UNIVERSITÄT KARLSRUHE
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK
INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

1. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 31. Oktober 2005, *zu Beginn* der Vorlesung

Besprechung: Donnerstag, 3. November 2005, Raum 301, 14:00 Uhr

Aufgabe 1

Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen Graphen G mit n Knoten:

(a) G ist ein Baum, d.h. G ist zusammenhängend und kreisfrei.

(b) G ist zusammenhängend und hat $n-1$ Kanten.

(c) G ist kreisfrei und hat $n-1$ Kanten.

Aufgabe 2

Ein planarer Graph G heisst *außerplanar*, falls er eine planare Zeichnung besitzt, in der jeder Knoten auf dem Rand der äußeren Facette liegt. Eine äquivalente Formulierung ist, dass G genau dann außerplanar ist, wenn man zu G noch einen weiteren Knoten mit Kanten zu allen vorhandenen Knoten hinzufügen kann, ohne die Planarität von G zu verletzen.

(a) Begründen Sie zunächst, dass ein Graph G genau dann außerplanar ist, wenn er keine Unterteilung des K_4 oder des $K_{2,3}$ als Teilgraph enthält.

(b) Zeigen Sie, dass ein außerplanarer Graph G mit n Knoten höchstens $2n-3$ Kanten enthält.

Aufgabe 3

Eine *partiell geordnete* Menge $P = (X, \leq)$ ist eine Menge X mit einer reflexiven, antisymmetrischen und transitiven Ordnungsrelation $\leq$. Eine *Kette* in P ist eine total geordnete Teilmenge $K \subseteq X$, d.h. für je zwei Elemente $x, y \in K$ gilt Vergleichbarkeit: $x \leq y$ oder $y \leq x$. Eine Antikette ist eine Teilmenge $A \subseteq X$ in der alle Elemente paarweise unvergleichbar sind.

(a) Zeigen Sie, dass es in jeder partiell geordneten Menge $P = (X, \leq)$ der Größe $n \geq sr + 1$ eine Kette der Länge $s + 1$ oder eine Antikette der Länge $r + 1$ gibt.

(b) Benutzen Sie diese Eigenschaft um zu zeigen, dass in jeder Folge von $n \geq sr + 1$ natürlichen Zahlen eine aufsteigende Teilfolge der Länge $s + 1$ oder eine absteigende Teilfolge der Länge $r + 1$ existiert.

Aufgabe 4

In der Vorlesung wurde der Satz von Dilworth bewiesen. Hier soll nun der dazu duale Satz gezeigt werden.

Sei also $P = (X, \leq)$ eine endliche, partiell geordnete Menge. Zeigen Sie: Die Mächtigkeit einer minimalen Überdeckung von X durch Antiketten ist gleich der Länge einer längsten Kette in P.