UNIVERSITÄT KARLSRUHE
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK
INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

7. Übungsblatt

Achtung! Die Vorlesung von Mo, dem 13.02., wird vorgezogen auf Do, 09.02. (Raum 301, 14:00 Uhr)

Abgabe: möglichst in der Vorlesung am Do, 09.02., sonst bis Mo, 13.02., bei Martin (Raum 322)

Besprechung: Donnerstag, 16. Februar 2006, Raum 301, 14:00 Uhr

Aufgabe 1

In der Vorlesung wurde das Kreuzungslemma verwendet, um zu zeigen, dass für die maximale Anzahl von Einheitsabständen in einer Menge von n Punkten gilt $U(n) < 3.4n^{4/3}$. Zeigen Sie, dass die Behauptung auch dann korrekt ist, wenn die Voraussetzung des Kreuzungslemmas nicht erfüllt ist, d.h. wenn es in dem topologischen Graphen G' weniger als $6n$ Kanten gibt.

Zur Erinnerung: Wir haben für eine Menge P von n Punkten zuerst den Multigraphen $G(P, E)$ betrachtet, dessen Kanten gerade die maximalen punktfreien Kreisbögen auf den Einheitskreisen um Punkte aus P sind. Aus G entstand dann der schlichte Graph G', indem wir von jedem Paar von Multikanten zwischen gleichen Endpunkten eine Multikante entfernt haben.

Aufgabe 2

Gilt der Satz von Sylvester auch für abzählbar-unendliche Mengen von Punkten?

Aufgabe 3

Finden Sie ein Arrangement von sieben Geraden mit nur drei gewöhnlichen Punkten.

Aufgabe 4

Zeigen Sie mit Abstandstechniken wie Kelly im Beweis von Sylvesters Vermutung folgendes:

(a) Jedes Arrangement von n Geraden in der euklidischen Ebene, die sich nicht alle im selben Punkt schneiden und nicht alle parallel sind, hat einen gewöhnlichen Punkt.

(b) Sei $\mathcal{G}$ ein projektives Arrangement mit $n > 3$ Geraden und mindestens drei Punkten pro Gerade. Wenn eine Gerade g in $\mathcal{G}$ keinen gewöhnlichen Punkt enthält, dann ist ein Punkt p in $\mathcal{G}$ mit kleinstem positiven Abstand von g ein gewöhnlicher Punkt, der g zugeordnet ist, d.h. die beiden Geraden, die sich in p kreuzen, bilden mit g eine Facette von $\mathcal{G}$.

Aufgabe 5

Sei $\mathcal{G}$ ein Arrangement von n Geraden in der projektiven Ebene, in dem mindestens eine Gerade weniger als drei Punkte enthält. Zeigen Sie, dass sich alle Geraden in $\mathcal{G}$ in einem Punkt schneiden oder dass $\mathcal{G}$ mindestens $n - 2$ gewöhnliche Punkte hat.