UNIVERSITÄT KARLSRUHE
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK
INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

2. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 14. November 2005, *zu Beginn* der Vorlesung

Besprechung: Donnerstag, 17. November 2005, Raum 301, 14:00 Uhr

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass jeder planare Graph einen Knoten v mit Knotengrad $d_v \leq 5$ enthält.

Aufgabe 2

Der *Vergleichbarkeitsgraph* $G_P(X, E)$ einer partiell geordneten Menge $P = (X, \leq)$ ist definiert durch $E = \{xy \mid x \neq y,\ x \leq y \text{ oder } y \leq x\}$. Die *chromatische Zahl* $\chi(G)$ eines Graphen G ist die kleinste natürliche Zahl k, so dass bei einer Färbung der Knoten mit k Farben je zwei adjazente Knoten verschiedene Farben haben.

Zeigen Sie:

(a) In G_P ist die Kardinalität $\gamma(G_P)$ einer größten Clique gleich der chromatischen Zahl $\chi(G_P)$.

(b) Im Komplementgraphen $\overline{G_P}(X, \binom{X}{2} \setminus E)$ von G_P gilt ebenso $\gamma(\overline{G_P}) = \chi(\overline{G_P})$.

Aufgabe 3

Der Satz von König (1931) besagt folgendes:

Satz. *In einem bipartiten Graph $G(V, E)$ ist die maximale Kardinalität eines Matchings gleich der minimalen Kardinalität einer Knotenüberdeckung*[1].

Beweisen Sie den Satz von König mit Hilfe des Satzes von Dilworth aus der Vorlesung.

Hinweis: Überlegen Sie sich eine geeignete partielle Ordnung auf der Menge V.

Aufgabe 4

Im Gegensatz zu planaren Zeichnungen, die keine Kantenkreuzungen enthalten, ist ein *Schnittling* ein topologischer Graph, bei dem je zwei Kanten genau einen Punkt gemeinsam haben, also entweder einen gemeinsamen Endknoten oder eine Kreuzung.

(a) Zeichnen Sie die Kreise C_3, C_5, C_7 und danach C_6 als Schnittlinge.

(b) Zeigen Sie, dass jeder Kreis mit ungerader Knotenanzahl als Schnittling gezeichnet werden kann.

(c) Zeigen Sie, dass auch jeder Kreis mit gerader Knotenanzahl $n \geq 6$ als Schnittling gezeichnet werden kann.

Hinweis: Überlegen Sie sich jeweils, wie ein bestehender Schnittling mit n Knoten zu einem Schnittling mit $n + 2$ Knoten erweitert werden kann.

---

[1] Eine Knotenüberdeckung $V' \subseteq V$ ist eine Menge von Knoten, so dass für alle $e \in E$ gilt: $e \cap V' \neq \emptyset$.