiterer gemeinsamer Nachbarknoten aus der Menge U liegt (und damit überhaupt keiner), und dass es in der durch die Knoten $\{u, v, y\}$ definierten Region genau einen Knoten aus U gibt, nämlich x (siehe Abbildung 2.2). Seien $U' := \{u_1, \dots, u_k\} \subseteq N(u)$ die Nachbarknoten von u , welche in der durch die Knoten $\{u, x, v, y\}$ in der Zeichnung definierten Region liegen mit der Eigenschaft, dass die Kanten $\{u, u_i\}$ für $i = 1 \dots k$ der zirkulären Ordnung der Kanten um den Knoten u mit $u_1 = v$ und $u_k = y$ entsprechen, d.h. es gilt dann auch $u_2 = x$. Da G maximal planar angenommen wurde, ist jede Facette von Z ein Dreieck. Hieraus folgt, dass die Kanten $\{u_i, u_{i+1}\}$ für $i = 1 \dots k-1$ existieren müssen. Außerdem existiert nach Voraussetzung $\{u_k, u_1\} = \{y, v\}$. Folglich bilden die Knoten $u_1 \dots u_k$ einen Kreis mit k Knoten. Nach Lemma 2.2.1 existieren maximal $k-3$ Sehnen sowie zwei Knoten $u_i, u_j \in U'$, die nicht benachbart und nicht mit einer Sehne verbunden sind. Insbesondere ist also oBdA $w = u_i$ nicht in der Menge $\{v, y\}$ enthalten, da diese auf dem Kreis benachbart sind. Offenbar ist die Menge $W := N(u) \cap N(w)$ der gemeinsamen Nachbarknoten von u und w in der Menge U' enthalten, da die Zeichnung sonst im Widerspruch zur Annahme nicht eben wäre. Da w nach Wahl nicht an einer Sehne liegt, kann w nicht adjazent zu einem weiteren Knoten $u_l \in U'$ sein. Also gilt $W = \{u_{i-1}, u_{i+1}\}$ und somit $|W| = 2$.

□

Lemma 2.2.4. *Sei G ein maximaler planarer Graph mit $n \geq 4$ Knoten $e = \{u, v\}$ eine Kante mit $|N(u) \cap N(v)| = 2$. Dann ist G/e ein maximaler planarer Graph.*

Beweis:

Sei G ein maximaler planarer Graph mit $n \geq 4$ Knoten und $e = \{u, v\}$ eine Kante mit $|N(u) \cap N(v)| = 2$. G hat als maximaler planarer Graph mit n

Knoten $3n - 6$ Kanten. Wir betrachten im Folgenden die Nachbarn von u und die Nachbarn von w . Dabei gilt, dass

$$E = E(G) = \{\{x, y\} \in E \mid x, y \notin \{u, v\}\} \cup \{\{u, y\} \mid y \in N(u)\} \cup \{\{v, y\} \mid y \in N(v)\} \cup \{e\}$$

eine disjunkte Zerlegung der Menge der Kanten von G ist. Sei v_e der Knoten, zu welchem die Kante e kontrahiert werden soll. Dann gilt

$$E(G/e) = \{\{x, y\} \in E \mid x, y \notin \{u, v\}\} \cup \{\{v_e, z\} \mid z \in N(u) \cup N(v)\}. \quad (2)$$

Der Knoten v_e wird also mit allen Nachbarn von u bzw. w verbunden. Nun gilt: $|E(G)| - |E(G/e)| = |\{e\}| + |N(u) \cap N(w)| = 3$. Damit verschwinden beim Übergang von G zu G/e maximal 3 Kanten, nämlich e selbst und jeweils eine der Kanten zu gemeinsamen Nachbarn von u und w . Da G/e einen Knoten weniger als G hat, ist G/e mit $3(n - 1) - 6$ Kanten maximal planar.

□

Lemma 2.2.4 impliziert, dass es ein Folge von Kontraktionen $G > G_1 > \dots > G_{n-4} > G_{n-3} = K_3$ gibt, die jeden maximalen planaren Graphen auf einen maximalen Graphen der Größe drei – also ein Dreieck – zurückführt. Die Kontraktionen sind spezieller Natur in dem Sinne, dass die zu einer kontrahierten Kante inzidenten Knoten höchstens zwei gemeinsame Nachbarn haben. Die dabei auftretenden Fälle sind relativ überschaubar und können umgekehrt als Extraktion reproduziert werden. Lemma 2.2.5 liefert eine weitere Eigenschaft, welche den Umgang mit den entstehenden Fällen vereinfacht.

Lemma 2.2.5. *Sei G ein maximaler planarer Graph mit $n \geq 4$ Kanten und $e = \{u, v\}$ eine Kante mit $|N(u) \cap N(v)| = 2$ (existiert nach Lemma 2.2.3). Sei $\{x, y\} = N(u) \cap N(v)$. Dann liegen in den Regionen $\{x, u, v\}$ und $\{u, y, v\}$ keine weiteren Knoten.*

Beweis:

Wir nehmen an, dass die Menge der Knoten in der Region $R = \{x, u, v\}$ nicht leer sei. Sei $V' \neq \emptyset$ die Menge der Knoten, die im Inneren der Region R liegen. Sei weiter F die eindeutig bestimmte Facette, welche an der Kante $\{u, v\}$ auf der dem Knoten x zugewandten Seite liegt. Ist diese mit der Region R identisch, d.h. die Knoten auf dem Rand von F entsprechen gerade den Knoten von R , so ist keiner der Knoten aus V' mit einem der Knoten aus R verbunden, was im Widerspruch zur Maximalität von G steht. Wir können also annehmen, dass F nicht mit R identisch ist. Demnach gibt es einen Knoten $w \in V(F) - \{u, v, x\} \subseteq V'$, der nach Annahme mit mindestens einem der Knoten $\{u, v\}$ – oBdA u – nicht verbunden sein kann. In F läßt sich die Kante $\{w, u\}$ so zeichnen, dass sie keine weiteren Kanten von G schneidet. Also ist auch dies ein Widerspruch zur Maximalität von G .

□

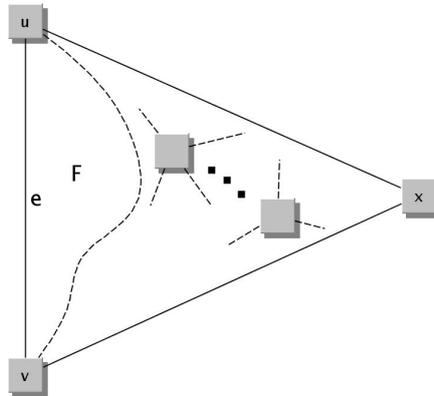


Abbildung 5: Region $R = \{x, u, v\}$

Abbildung 2.2 zeigt eine solche Kontraktion schematisch. Liest man die Bildreihenfolge hingegen von rechts nach links, so läßt sich daran die Vorgehensweise bei der Extraktion erkennen. Soll der Knoten v_e extrahiert werden, müssen zunächst zwei zu v_e inzidente Kanten ausgewählt werden – in diesem Fall die Kanten $\{v_e, x\}$ und $\{v_e, y\}$.

Sei $\{\{v_e, u_i\} | i = 1 \dots s\}$ die Menge der Kanten von v_e die im Gegenuhrzeigersinn zwischen $\{v_e, x\}$ und $\{v_e, y\}$ liegen. Analog sei $\{\{v_e, v_i\} | i = 1 \dots r\}$ die Menge der Kanten von v_e die im Gegenuhrzeigersinn zwischen $\{v_e, y\}$ und $\{v_e, x\}$ liegen. Nun löscht man v_e (und damit auch alle inzidenten Kanten) und erzeugt zwei neue Knoten v und u . Für jede Kante in $\{\{v_e, u_i\} | i = 1 \dots s\}$ erzeugt man die entsprechende Kante $\{u, u_i\}$ und für jede Kante in $\{\{v_e, v_i\} | i = 1 \dots r\}$ analog die entsprechende Kante $\{v, v_i\}$. Danach erzeugt man die Kanten $\{u, x\}$, $\{u, y\}$, $\{v, x\}$ und $\{v, y\}$. Damit ist die Kontraktion rückgängig gemacht.

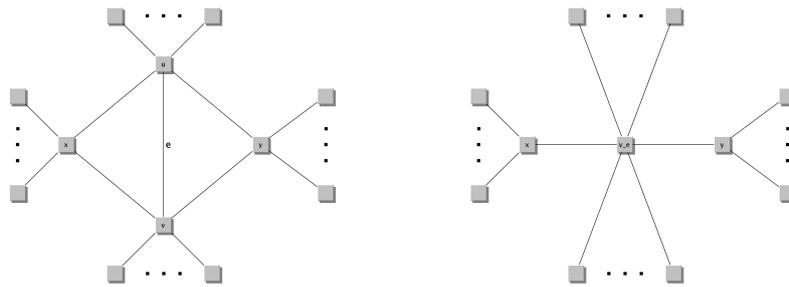


Abbildung 6: Kontraktion schematisch

Lemma 2.2.6. *Sei G ein beliebiger maximaler planarer Graph mit $n \geq 3$ Knoten. Dann wird G durch Algorithmus 3 mit einer Wahrscheinlichkeit $p > 0$ erzeugt.*

Beweis:

Algorithm 3 Zufälliger maximaler planarer Graph 2

Gegeben: $n \geq 3$ Anzahl der Knoten

- 1: $G = (V, E) \leftarrow$ Dreieck
 - 2: **for** $i = 4 \dots n$ **do**
 - 3: $v_e \leftarrow_R V$
 - 4: $E_v \leftarrow \{\{u, v\} \in E \mid u = v_e \text{ oder } v = v_e\}$
 - 5: $\{v_e, x\} \leftarrow_R E_v$
 - 6: $\{v_e, y\} \leftarrow_R E_v - \{\{v_e, x\}\}$
 - 7: führe Extraktion in v_e mit $\{v_e, x\}$ und $\{v_e, y\}$ durch
 - 8: update V und E
 - 9: **end for**
-

Beweis durch Induktion über die Anzahl der Knoten n :

Induktionsanfang: $n = 3$ Das ist der Startgraph d.h. hier muss gar nichts getan werden.

Induktionsschritt: von $n-1$ nach n Sei $G = (V, E)$ ein maximaler ebenenplanarer Graph mit n Knoten. Betrachte $e = \{u, v\} \in E$ mit $|N(u) \cap N(v)| = 2$ beliebig und $\{n_1, n_2\} = N(u) \cap N(v)$. G/e hat $n - 1$ Knoten und wird daher nach Induktionsvoraussetzung mit positiver Wahrscheinlichkeit p erzeugt. Bezeichne v_e den Knoten in G/e der durch die Kontraktion von e entstand. Sei $k = \deg(v_e)$ der Kantengrad von v_e . Dann wird im Algorithmus 3 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n-1}$ der Knoten v_e gewählt, und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{k(k-1)}$ (falls $k \geq 2$ sonst mit Wahrscheinlichkeit 1) mit $\{v_e, n_1\}$ und $\{v_e, n_2\}$ in der Extraktion verwendet. G wird damit mindestens mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2p}{k(k-1)(n-1)} > 0$ vom Algorithmus 3 erzeugt.

□

Algorithm 4 Zufälliger planarer Graph

Gegeben: $n > 3$ Anzahl der Knoten, m Anzahl der Kanten

- 1: $G \leftarrow$ zufälliger maximaler planarer Graph mit n Knoten
 - 2: **while** $|E| > m$ **do**
 - 3: $(u, v) \leftarrow$ zufällige Kante $(u, v) \in E(G)$
 - 4: $F \leftarrow$ Facette von (u, v)
 - 5: $G \leftarrow G - \{(u, v), (v, u)\}$
 - 6: $\varphi \leftarrow$ Menge der neu entstandenen Facetten
 - 7: $\Phi \leftarrow (\Phi - F) \cup \varphi$ {neue Facetteninformation}
 - 8: **end while**
-

Jeder planare Graph ist Teilgraph eines maximalen planaren Graphen. Somit ergibt sich, dass Algorithmus 4 jeden beliebigen planaren Graph mit einer echt positiven Wahrscheinlichkeit erzeugt.

Lemma 2.2.7. *Sei G ein beliebiger planarer Graph. Dann wird G durch Algorithmus 4 mit einer Wahrscheinlichkeit $p > 0$ erzeugt.*

Beweis:

Sei also G ein beliebiger planarer Graph mit n Knoten und m Kanten und sei

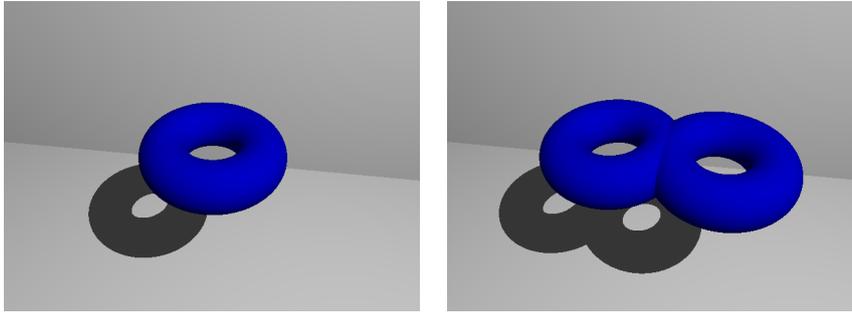


Abbildung 7: Fläche vom Geschlecht eins bzw. zwei.

H ein maximaler planarer Graph mit n Knoten, der G als Teilgraph enthält. Der maximale planare Graph H wird durch den Algorithmus 2 mit einer Wahrscheinlichkeit $p > 0$ erzeugt.

Nun müssen $3n - 6 - m$ Kanten aus H so gelöscht werden, dass der entstehende Graph zu G isomorph ist. In jedem Schritt wird eine zufällige Kante aus der Menge der noch in dem Graphen enthaltenen Kanten ausgewählt und gelöscht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man in jedem Schritt eine Kante aus $E(H) - E(G)$ löscht, ist echt positiv. Somit ist die Wahrscheinlichkeit p' , dass man nach Löschen der $3n - 6 - m$ Kanten aus H genau den Teilgraphen G erhält, ebenfalls echt positiv. Folglich gilt für die Wahrscheinlichkeit p^* , dass der resultierende Graph isomorph zu G ist: $p^* > p \cdot p' > 0$.

□

3 Planare Graphen höherer Ordnung

Ein planarer Graph höherer Ordnung bezeichnet hier einen Graphen der auf einer Fläche mit Geschlecht ≥ 1 planar ist. Zur Erklärung des topologischen Geschlechts betrachte man eine geschlossene orientierbare Fläche im \mathbb{R}^3 , d. h. eine Fläche ohne Rand bei der Außen und Innen unterscheidbar sind. Diese Fläche begrenzt einen Körper im \mathbb{R}^3 . Das Geschlecht der Fläche ist dann anschaulich die Zahl der Löcher in diesem Körper (oder die Anzahl der Henkel an diesem Körper). Mathematisch ausgedrückt bedeutet dies: Das Geschlecht einer Fläche ist definiert als die maximale Anzahl von möglichen Schnitten, so dass die Fläche nach dem Schnitt immer noch zusammenhängend ist. Beispiel aus dem Alltag: Die Oberfläche eines normalen Wasserglases hat Geschlecht 0, die einer Tasse (mit einem Henkel) Geschlecht 1, die einer Suppentasse (mit zwei Henkeln) Geschlecht 2.

3.1 Eigenschaften und Beschreibung

Motivation: Offensichtlich gibt es viele geschlossene Flächen, die nicht topologisch äquivalent (homöomorph) zur Ebene sind. Dies sind insbesondere solche

Flächen die ein von 0 verschiedenes Geschlecht haben. (Das Geschlecht ist eine topologische Invariante d. h. es ändert sich nicht unter Abbildungen die Homöomorphismen sind.) Warum sollte man nicht planare Graphen auf solchen Flächen betrachten?

Bezeichnen n die Anzahl der Knoten, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Facetten, so gilt für planare Graphen in der Ebene: $n - k + f = 2$ (Euler-Formel). Allgemeiner gilt aber: $n - k + f = \chi$ wobei χ die Euler-Charakteristik der Fläche bezeichnet in der der Graph gezeichnet ist. Dabei berechnet sich die Euler-Charakteristik einer Fläche aus dem Geschlecht durch folgende Formel: $\chi = 2 - 2g$ wobei g das Geschlecht der Fläche bezeichnet. Daraus erkennt man, dass auf Flächen höheren Geschlechts Graphen planar sind, die in der Ebene nicht planar gezeichnet werden können. Beispiel: Auf dem Torus (Geschlecht 1) ist der K_7 so zeichnbar, dass sich seine Kanten nicht überschneiden, in der Ebene sicher nicht. Am einfachsten erkennt man die erweiterten Möglichkeiten einer Fläche höheren Geschlechts, indem man sich einen ebenenplanaren Graphen auf einer Kugeloberfläche vorstellt. Nun kann man, wenn man das Geschlecht um 1 erhöht, ein Loch in die Kugel bohren, und so zwei verschiedene Facetten des Graphen verbinden. Durch dieses Loch kann man kreuzungsfrei weitere Kanten zeichnen, die in der Ebene nicht kreuzungsfrei zeichnbar waren.

3.2 Algorithmus

Der Algorithmus zur Erzeugung von planaren Graphen höherer Ordnung funktioniert wie folgt: Zunächst wird ein planarer Graph mit n Knoten und m Kanten erzeugt. Um das Vorgehen in allen Stufen einheitlich gestalten zu können, übertragen wir in Schritt 4 des Algorithmus die Einbettung von G auf die Kugeloberfläche. Anschließend werden zufällige, verschiedene Facetten F_1 und F_2 aus der Menge der (inneren) Facetten ausgewählt. Bildlich gesprochen wird nun eine Verbindung zwischen diesen beiden Facetten erzeugt, die es vorher noch nicht gab, indem ein "Tunnel" durch die Kugel geschaffen wird, dessen Anfang in F_1 und dessen Ende in F_2 liegt. Aus jeder der beiden Facetten werden wiederum je ein Knoten n_1 bzw. n_2 ausgewählt. Die Kante $e = \{n_1, n_2\}$ ist die erste Kante, welche durch diesen "Tunnel" verläuft. Die Kantenmengen von F_1 zusammen mit der von F_2 sowie der neuen Kante e bilden die erste Facette im inneren des Tunnels. Die Erzeugung der Kante e ist notwendig, da die Facette sonst nicht durchlaufen werden könnte – sie hätte zwei disjunkte Ränder. In Zeile 14 wird ein zufälliger Parameter für die Anzahl der Kanten gewählt, die durch den "Tunnel" verlaufen sollen. Hierbei ist zu beachten, dass maximal $|V(F_1)| + |V(F_2)|$ Kanten durch den Tunnel laufen können – der Beweis hierfür ist allerdings etwas lang und von geringem Erkenntnisgewinn, und wird daher an dieser Stelle nicht vorgestellt. Anschließend wird eine zufällige Tunnel Facette gewählt und an zwei zufälligen Knoten u, v gesplittet, so dass u inzident zu der ursprünglichen Facette F_1 und v inzident zu der ursprünglichen Facette F_2 ist.

3.3 Zeichnungen von torusplanaren Graphen

Das Hauptproblem solcher Zeichnungen sind sicherlich die Kanten die durch das Loch gehen. Wenn man einen kleinen Ausschnitt der Torusoberfläche betrachtet ist dieser homöomorph zu einem Ausschnitt aus der Ebene, daher ist es kein

Algorithm 5 Zufälliger planarer Graph höherer Ordnung

Gegeben: $n > 3$ Anzahl der Knoten, m Anzahl der Kanten, g Geschlecht

- 1: $G \leftarrow$ ⟨zufälliger planarer Graph mit n Knoten und m Kanten⟩
 - 2: $\Phi \leftarrow$ ⟨Menge der Facetten von G ⟩
 - 3: $\alpha \leftarrow$ ⟨äußere Facette von G ⟩
 - 4: $\Phi \leftarrow \Phi \cup \{\alpha\}$ {Aufbringen des Graphen auf die Kugel}
 - 5: $\alpha \leftarrow \perp$ {von nun an gibt es keine äußere Facette mehr}
 - 6: **for** $i=1 \dots g$ **do**
 - 7: $\{F_1, F_2\} \leftarrow_R \{\{F_1, F_2\} \mid F_1, F_2 \in \Phi, F_1 \neq F_2\}$
 - 8: $n_1 \leftarrow_R V(F_1)$
 - 9: $n_2 \leftarrow_R V(F_2)$
 - 10: $E \leftarrow E \cup \{(n_1, n_2), (n_2, n_1)\}$
 - 11: $F \leftarrow \langle E(F_1) \cup E(F_2) \cup \{(n_1, n_2), (n_2, n_1)\} \rangle$ {die von der Knotenmenge erzeugte Facette}
 - 12: $\Gamma \leftarrow \{F\}$ {Menge der Tunnelfacetten}
 - 13: $\Phi \leftarrow (\Phi - \{F_1, F_2\}) \cup \{F\}$
 - 14: $k \leftarrow_R \{0, \dots, |V(F_1)| + |V(F_2)|\}$
 - 15: **for** $j=2 \dots k$ **do**
 - 16: $F^* \leftarrow_R \Gamma$ {zufällige Tunnelfacette}
 - 17: $(u, v) \leftarrow_R \{(u, v) \mid u \in V(F^*) \cap V(F_1), v \in V(F^*) \cap V(F_2), \{u, v\} \notin E\}$
 - 18: $\{F_1^*, F_2^*\} \leftarrow F^*[u, v]$ mit $u \in F_1, v \in F_2$ {F[u,v]: Notation für Splitten}
 - 19: $\Phi \leftarrow (\Phi - F) \cup \{F_1^*, F_2^*\}$
 - 20: $\Gamma \leftarrow (\Gamma - F^*) \cup \{F_1^*, F_2^*\}$
 - 21: **end for**
 - 22: **end for**
-

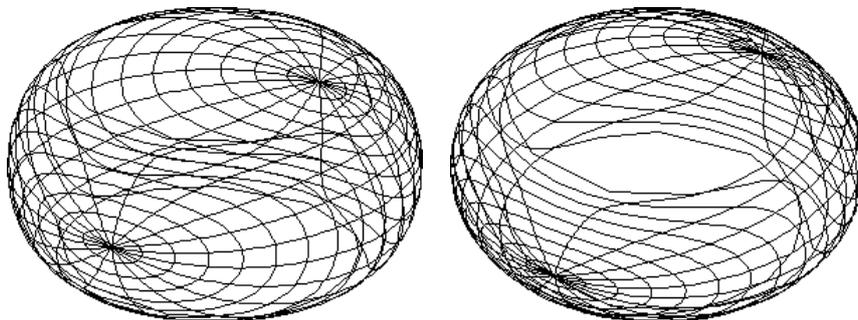


Abbildung 8: Zwei Ansichten der Aussenfläche des Torus unter der gewählten Parametrisierung

Problem einen ebenenplanaren Graphen auf den Torus zu zeichnen.

Nach Konstruktionsprinzip des torusplanaren Graphen existiert ein ebenenplanarer Graph der durch die Verbindung zweier Facetten und dem Zeichnen von Kanten in der neuen Facette zu einem Torusplanaren Graphen wird.

Diese Konstruktionsprinzip lässt sich bei der Zeichnung auf den Torus ausnutzen indem man die Zeichnung in zwei Schritte unterteilt:

Schritt 1: Zeichne den ebenenplanaren Graphen auf die Außenfläche des Torus

Man beginnt mit einer ebenen Zeichnung des ebenenplanaren Graphen. Darauf wendet man einen Homöomorphismus an der auf die Außenfläche des Torus abbildet. Beide Eigenschaften des Homöomorphismus werden benötigt: Die Bijektivität (eigentlich nur Injektivität) um sicherzustellen, dass bei der Abbildung keine Kreuzungen entstehen. Die Stetigkeit um sicherzustellen, dass die Kanten durchgehend sind, d.h. es keinen Sprung oder sonstige Unterbrechung der Kante gibt. Außerdem ist darauf zu achten die beiden verbundenen Facetten so abzubilden, dass sie das obere bzw. untere Ende des Loches überdecken, damit die zusätzlichen Kanten durch das Loch gelegt werden können.

Schritt 2: Zeichnen der zusätzlichen Kanten durch das Loch: Dabei ist zu beachten, dass im inneren Teil des Torus eine andere Parametrisierung als die auf der Außenseite des Torus verwendet werden muss (die Parametrisierung der Außenseite existiert eben nur dort). Deshalb müssen die Kanten die durch das Loch gehen in drei Teilen gezeichnet werden. Zwei Teile laufen in der äußeren Parametrisierung bis zu deren Rand wo sie dann durch den Teil in der inneren Parametrisierung verbunden werden.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Das vorgestellte Verfahren zur Erzeugung von zufälligen planaren Graphen ist effizient und vollständig in dem Sinne, dass jeder planare Graph mit einer positiven Wahrscheinlichkeit erzeugt wird. Der in Algorithmus 2 zunächst vorgeschlagene Ansatz ist nicht vollständig in diesem Sinne. Dennoch erscheint uns die in Kapitel 2 aufgeworfene Frage nach der Klasse der Graphen, welche mit diesem Verfahren erzeugt werden können, von Interesse. Die Effizienz des Verfahrens begründet sich paradoxerweise mit einem gewissen – mit der Erzeu-

gung des maximalen Graphen einhergehenden – Mehraufwand, der sich aber dadurch amortisiert, dass auf jegliche Planaritätstests verzichtet werden kann. Im Prinzip kann dieses Verfahren auch auf andere Graphgeneratoren übertragen werden, wenn die Erzeugung von Graphen, die bezüglich einer bestimmten Eigenschaft maximal sind, effizient durchgeführt werden kann. Als Beispiel hierfür ließe sich die Erzeugung von Graphen mit vorgegebener Core-Struktur nennen: Bringt man das vorgeschlagene Verfahren zur Anwendung, so kann man auf aufwendige Tests, welche die Core-Struktur eines Graphen überprüfen, vollständig verzichten, und auch in diesem Falle im Wesentlichen linear in der Anzahl der Knoten bleiben.

Bei planaren Graphen höherer Ordnung, welche als eine Verallgemeinerung der planaren Graphen betrachtet werden können, ist das Verfahren ebenfalls effizient und kann mit einem Aufwand in $O(n + gn)$ durchgeführt werden, wobei g das Geschlecht der Oberfläche bezeichne, auf der der Graph liegen soll. Solche Graphen können etwa als Oberflächenmodelle von komplexen dreidimensionalen Objekten oder als Modelle zu Platinen-Entwürfen auftreten.

Die Überlegungen, welche der Ausarbeitung zugrundeliegen, beschränken sich im Wesentlichen auf die Erzeugung der Graphen. Dennoch haben wir versucht das Thema der Zeichnungen, die im Zusammenhang mit planaren Graphen von besonderem Interesse sind, zu streifen, wo sich dies anbot. Insbesondere haben wir die Möglichkeiten der Darstellung von sogenannten torusplanaren Graphen – als Mapping eines planaren Graphen höherer Ordnung mit Geschlecht eins auf einen Torus – untersucht. Wir haben bewußt auf eine Behandlung von generischen Abbildungsvorschriften für planare Graphen verzichtet, da dies den Rahmen der Arbeit gesprengt hätte. Ohnehin sind diese Thema unzähliger Veröffentlichungen. Vollkommen ungeklärt ist hingegen die Frage nach der Verteilung der Graphen, die mit dem vorgeschlagenen Verfahren erzeugt werden. Auch hier bietet sich die Möglichkeit weiterer Untersuchungen an.

Literatur

- [1] R. Diestel. *Graphentheorie*, volume 2. Springer Verlag, 2000.
- [2] J. Hopcroft and R. Tarjan. Efficient planarity testing. *J. ACM*, 21(4):549–568, 1974.